

УДК 62–50

© 2001 г. А.Б. Заварин, В.Н. Ушаков

О ВЫДЕЛЕНИИ ЯДРА ВЫЖИВАЕМОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Рассматриваются управляемая система и соответствующее ей дифференциальное включение, функционирующие на конечном промежутке времени и стесненные фазовым ограничением – компактным множеством в пространстве позиций. Предлагается попятный алгоритм приближенного построения ядра выживаемости дифференциального включения, а также алгоритм построения ε -выживающих решений управляемой системы и дифференциального включения.

Тематика статьи примыкает к [1–16]¹.

1. Основные определения. Пусть дана управляемая система, поведение которой описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in P, \quad t \in I, \quad I = [t_0, \theta], \quad t_0 < \theta < \infty \quad (1.1)$$

Здесь x – m -мерный фазовый вектор системы, u – управление, P – компакт в евклидовом пространстве R^m .

Предполагается, что выполнены следующие условия.

Условие 1°. Вектор-функция $f(t, x, u)$ непрерывна по совокупности переменных t, x, u в области $I \times R^m \times P$, а также для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset I \times R^m$ существует такая постоянная $L = L(D) \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x^*, u) - f(t, x_*, u)\| \leq L \|x^* - x_*\|, \quad (t, x^*) \text{ и } (t, x_*) \text{ из } D, \quad u \in P$$

Условие 2°. Существует такая постоянная $\mu \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u)\| \leq \mu(1 + \|x\|), \quad (t, x, u) \in D \times P$$

Под допустимым управлением $u(t)$, $t \in I$ будем понимать любую измеримую по Лебегу функцию, удовлетворяющую включению $u(t) \in P$, $t \in I$.

Решением уравнения (1.1), порожденным допустимым управлением $u(t)$, $t \in I$, назовем абсолютно непрерывную вектор-функцию $x[t]$, $t \in I$, такую, что $\dot{x}[t] = f(t, x[t], u[t])$ почти всюду на I . Символом $Y(t^*, t_*, x_*)$, $t_0 < t_* < t^* < \theta$, обозначим множество всех $x^* \in R^m$, в которые приходят в момент t^* решения $x[t]$, $x[t_*] = x_*$, уравнения (1.1), порожденные всевозможными допустимыми управлениями $u(t)$; $Y(t^*; t_*, x_*)$ называется множеством достижимости (МД) системы (1.1) с начальным условием $x[t_*] = x_*$, отвечающим моменту t^* .

¹ См. также: Филиппова Т.Ф. Задачи о выживаемости для дифференциальных включений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. 01.01.02. Екатеринбург, 1992. 266 с.

Поставим в соответствие уравнению (1.1) дифференциальное включение (ДВ)

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad t \in I, \quad F(t, x) = \text{co}\{f(t, x, u) : u \in P\} \quad (1.2)$$

где $\text{co}\{\cdot\}$ означает выпуклую оболочку.

Решением ДВ (1.2) назовем абсолютно непрерывную вектор-функцию $x[t]$, $t \in I$, удовлетворяющую ДВ (1.2) почти всюду на I . Полагаем $X(t^*; t_*, x_*)$, $t_0 \leq t_* < t^* \leq \theta$ – множество всех $x^* \in \mathbb{R}^m$, в которые приходят в момент t^* все возможные решения $x[t]$, $x[t_*] = x_*$, ДВ (1.2).

Справедливо равенство

$$X(t^*; t_*, x_*) = \text{cl } Y(t^*; t_*, x_*), \quad x_* \in \mathbb{R}^m \quad (1.3)$$

где $\text{cl } Y$ – замыкание множества Y .

Удобнее работать с замкнутыми МД, поэтому будем работать с МД ДВ (1.2).

Полагаем, что наряду с системами (1.1) и (1.2) задано замкнутое множество $\Phi \subset I \times \mathbb{R}^m$, имеющее непустые сечения $\Phi(t) = \{x \in \mathbb{R}^m : (t, x) \in \Phi\}$, $t \in I$, причем $\Phi(\theta)$ – компакт в $\mathbb{R}^m$.

Будем говорить, что решение

$$x[t], \quad t \in [t_*, \theta], \quad x[t_*] = x_*, \quad t_* \in I \quad (1.4)$$

ДВ (1.2) является выживающим в Φ , если

$$(t, x[t]) \in \Phi, \quad t \in [t_*, \theta] \quad (1.5)$$

2. Ядро выживаемости. Изучим вопрос о приближенном построении ядра выживаемости ДВ (1.2) в множестве Φ .

Определение 2.1. Ядром выживаемости Ω ДВ (1.2) в множестве Φ назовем множество всех $(t_*, x_*) \in \Phi$, таких, что существует решение (1.4) ДВ (1.2), выживающее в Φ .

Учитывая условия 1° и 2°, наложенные на систему (1.1), можно показать, что множество всех (t, x) , принадлежащих выживающим в Φ решениям ДВ (1.2), содержится в некотором ограниченном и замкнутом множестве $D \subset I \times \mathbb{R}^m$. Будем считать, не нарушая общности рассуждений, что все точки $(t, x[t])$ и все конструкции, рассматриваемые ниже, содержатся в D .

Обозначим

$$\begin{aligned} \omega^*(\delta) &= \sup\{d(F(t^*, x^*), F(t_*, x_*)) : (t^*, x^*), (t_*, x_*) \in D, |t^* - t_*| + \|x^* - x_*\| \leq \delta\} \\ \omega(\delta) &= \delta \omega^*((1 + K)\delta), \quad \delta > 0, \quad K = \max\{\|f(t, x, u)\| : (t, x, u) \in D \times P\} < \infty \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $d(F^*, F_*)$ – хаусдорфово расстояние между множествами F^* и F_* .

Из определения функций $\omega^*(\delta)$ и $\omega(\delta)$ следует, что они монотонно убывают к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

Зададим последовательность разбиений $\Gamma_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{N(n)} = \theta\}$ отрезка I , таких, что диаметры

$$\Delta^{(n)} = \max\{\Delta_i : 0 < i \leq N(n) - 1\}, \quad \Delta_i = t_{i+1} - t_i$$

разбиений Γ_n монотонно стремятся к нулю с ростом номера n .

Отметим, что моменты t_i разбиений Γ_n – свои для каждого разбиения Γ_n ; однако,

чтобы не усложнять обозначений, эту зависимость моментов от номера n явно отражать не будем. Полагаем

$$X(t^*; t_*, X_*) = \bigcup_{x_* \in X_*} X(t^*; t_*, x_*), \quad X_* \subset \mathbb{R}^m$$

$$X^{-1}(t_*, t^*, X^*) = \{x_* \in \mathbb{R}^m : X(t^*; t_*, x_*) \cap X^* \neq \emptyset\}, \quad X^* \subset \mathbb{R}^m$$

$$\tilde{X}(t^*; t_*, x_*) = x_* + (t^* - t_*)F(t_*, x_*)$$

$$\tilde{X}^{-1}(t_*, t^*, X^*) = \{x_* \in \mathbb{R}^m : \tilde{X}(t^*; t_*, x_*) \cap X^* \neq \emptyset\}$$

X_ε – ε -окрестность множества X^* ; здесь $t_0 \leq t_* < t^* \leq \theta$, $X^* \subset \mathbb{R}^m$, $\varepsilon > 0$.

Каждому разбиению Γ_n поставим в соответствие последовательность $\{\varepsilon_i\}$ чисел

$$\varepsilon_i = \omega(\Delta_{i-1}) + (1 + L\Delta_{i-1})\varepsilon_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N(n); \quad \varepsilon_0 = 0$$

Поставим также в соответствие каждому разбиению Γ_n последовательность $\{\tilde{\Omega}^{(n)}(t_i)\}$ множеств $\tilde{\Omega}^{(n)}(t_i) \subset \mathbb{R}^m$, $t_i \in \Gamma_n$, заданную рекуррентными соотношениями, начиная от конечного момента $t_{N(n)} = \theta$ разбиения Γ_n .

Определение 2.2. Полагаем

$$\tilde{\Omega}^{(n)}(\theta) = \Phi(\theta)_{\varepsilon_{N(n)}}$$

$$\tilde{\Omega}^{(n)}(t_i) = \Phi(t_i)_{\varepsilon_i} \cap \tilde{X}^{-1}(t_i; t_{i+1}, \tilde{\Omega}^{(n)}(t_{i+1})), \quad i = N(n) - 1, N(n) - 2, \dots, 0$$

Таким образом, последовательность $\{\tilde{\Omega}^{(n)}(t_i)\}$ представляет собой попятно заданную последовательность множеств $\tilde{\Omega}^{(n)}(t_i)$ в $\mathbb{R}^m$. Определим предел этой последовательности $\{\tilde{\Omega}^{(n)}(t_i)\}$, когда $\Delta^{(n)}$ – диаметр разбиения Γ_n стремится к нулю.

Определение 2.3. Полагаем Ω^0 – множество всех точек $(t_*, x_*) \in I \times \mathbb{R}^m$, для каждой из которых найдется такая последовательность

$$\{(\tau_n, x_n) : \tau_n = t_n(t_*), \quad x_n \in \tilde{\Omega}^{(n)}(\tau_n)\} \quad (2.2)$$

что $(t_*, x_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tau_n, x_n)$; здесь $t_n(t_*) = \min_{t_i \in \Gamma_n, t_i \geq t_*} t_i$.

Из определения следует, что $\Omega^0 \subset \Phi$.

Отметим, что Ω^0 непусто, так как, согласно определению, $\tilde{\Omega}^{(n)}(t_{N(n)}) = \Phi(\theta)_{\varepsilon_{N(n)}}$, и значит, непусто сечение $\Omega^0(\theta) = \{x : (\theta, x) \in \Omega^0\}$.

Справедливо следующее утверждение

Теорема 2.1. Множество Ω^0 является ядром выживаемости ДВ (1.2) в множестве Φ , т.е. $\Omega^0 = \Omega$.

Доказательство. Докажем сначала включение $\Omega^0 \subset \Omega$. Зафиксируем произвольную точку $(t_*, x_*) \in \Omega^0$, $t_* < \theta$. Найдется последовательность (2.2), такая, что $(t_*, x_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tau_n, x_n)$.

Рассмотрим произвольный номер n и отвечающий ему отрезок $[\tau_n, \theta]$. Из включения $x_n \in \tilde{\Omega}^{(n)}(\tau_n)$ следует, что существует такая абсолютно непрерывная на $[\tau_n, \theta]$ вектор-функция $\tilde{x}^{(n)}[t]$, что

$$\dot{\tilde{x}}^{(n)}[t] \in F(t_i, \tilde{x}^{(n)}[t_i]), \quad t \in [t_i, t_{i+1}) \subset [\tau_n, \theta) \quad (2.3)$$

$$\tilde{x}^{(n)}[\tau_n] = x_n, \quad \tilde{x}^{(n)}[t_i] \in \tilde{\Omega}^{(n)}(t_i), \quad \tau_n < t_i < \theta$$

Введем в рассмотрение функции, являющиеся непрерывными продолжениями на отрезок $[t_*, \theta]$ функций $\tilde{x}^{(n)}[t]$, $t \in [\tau_n, \theta]$:

$$\tilde{y}^{(n)}[t] = \begin{cases} \tilde{x}^{(n)}[\tau_n], & t_* \leq t \leq \tau_n \\ \tilde{x}^{(n)}[t], & \tau_n < t \leq \theta \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как последовательность $\{\tilde{y}^{(n)}[t]\}$ равноограничена и равномерно непрерывна на $[t_*, \theta]$, то из нее можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что это сама последовательность $\{\tilde{y}^{(n)}[t]\}$ равномерно сходится на $[t_*, \theta]$. Полагая

$$x[t] = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{y}^{(n)}[t], \quad t \in [t_*, \theta]$$

получаем

$$\begin{aligned} x[t_*] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{y}^{(n)}[t_*] = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}^{(n)}[\tau_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_* \\ x[t] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{y}^{(n)}[t] = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}^{(n)}[t], \quad t \in (t_*, \theta) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из условий (2.2), (2.3) и соотношений (2.4) следует, что вектор-функция $x[t]$, $t \in [t_*, \theta]$, удовлетворяет ДВ

$$\dot{x} \in F(t, x) \text{ почти всюду на } [t_*, \theta] \quad (2.5)$$

и включению

$$x[t] \in \Omega^0(t), \quad t \in [t_*, \theta] \quad (2.6)$$

Включение (2.5) доказывается стандартным образом (см., например, [1, с. 60, 61]).

Докажем соотношение (2.6). Зафиксируем произвольный момент $t \in [t_*, \theta]$. Для этого момента имеет место равенство $x[t] = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{y}^{(n)}[t]$. По построению функции $\tilde{y}^{(n)}[t]$, $t \in [t_*, \theta]$, выполняется включение $\tilde{y}^{(n)}[t_n(t)] = \tilde{x}^{(n)}[t_n(t)] \in \tilde{\Omega}^{(n)}(t_n(t))$, момент $t_n(t)$ определен выше. Полагаем $\eta_n = t_n(t)$ и $y_n = \tilde{x}^{(n)}[t_n(t)]$. Тогда

$$\begin{aligned} \|(t, x[t]) - (\eta_n, y_n)\| &\leq \|(t, x[t]) - (t, \tilde{y}^{(n)}[t])\| + \\ &+ \|(t, \tilde{y}^{(n)}[t]) - (t_n(t), \tilde{y}^{(n)}[t_n(t)])\| \leq \|x[t] - \tilde{y}^{(n)}[t]\| + (1 + K)\Delta^{(n)} \end{aligned}$$

Принимая во внимание это неравенство и предельные соотношения

$$x[t] = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{y}^{(n)}[t], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{(n)} = 0$$

получаем, что

$$(t, x[t]) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\eta_n, y_n), \quad \eta_n = t_n(t), \quad y_n \in \tilde{\Omega}^{(n)}(\eta_n)$$

Тем самым включение (2.6) доказано.

Включение (2.6) означает, что $(t, x[t]) \in \Omega^0$, $t \in [t_*, \theta]$. Тогда, принимая во внимание включение $\Phi^0 \subset \Phi$, получаем $(t, x[t]) \in \Phi$, $t \in [t_*, \theta]$.

Итак, показано, что для любой точки $(t_*, x_*) \in \Omega^0$, $t_* < \theta$, найдется решение (1.4) ДВ (1.2), выживающее в Φ . Очевидно также, что любая точка $(t_*, x_*) \in \Omega^0$, $t_* = \theta$, удовлетворяет включению $(t_*, x_*) \in \Phi$. Вместе с тем показано, что $\Omega^0 \subset \Omega$.

Докажем обратное включение $\Omega \subset \Omega^0$.

Рассмотрим разбиение Γ_n отрезка I и все те сечения $\Omega(t_i)$, $t_i \in \Gamma_n$, множества Ω , которые непусты. Обозначим $T_n = \{t_i \in \Gamma_n : \Omega(t_i) \neq \emptyset\}$. Очевидно, что множество T_n обладает свойством: если $t_i \in T_n$, то $t_{i+1} \in T_n$.

Справедливы включения

$$\Omega(t_i) \subset \Phi(t_i) \cap X^{-1}(t_i; t_{i+1}, \Omega(t_{i+1})), \quad t_i \in T_n \quad (2.7)$$

Действительно, пусть $x^{(i)} \in \Omega(t_i)$. Тогда найдется решение $x[t]$, $t \in [t_i, \theta]$, $x[t_i] = x^{(i)}$, ДВ (1.2), выживающее в Φ . Так как решение $x[t]$, $t \in [t_{i+1}, \theta]$, является выживающим в Φ , то $x[t_{i+1}] \in \Omega(t_{i+1})$. Отсюда следует, что

$$X(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) \cap \Omega(t_{i+1}) \neq \emptyset$$

и значит,

$$\Omega(t_i) \subset X^{-1}(t_i; t_{i+1}, \Omega(t_{i+1}))$$

Учитывая также включение $\Omega(t_i) \subset \Phi(t_i)$, получаем соотношения (2.7).

Выберем произвольный момент $t_i \in T_n$, $t_i < \theta$, и рассмотрим множества $\Omega(t_i)$ и $\Omega(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)}$; числа $\omega(\Delta_i)$ определены выше.

Справедливо включение

$$\Omega(t_i) \subset \tilde{X}^{-1}(t_i; t_{i+1}, \Omega(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)}), \quad t_i \in T_n \quad (2.8)$$

Покажем это. Пусть $x[t_i] \in \Omega(t_i)$. Каждая точка $x[t_{i+1}] \in X(t_{i+1}; t_i, x[t_i])$ есть конечное значение некоторого решения $x[t]$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ДВ $\dot{x} \in F(t, x)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ с начальным значением $x[t_i]$. Справедливо равенство

$$x[t_{i+1}] = x[t_i] + I_i, \quad I_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f[t] dt, \quad f[t] \in F(t, x[t]), \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

Принимая во внимание определение функции $\omega^*(\Delta)$, получаем

$$d(F(t, x[t]), F(t_i, x[t_i])) \leq \omega^*(|t - t_i| + \|x[t] - x[t_i]\|) \leq \omega^*((1+K)\Delta_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \quad (2.9)$$

Значит, справедливо включение

$$f[t] \in F(t_i, x[t_i])_{\omega^*((1+K)\Delta_i)}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

из которого следует включение

$$\frac{1}{\Delta_i} I_i \in F(t_i, x[t_i])_{\omega^*((1+K)\Delta_i)} \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует включение

$$x[t_{i+1}] \in x[t_i] + \Delta_i F(t_i, x[t_i])_{\omega^*((1+K)\Delta_i)} = \tilde{X}(t_{i+1}; t_i, x[t_i])_{\omega(\Delta_i)} \quad (2.11)$$

Учитывая, что соотношение (2.11) получено для произвольной точки $x[t_{i+1}] \in X(t_{i+1}; t_i, x[t_i])$, заключаем, что

$$X(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) \subset \tilde{X}(t_{i+1}; t_i, x[t_i])_{\omega(\Delta_i)}$$

Из включения $x[t_i] \in \Omega(t_i)$ следует

$$\Omega(t_{i+1}) \cap \tilde{X}(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) \neq \emptyset$$

и значит,

$$\Omega(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)} \cap \tilde{X}(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) \neq \emptyset \quad (2.12)$$

Поскольку момент $t_i \in T_n$ и точка $x[t_i] \in \Omega(t_i)$ выбраны произвольно, то из (2.12) следует включение (2.8).

Зададим систему $\{\hat{\Omega}^{(n)}(t_i) : t_i \in T_n\}$ множеств $\hat{\Omega}^{(n)}(t_i)$ равенствами $\hat{\Omega}^{(n)}(t_i) = \Omega(t_i)_{\varepsilon_i}$ (числа ε_i определены выше в начале разд. 2). По определению множеств $\{\hat{\Omega}^{(n)}(t_i), t_i \in T_n\}$ выполняются включения

$$\Omega(t_i) \subset \hat{\Omega}^{(n)}(t_i), \quad t_i \in T_n$$

Справедливы включения

$$\hat{\Omega}^{(n)}(t_i) \subset \tilde{X}^{-1}(t_i; t_{i+1}, \hat{\Omega}^{(n)}(t_{i+1})), \quad t_i \in T_n \quad (2.13)$$

Докажем это. Пусть $x[t_i] \in \hat{\Omega}^{(n)}(t_i)$ и $x^*[t_i]$ — ближайшая точка на $\Omega(t_i)$ к точке $x[t_i]$. Справедливо неравенство $\|x[t_i] - x^*[t_i]\| \leq \varepsilon_i$.

Из включений $x^*[t_i] \in \Omega(t_i)$ и (2.8) следует соотношение

$$\Omega(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)} \cap \tilde{X}(t_{i+1}; t_i, x^*[t_i]) \neq \emptyset \quad (2.14)$$

Тогда существует точка

$$x^*[t_{i+1}] = x^*[t_i] + \Delta_i f^*[t_i], \quad f^*[t_i] \in F(t_i, x^*[t_i]) \quad (2.15)$$

содержащаяся в $\Omega(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)}$.

Принимая во внимание неравенство

$$d(F(t_i, x[t_i]), F(t_i, x^*[t_i])) \leq L \|x[t_i] - x^*[t_i]\|$$

выберем вектор $f[t_i] \in F(t_i, x[t_i])$, удовлетворяющий неравенству

$$\|f[t_i] - f^*[t_i]\| \leq L \|x[t_i] - x^*[t_i]\| \leq L \varepsilon_i$$

Тогда оказывается, что точка $x[t_{i+1}] = x[t_i] + \Delta_i f[t_i]$ отстоит от точки (2.15) не более чем на величину

$$\|x[t_i] - x^*[t_i]\| + \Delta_i \|f[t_i] - f^*[t_i]\| \leq (1 + L \Delta_i) \varepsilon_i$$

Значит,

$$x[t_{i+1}] \in \hat{\Omega}^{(n)}(t_{i+1})$$

Таким образом, показано, что для любых $t_i \in T_n$, $x[t_i] \in \hat{\Omega}^{(n)}(t_i)$ имеет место соотношение

$$\tilde{X}(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) \cap \hat{\Omega}^{(n)}(t_{i+1}) \neq \emptyset$$

откуда следует включение (2.13).

Справедливы включения

$$\hat{\Omega}^{(n)}(t_i) \subset \tilde{\Omega}^{(n)}(t_i), \quad t_i \in T_n \quad (2.16)$$

Докажем (2.16) методом математической индукции. В самом деле выполняются соотношения

$$\hat{\Omega}^{(n)}(t_i) = \Omega(t_i)_{\varepsilon_i} \subset \Phi(t_i)_{\varepsilon_i}, \quad t_i \in T_n \quad (2.17)$$

$$\hat{\Omega}^{(n)}(t_{N(n)}) = \Omega(t_{N(n)})_{\varepsilon_{N(n)}} = \Phi(t_{N(n)})_{\varepsilon_{N(n)}} = \tilde{\Omega}^{(n)}(t_{N(n)}) \quad (2.18)$$

Следовательно, для $i = N(n)$ выполняется $\hat{\Omega}^{(n)}(t_i) \subset \tilde{\Omega}^{(n)}(t_i)$.

Докажем, что это включение выполняется при всех остальных i , для которых $t_i \in T_n$.

Для этого предположим, что $t_i \in T_n$ и для момента t_{i+1} имеет место включение

$$\hat{\Omega}^{(n)}(t_{i+1}) \subset \tilde{\Omega}^{(n)}(t_{i+1}) \quad (2.19)$$

Докажем, что $\hat{\Omega}^{(n)}(t_i) \subset \tilde{\Omega}^{(n)}(t_i)$. В самом деле из (2.13) и (2.17) следует

$$\hat{\Omega}^{(n)}(t_i) \subset \Phi(t_i)_{\varepsilon_i} \cap \tilde{X}^{-1}(t_i; t_{i+1}, \hat{\Omega}^{(n)}(t_{i+1}))$$

а из (2.19) следует $\Phi(t_i)_{\varepsilon_i} \cap \tilde{X}^{-1}(t_i; t_{i+1}, \hat{\Omega}^{(n)}(t_{i+1})) \subset \Phi(t_i)_{\varepsilon_i} \cap \tilde{X}^{-1}(t_i; t_{i+1}, \tilde{\Omega}^{(n)}(t_{i+1}))$

Отсюда получаем $\hat{\Omega}^{(n)}(t_i) \subset \tilde{\Omega}^{(n)}(t_i)$. Вместе с тем соотношения (2.16) доказаны.

Применим соотношение (2.16) к доказательству включения $\Omega \subset \Omega^0$.

В случае, когда $t_* = \theta$, выполняются равенства

$$\Omega(t_*) = \Phi(\theta), \quad \Omega^0(t_*) = \Phi(\theta)$$

и значит, $\Omega(t_*) = \Omega^0(t_*)$.

Пусть $t_* < \theta$. Выберем произвольную точку $(t_*, x_*) \in \Omega$. Верны неравенства

$$t_* < t_n(t_*) \leq t_* + \Delta^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как $(t_*, x_*) \in \Omega$, то существует решение $x[t]$, $t \in [t_*, \theta]$, $x[t_*] = x_*$ ДВ (1.2), выживающее в Φ . Любой "кусоч" $x[t]$, $t \in [t^*, \theta]$, $t_* \leq t^* \leq \theta$, этого решения есть выживающее в Φ решение ДВ (1.2). Отсюда следует включение

$$x[t_n(t_*)] \in \Omega(t_n(t_*)) \subset \hat{\Omega}^{(n)}(t_n(t_*)) \subset \tilde{\Omega}^{(n)}(t_n(t_*))$$

Значит, при каждом n найдется такая точка $x[t_n(t_*)]$, что

$$x[t_n(t_*)] \in \tilde{\Omega}(t_n(t_*)), \quad \|x[t_n(t_*)] - x_*\| \leq K(t_n(t_*) - t_*)$$

Принимая во внимание равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n(t_*) - t_*) = 0$$

получаем, что последовательность $\{(t_n(t_*), x[t_n(t_*)])\}$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n(t_*), x[t_n(t_*)]) = (t_*, x_*)$$

и значит, $(t_*, x_*) \in \Omega^0$.

Показано, что $\Omega(t_*) \subset \Omega^0(t_*)$, $t_* < \theta$.

Из соотношений $\Omega(\theta) \subset \Omega^0(\theta)$ и $\Omega(t_*) \subset \Omega^0(t_*)$, $t_* < \theta$ следует включение $\Omega \subset \Omega^0$. Из включений $\Omega^0 \subset \Omega$, $\Omega \subset \Omega^0$ следует $\Omega = \Omega^0$. Теорема 2.1 доказана.

3. Построение ε -выживающих решений. Предложим процедуру построения ε -выживающих решений управляемой системы (1.1) и ДВ (1.2). Эта процедура представляет собой хорошо известную процедуру управления с поведением [4],

приспособленную для решения задач выживания. Предполагаем, что относительно множества Φ выполнено следующее условие

Условие 3°. Выполняется неравенство

$$\sup_{t_*, t^* \in I, |t^* - t_*| \leq \delta} d(\Phi(t^*), \Phi(t_*)) \leq \chi(\delta), \quad \delta > 0$$

где функция $\chi(\delta)$ удовлетворяет предельному соотношению $\lim_{\delta \downarrow 0} \chi(\delta) = 0$; здесь $d(\Phi(t^*), \Phi(t_*))$ – хаусдорфово расстояние между сечениями $\Phi(t_*)$ и $\Phi(t^*)$ множества Φ .

Опишем процедуру управления с поводырем. Пусть Γ_n – некоторое разбиение из последовательности разбиений отрезка I , заданной в разд. 2. Предположим, что уже вычислили все множества $\tilde{\Omega}^{(n)}(t_i), t_i \in T_n$, которые определены соотношениями

$$\tilde{\Omega}^{(n)}(\theta) = \Phi(\theta)_{\varepsilon_{N(n)}}, \quad \tilde{\Omega}^{(n)}(t_i) = \Phi(t_i)_{\varepsilon_i} \cap \tilde{X}^{-1}(t_i; t_{i+1}, \tilde{\Omega}^{(n)}(t_{i+1})), \quad t_i, t_{i+1} \in T_n$$

Пусть t_k – наименьший момент в множестве T_n . Рассмотрим произвольную точку $x_* \in \tilde{\Omega}^{(n)}(t_k)$. Полагаем $x[t_k] = z[t_k] = x_*$. Найдется вектор $f[t_k] \in F(t_k, z[t_k])$, такой, что

$$z[t_{k+1}] = z[t_k] + \Delta_k f[t_k] \in \tilde{\Omega}^{(n)}(t_{k+1}) \quad (3.1)$$

Так как $z[t_{k+1}] \in \tilde{\Omega}^{(n)}(t_{k+1})$, то найдется вектор $f[t_{k+1}] \in F(t_{k+1}, z[t_{k+1}])$, такой, что соотношение (3.1) выполнено при замене k на $k+1$.

Предположим, что в некоторый момент $t_{k+p} \in T_n$ вычислили точку $z[t_{k+p}] \in \tilde{\Omega}^{(n)}(t_{k+p})$. Тогда следующую точку $z[t_{k+p+1}]$ определим соотношением (3.1) при замене k на $k+p$, где $f[t_{k+p}]$ – некоторый вектор из $F(t_{k+p}, z[t_{k+p}])$. Так, продолжая последовательно строить точки $z[t_k], z[t_{k+1}], \dots, z[t_{k+p}], z[t_{k+p+1}], \dots$, построим, наконец, последнюю точку так, что соотношение (3.1) выполнено при $k = N(n) - 1$, где

$$z[t_{N(n)-1}] \in \tilde{\Omega}^{(n)}(t_{N(n)-1}), \quad f[t_{N(n)-1}] \in F(t_{N(n)-1}, z[t_{N(n)-1}])$$

Последовательность $\{z[t_i]\}$ ($i = k, k+1, \dots, N(n)$) удовлетворяет соотношениям $z[t_i] \in \Phi(t_i)_{\varepsilon_i}$, и ее можно представить как дискретно заданное движение поводыря для управляемой системы (1.1) на промежутке I . Это дискретно заданное движение поводыря доопределим на весь промежуток $[t_*, \theta]$, полагая

$$z[t] = z[t_i] + (t - t_i)f[t_i], \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = k, k+1, \dots, N(n) - 1$$

По движению поводыря $z[t], t \in [t_k, \theta]$ определим управление

$$u(t) = u_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad u_i \in P, \quad i = k, k+1, \dots, N(n) - 1$$

порождающее ε -выживающее решение системы (1.1). Последовательность $u_k, u_{k+1}, \dots, u_{N(n)-1}$ определим следующим образом. Рассмотрим промежуток $[t_k, t_{k+1})$ разбиения Γ_n и выберем произвольно вектор $u_k \in P$. Решение $x[t], t \in [t_k, t_{k+1}]$, системы (1.1), порожденное управлением $u(t) = u_k, t \in [t_k, t_{k+1})$, и с начальным условием $x[t_k] = x_*$, удовлетворяет соотношению

$$x[t] = x_* + \Phi(t_k, t), \quad \Phi(t_k, t) = \int_{t_k}^t f(\tau, x[\tau], u(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_k, t_{k+1}]$$

Рассмотрим промежуток $[t_{k+1}, t_{k+2})$ и вектор $s[t_{k+1}] = z[t_{k+1}] - x[t_{k+1}]$.

Если $s[t_{k+1}] = 0$, то выбираем произвольно вектор $u_{k+1} \in \mathbf{P}$.

Если $s[t_{k+1}] \neq 0$, то вектор $u_{k+1} \in \mathbf{P}$ выбираем из условия

$$s[t_{k+1}]' f(t_{k+1}, x[t_{k+1}], u_{k+1}) = \max_{u \in \mathbf{P}} s[t_{k+1}]' f(t_{k+1}, x[t_{k+1}], u)$$

где $s'f$ означает скалярное произведение векторов s и f .

Решение $x[t]$, $t \in [t_{k+1}, t_{k+2}]$, системы (1.1), порожденное управлением $u(t) = u_{k+1}$, $t \in [t_{k+1}, t_{k+2})$, удовлетворяет соотношению

$$x[t] = x[t_{k+1}] + \Phi(t_{k+1}, t), \quad t \in [t_{k+1}, t_{k+2}]$$

Далее, вычисляем вектор $s[t_{k+2}] = z[t_{k+2}] - x[t_{k+2}]$ и аналогично предыдущему выбираем вектор $u_{k+2} \in \mathbf{P}$. Так, продолжая последовательно строить векторы $s[t_i] = z[t_i] - x[t_i]$ и u_i ($i = k, k+1, \dots, N(n)-1$), определяем параллельно и решение системы (1.1), порожденное кусочно-постоянным управлением

$$u(t) = u_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = k, k+1, \dots, N(n)-1$$

Имеем

$$x[t] = x[t_i] + \Phi(t_i, t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = k, k+1, \dots, N(n)-1$$

Выведем оценку сверху квадрата величины отклонения решения $x[t]$ от множества $\Phi(t)$, $t \in [t_k, \theta]$. Это отклонение обозначим символом

$$d(x[t], \Phi(t)) = \min_{w \in \Phi(t)} \|x[t] - w\|$$

Для этого сначала выведем оценку сверху величины $\|s[t_i]\|^2$ через начальную величину $\|s[t_k]\|^2$ (причем обозначено $s[t_k] = z[t_k] - x[t_k] = 0$).

При каждом i , $k \leq i \leq N(n)-1$, справедливо равенство

$$s[t_{i+1}] = s[t_i] + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f[t_i] dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x[t], u(t)) dt \quad (3.2)$$

$$f[t_i] \in \mathbf{F}(t_i, z(t_i)), \quad u_i \in \mathbf{U}_{s[t_i]}(t_i, x[t_i]), \quad \mathbf{U}_{s[t_i]}(t_i, x[t_i]) = \{u_* \in \mathbf{P} : s[t_i]' f(t_i, x[t_i], u_*) = \max_{u \in \mathbf{P}} s[t_i]' f(t_i, x[t_i], u)\}, \quad s[t_i] = z[t_i] - x[t_i]$$

$$\|s[t_{i+1}]\|^2 = \|s[t_i]\|^2 + 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} s[t_i]' (f[t_i] - f(t, x[t], u_i)) dt + \gamma(t_i, t_{i+1})$$

$$\gamma(t_i, t_{i+1}) = \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (f[t_i] - f(t, x[t], u_i)) dt \right)^2$$

Применяя стандартные в теории дифференциальных игр рассуждения (см. [4]), получаем

$$s[t_i]' (f[t_i] - f(t, x[t], u_i)) \leq L \|s[t_i]\|^2 + \gamma \omega^* ((1+K)\Delta_i)$$

$$\gamma = \gamma(\mathbf{D}) = \max\{\|(t, w_*) - (t, w^*)\| : (t, w_*), (t, w^*) \in \mathbf{D}\} < \infty$$

Отсюда находим

$$2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} s[t_i]' (f[t_i] - f(t, x[t], u_i)) dt \leq 2L \|s[t_i]\|^2 \Delta_i + \gamma \omega^* ((1+K)\Delta_i) \Delta_i \quad (3.3)$$

Для величины $\gamma(t_i, t_{i+1})$ справедлива оценка

$$\gamma(t_i, t_{i+1}) \leq 4K^2 \Delta_i^2 \quad (3.4)$$

Принимая во внимание оценки (3.3) и (3.4), получаем

$$\|s[t_{i+1}]\|^2 \leq \|s[t_i]\|^2 + 2L\Delta_i \|s[t_i]\|^2 + \gamma\omega^*((1+K)\Delta_i)\Delta_i + 4K^2\Delta_i^2, \quad i = k, k+1, \dots, N(n)-1$$

откуда следует оценка

$$\|s[t_{i+1}]\|^2 \leq e^{2L\Delta_i} \|s[t_i]\|^2 + \Delta_i \varphi(\Delta_i), \quad i = k, k+1, \dots, N(n)-1 \quad (3.5)$$

где

$$\varphi(\Delta) = \gamma\omega^*((1+K)\Delta) + 4K^2\Delta^2, \quad \Delta > 0$$

есть величина, стремящаяся к нулю при $\Delta \rightarrow 0$ и не зависящая от выбора точек $(t_i, x[t_i])$ и $(t_i, z[t_i])$.

Из оценки (3.5) путем последовательной подстановки вместо величины $\|s[t_i]\|^2$ ее оценки сверху получаем оценку

$$\|s[t_i]\|^2 \leq e^{2L(\theta-t_0)} (\|s[t_k]\|^2 + (\theta-t_0)\varphi(\Delta^{(n)})), \quad i = k+1, k+2, \dots, N(n)$$

Поскольку $\|s[t_k]\| = 0$, то получаем

$$\|s[t_i]\|^2 \leq e^{2L(\theta-t_0)} (\theta-t_0)\varphi(\Delta^{(n)}), \quad i = k+1, k+2, \dots, N(n) \quad (3.6)$$

Далее, $d(\Phi(t_i), \Phi(t)) \leq \chi(\Delta_i)$, согласно условию 3°. Выполняется также неравенство

$$\|z[t] - z[t_i]\| \leq (t-t_i)\|\dot{z}\| \leq K\Delta_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

Отсюда следует, что

$$d(z[t], \Phi(t)) \leq \|z[t] - z[t_i]\| + d(z[t_i], \Phi(t_i)) + d(\Phi(t_i), \Phi(t)) \leq K\Delta_i + \varepsilon_i + \chi(\Delta_i)$$

и значит,

$$d(z[t], \Phi(t)) \leq K\Delta^{(n)} + \varepsilon_{N(n)} + \chi(\Delta^{(n)}), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = k, k+1, \dots, N(n)-1 \quad (3.7)$$

Таким образом, для любой точки $z[t]$, $t \in [t_k, \theta]$, верно неравенство (3.7).

Учитывая оценки

$$\|x[t] - x[t_i]\| \leq K\Delta_i \leq K\Delta^{(n)}, \quad \|z[t] - z[t_i]\| \leq K\Delta_i \leq K\Delta^{(n)}$$

при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = k, k+1, \dots, N(n)-1$, а также оценку (3.6), получаем

$$\|x[t] - z[t]\| \leq \|x[t] - x[t_i]\| + \|x[t_i] - z[t_i]\| + \|z[t_i] - z[t]\| \leq 2K\Delta^{(n)} + e^{L(\theta-t_0)} (\theta-t_0)^{1/2} \varphi(\Delta^{(n)})^{1/2}$$

Отсюда в свою очередь находим

$$\begin{aligned} d(x[t], \Phi(t)) &\leq \|x[t] - z[t]\| + d(z[t], \Phi(t)) \leq \\ &\leq 2K\Delta^{(n)} + e^{L(\theta-t_0)} (\theta-t_0)^{1/2} \varphi(\Delta^{(n)})^{1/2} + K\Delta^{(n)} + \varepsilon_{N(n)} + \chi(\Delta^{(n)}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для величины $\varepsilon_{N(n)}$ в правой части неравенства (3.8) имеет место оценка

$$\varepsilon_{N(n)} \leq e^{L(\theta-t_0)} (\theta-t_0)\omega^*((1+K)\Delta^{(n)}) \quad (3.9)$$

Принимая во внимание неравенство (3.9), получаем из (3.8) оценку

$$\begin{aligned} d(x[t], \Phi(t)) &\leq 3K\Delta^{(n)} + e^{L(\theta-t_0)} (\theta-t_0)^{1/2} \varphi(\Delta^{(n)})^{1/2} + \\ &+ e^{L(\theta-t_0)} (\theta-t_0)\omega^*((1+K)\Delta^{(n)}) + \chi(\Delta^{(n)}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Так как функции $\varphi(\Delta)$, $\omega^*((1+K)\Delta)$, $\chi(\Delta)$ удовлетворяют предельным соотношениям

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \varphi(\Delta) = 0, \quad \lim_{\Delta \downarrow 0} \omega^*((1+K)\Delta) = 0, \quad \lim_{\Delta \downarrow 0} \chi(\Delta) = 0,$$

а последовательность разбиений $\{\Gamma_n\}$ отрезка I такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{(n)} = 0$, то правая часть неравенства (3.10) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что справедливо следующее утверждение

Теорема 3.1. Пусть управляемая система (1.1) удовлетворяет условиям 1° и 2°, а множество-ограничение Φ удовлетворяет условию 3°. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_* = n_*(\varepsilon)$, что для всякого $n \geq n_*$ и любой точки $x_* \in \tilde{\Omega}^{(n)}(t_k)$ (t_k — наименьший момент в множестве T_n) найдется допустимое управление $u(t)$, $t \in [t_k, \theta]$, которое порождает решение $x[t]$, $t \in [t_k, \theta]$, системы (1.1), удовлетворяющее неравенству $d(x[t], \Phi(t)) \leq \varepsilon$, $t \in [t_k, \theta]$.

Замечание 1. Построение ε -выживающего решения $x[t]$ возможно при описанном здесь подходе лишь при условии, что известны функции $\varphi(\delta)$, $\omega^*((1+K)\delta)$ и $\chi(\delta)$ переменной $\delta > 0$. При этом условии, зафиксировав $\varepsilon \in (0, \infty)$, найдем такой номер $n_*(\varepsilon)$, что при $n = n_*$ имеют место, например, неравенства

$$\begin{aligned} 3K\Delta^{(n)} &\leq \varepsilon/4, \quad e^{L(\theta-t_0)}(\theta-t_0)^{1/2} \varphi(\Delta^{(n)})^{1/2} \leq \varepsilon/4 \\ e^{L(\theta-t_0)}(\theta-t_0)^{1/2} \omega^*((1+K)\Delta^{(n)}) &\leq \varepsilon/4, \quad \chi(\Delta^{(n)}) \leq \varepsilon/4 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Такой выбор номера $n = n_*$ обеспечивает существование решения $x[t]$ управляемой системы (1.1) ($x[t_k] = x_* \in \tilde{\Omega}^{(n)}(t_k)$), удовлетворяющего неравенству $d(x[t], \Phi(t)) \leq \varepsilon$, $t \in [t_k, \theta]$, т.е. ε -выживающего в Φ .

В силу монотонного убывания диаметров $\Delta^{(n)}$ к нулю при $n \rightarrow \infty$ получаем также, что для всякого $n \geq n_*$ и для любой точки $x_* \in \tilde{\Omega}^{(n)}(t_k)$ также найдется допустимое управление $u(t)$, $t \in [t_k, \theta]$, которое порождает ε -выживающее решение управляемой системы (1.1). Это управление $u(t)$, $t \in [t_k, \theta]$, можно сформировать как кусочно-постоянное управление для системы (1.1) в процедуре управления поводырем, отвечающей разбиению Γ_n .

Замечание 2. При номерах n , которым отвечают диаметры $\Delta^{(n)}$, удовлетворяющие неравенствам (3.11), не только для точек $x_* \in \tilde{\Omega}^{(n)}(t_k)$, но и для всякой точки $x_* \in \tilde{\Omega}^{(n)}(t_i)$, $t_i \in T_n$, найдется допустимое кусочно-постоянное управление $u(t)$, $t \in [t_i, \theta]$, которое порождает ε -выживающее в Φ решение системы (1.1).

Замечание 3. В случае, когда управляемая система (1.1) автономна, т.е. вектор-функция $f(t, x)$ не зависит явно от t , функция $\omega^*(\delta)$ (см. начало разд. 2) примет вид, отличающийся от (2.1) заменой $d(F(t^*, x^*), F(t_*, x_*))$ на $d(F(x^*), F(x_*))$, причем $d(F(x^*), F(x_*)) \leq L\|x^* - x_*\|$.

В этом случае оценка (2.9) изменения множества $F(t, x)$ вдоль решения $x[t]$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, может быть заменена оценкой

$$d(F(x[t]), F(x[t_i])) \leq L\|x[t] - x[t_i]\| \leq LK\Delta_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

Таким образом, в случае, когда управляемая система (1.1) автономна, функцию $\omega^*((1+K)\delta)$, $\delta > 0$, в разд. 2 можно заменить функцией $\omega^*(\delta) = LK\delta$, $\delta > 0$. И если допустить также, что функция $\chi(\delta)$, $\delta > 0$, имеет вид $\chi(\delta) = \alpha\delta^\beta$, $\delta > 0$, где α и β — некоторые положительные постоянные, то тогда оценки (3.11) примут вид

$$\begin{aligned} 3K\Delta^{(n)} &\leq \varepsilon/4, \quad e^{L(\theta-t_0)}(\theta-t_0)^{1/2} (\gamma LK\Delta^{(n)} + 4K^2\Delta^{(n)^2})^{1/2} \leq \varepsilon/4 \\ e^{L(\theta-t_0)}(\theta-t_0)^{1/2} LK\Delta^{(n)} &\leq \varepsilon/4, \quad \alpha\Delta^{(n)\beta} \leq \varepsilon/4 \end{aligned}$$

Тогда число n_* , о котором говорится в теореме 3.1, можно определить как удовлетворяющее одновременно четырем неравенствам

$$\Delta^{(n_*)} \leq \frac{\varepsilon}{12K}, \quad \Delta^{(n_*)} \leq \frac{\varepsilon^2}{16e^{2L(\theta-t_0)}(\gamma LK + 4K^2)}$$

$$\Delta^{(n_*)} \leq \frac{\varepsilon}{4e^{L(\theta-t_0)}(\theta-t_0)^{1/2}LK}, \quad \Delta^{(n_*)} \leq \left(\frac{\varepsilon}{4\alpha}\right)^{1/\beta}$$

Поскольку диаметры $\Delta^{(n)}$ монотонно убывают к нулю при $n \rightarrow \infty$, то для всякого $n \geq n_*$ и любой точки $x_* \in \tilde{\Omega}^{(n)}(t_k)$ найдется допустимое управление $u(t)$, $t \in [t_k, \theta]$, порождающее ε -выживающее решение $x[t]$ управляемой системы (1.1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00146, 96-15-96245).

ЛИТЕРАТУРА

1. Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф. Дифференциальные включения с фазовыми ограничениями. Метод возмущений // Тр. МИРАН. 1995. Т. 211. С. 304–315.
2. Aubin J.-P. Viability Theory. Boston, etc.: Birkhauser, 1991. 543 p.
3. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. Guseinov H.G., Subbotin A.I., Ushakov V.N. Derivatives for multivalued mappings with applications to game-theoretical problems of control // Probl. Contr. and Inform. Theory. 1985. V. 14. № 3. P. 155–167.
6. Никольский М.С. Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина // Мат. сб. 1981. Т. 116. № 1. С. 136–144.
7. Никольский М.С. Об аппроксимации множества достижимости для дифференциального включения // Вестн. МГУ. Сер. 15, Вычисл. математика и кибернетика. 1987. № 4. С. 31–34.
8. Frankowska H., Plaskacz S., Rzezuchowski T. Theoremes de viabilite mesurables et l'equation d'Hamilton–Jacobi–Bellman // C.R. Acad. Sci. Ser. 1. 1992. V. 315. № 2. P. 131–134.
9. Frankowska H., Plaskacz S., Rzezuchowski T. Measurable viability theorems and the Hamilton–Jacobi–Bellman equation // C.R. Acad. Sci. Ser. 1. 1992. V. 315. № 2. P. 131–134.
10. Aubin J.-P., Clarke F. Monotone invariant solutions to differential inclusions // J. London Math. Soc. 1977. V. 16. № 2. P. 357–366.
11. Saint-Pierre P. Viability of boundary of the viability kernel // Different. and Integral Equat. 1991. V. 4. № 6. P. 1147–1153.
12. Saint-Pierre P. Approximation of the viability kernel // Applied Mathematics and Optimiz. 1994. V. 29. № 2. P. 187–209.
13. Quincampoix M. Differential inclusions and target problems // SIAM J. Control and Optim. 1992. V. 30. № 2. P. 324–335.
14. Лотов А.В. Численный метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1974. Т. 15. № 1. С. 67–78.
15. Ушаков В.Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения – уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
16. Ушаков В.Н., Хрипунов А.П. О приближенном построении решений в игровых задачах управления // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 413–421.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
10.IX.1999