

УДК 531.31:62-56

© 2001 г. И.А. Мухаметзянов

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМ С АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫМИ ПРОГРАММНЫМИ СВЯЗЯМИ

Метод построения семейства функций Ляпунова для исследования устойчивости "в малом" невозмущенного движения, заданного в виде закона движения механической системы [1], примененный также для построения обобщенных систем, обладающих асимптотически устойчивым программным движением [2], распространяется на обобщенные системы, обладающие асимптотически устойчивыми программными связями. Приводятся примеры использования предложенной процедуры в задаче стабилизации программного многообразия манипулятора на подвижном основании и для стабилизации программной ориентации преследующего тела.

1. Постановка задачи. Пусть движения системы описываются уравнением

$$A_0(\dot{x}, x, t)\ddot{x} = B_0(\dot{x}, x, t) + M_0(\dot{x}, x, t)u \quad (1.1)$$

где A_0, M_0 – $(n \times n)$ - и $(n \times r)$ -матрицы, x, B_0 – n -мерные, а u – r -мерный векторы.

Система (1.1) является более общей по сравнению с механическими системами, так как в отличие от них матрица A_0 может зависеть от $\dot{x}$, не быть симметрической и определенно-положительной, но должна быть неособенной.

Задача заключается в нахождении выражений вектора $u(x, \dot{x}, t)$, при которых система (1.1) обладает асимптотически устойчивыми в "большом" программными связями

$$\omega_1(x, t) = 0, \quad \omega_2(\dot{x}, x, t) = 0 \quad (1.2)$$

где ω_1, ω_2 – заданные k - и m -мерные вектор-функции, причем $k + m \leq r$. Предполагается, что векторы ω_1, ω_2, B_0 и элементы матриц A_0, M_0 – ограниченные, непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции в некоторой ограниченной области $G(x, \dot{x})$ при $t \geq t_0$, включающей в себя многообразие (1.2) с некоторой его окрестностью.

Кроме того, предполагается, что определители матриц $M_0 M_0^T, (\partial \omega_1 / \partial x)(\partial \omega_1 / \partial x)^T, (\partial \omega_2 / \partial \dot{x})(\partial \omega_2 / \partial \dot{x})^T$, являющиеся определителями Грама, в области G не равняются нулю.

Замечание. Понятие программной связи было введено автором в его докторской диссертации (1972 г.) и заключается в том, что программу движения можно задавать как закон движения или, в более общем виде, как многообразие (1.2), аналогичное уравнениям связей, наложенных на несвободные механические системы. В отличие от несвободных механических систем фазовые состояния управляемой системы могут и не удовлетворять уравнениям (1.2), так как управляемая система, вообще говоря, является свободной системой, а условия (1.2) указывают лишь на то, что многообразие (1.2) должно быть интегральным для уравнений движения системы. А для достижения этой цели активные управляющие силы, действующие на систему, выбираются так, чтобы при начальных состояниях системы, удовлетворяющих (1.2), построенная система вела себя точно так же, как несвободная система, на которую наложены связи вида (1.2). В этом заключается основная особенность управляемых систем и их сходство с несвободными механическими системами.

Заметим, что программа, заданная в виде закона движения, является частным случаем (1.2) при $k = n$.

Ниже в качестве меры отклонения движений (1.1) от многообразия (1.2) будут приниматься величины $|\omega_1|$ и $|\omega_2|$.

2. Построение системы с непрерывным управлением. Дифференцируя по времени t в силу уравнения (1.1) первое уравнение (1.2) два раза, а второе – один раз, получим

$$\ddot{\omega}_1 = B_1(\dot{x}, x, t) + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)^T M(\dot{x}, x, t) u \quad (2.1)$$

$$\dot{\omega}_2 = K_1(\dot{x}, x, t) + \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{x}} \right)^T M(\dot{x}, x, t) u$$

Здесь

$$B_1 = \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)^T A_0^{-1} B_0 + \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)^T \right] \dot{x} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)$$

$$K_1 = \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{x}} \right)^T A_0^{-1} B_0 + \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x} \right)^T \dot{x} + \frac{d\omega_2}{dx}; \quad M = A_0^{-1} M_0$$

Умножая (2.1) на симметрические определенно-положительные $(k \times k)$ - и $(m \times m)$ -матрицы $A(x, t)$, $N(x, t)$ с ограниченными, непрерывными и непрерывно дифференцируемыми элементами в области G , получим

$$A(x, t) \ddot{\omega}_1 = B(\dot{x}, x, t) + Q_1; \quad B = AB_1, \quad Q_1 = A(\partial \omega_1 / \partial x)^T M u \quad (2.2)$$

$$N(x, t) \dot{\omega}_2 = K(\dot{x}, x, t) + Q_2; \quad K = NK_1, \quad Q_2 = N(\partial \omega_2 / \partial \dot{x})^T M u$$

В первом уравнении (2.2) вместо $\dot{\omega}_1$ введем замену

$$y = \dot{\omega}_2 - f(\omega_1, t), \quad f(0, t) = 0 \quad (2.3)$$

где $f(\omega_1, t)$ – произвольная k -мерная вектор-функция с ограниченными и дифференцируемыми элементами, допускающими бесконечно малый высший предел.

Умножая первое уравнение (2.2) скалярно на вектор y , а второе на вектор ω_2 , затем складывая, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\omega_2^T N \omega_2 + y^T A y) = y^T \left\{ Q_1 + B + A \left(\frac{\partial f}{\partial \omega_1} \right)^T y - A \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \omega_1} \right)^T f + \frac{\partial f}{\partial t} \right] + \frac{1}{2} \frac{dA}{dt} y \right\} + \\ + \omega_2^T \left(Q_2 + K + \frac{1}{2} \frac{dN}{dt} \omega_2 \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если векторы Q_1 и Q_2 выбрать в виде

$$Q_1 = -Dy - F_1 \omega_1 - B - A \left(\frac{\partial f}{\partial \omega_1} \right)^T y + A \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \omega_1} \right)^T f + \frac{\partial f}{\partial t} \right] - \frac{1}{2} \frac{dA}{dt} y \quad (2.5)$$

$$Q_2 = -K - \frac{1}{2} \frac{dN}{dt} \omega_2 - F_2 \omega_2$$

то получим

$$\frac{1}{2} \frac{dV}{dt} = -y^T D y + \left(f^T F_1 + \omega_1^T \frac{\dot{F}_1}{2} \right) \omega_1 - \omega_2^T F_2 \omega_2 \quad (2.6)$$

где D, F_1, F_2 – симметрические определенно-положительные матрицы, $V = \omega_2^T N \omega_2 + y^T A y + \omega_1^T F_1 \omega_1$ – функция Ляпунова, построенная определенно-положительной при всех y, ω_1, ω_2, t в области G , допускающая бесконечно малый высший предел. Следовательно, в случае определенной отрицательности функции $(f^T F_1 + \omega_1^T \dot{F}_1 / 2) \omega_1$ правая часть равенства (2.6) будет определенно-отрицательной по y, ω_1, ω_2 и при этом программное многообразие (1.2) будет асимптотически устойчивым в области G . В частности, при $f = -\omega_1$ векторы (2.5) имеют вид

$$Q_1 = -Dy - F_1 \omega_1 - B - A \dot{\omega}_1 - \frac{1}{2} \frac{dA}{dt} y$$

$$Q_2 = -F_2 \omega_2 - K - \frac{1}{2} \frac{dN}{dt} \omega_2$$

Здесь $dA/dt, dN/dt$ предполагаются ограниченными в G , так же как df/dt .

Заметим, что Q_1 и Q_2 выражаются через вектор u равенствами, приведенными в (2.2), которые можно представить одним $(k + m)$ -мерным векторным уравнением

$$\Omega u = Q; \quad \Omega = \begin{bmatrix} A(\partial \omega_1 / \partial x)^T A_0^{-1} M_0 \\ N(\partial \omega_2 / \partial \dot{x})^T A_0^{-1} M_0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Ω – $((k + m) \times r)$ -мерная матрица, Q – $(k + m)$ -мерный вектор.

Решение уравнения (2.7) можно представить в виде суммы двух составляющих [3]: $u_n = \Omega^T \lambda$ и u_τ , причем u_τ удовлетворяет уравнению $\Omega u_\tau = 0$, где λ – $(k + m)$ -мерный вектор, определяемый из уравнения $\Omega u_n = Q$, в виде [3]

$$\lambda = (\Omega \Omega^T)^{-1} Q$$

Следовательно, составляющая u_n вектора u определяется в виде

$$u_n = \Omega^T (\Omega \Omega^T)^{-1} Q \quad (2.8)$$

Если составляющую u_τ вектора u положить равной нулю, то вектор u будет иметь вид (2.8) и иметь минимальную евклидову норму [3]. При этом по аналогии с несвободными механическими системами связи (1.2) можно назвать идеальными.

3. Оценка качества переходного процесса. Интегрируя обе части равенства (2.6) по времени, получим

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[\omega_2^T F_2 \omega_2 + y^T D y - \left(f^T F_1 + \omega_1^T \frac{\dot{F}_1}{2} \right) \omega_1 \right] dt = \frac{1}{2} V_0, \quad V_0 = V(t_0) \quad (3.1)$$

Это равенство является интегральным критерием качества переходного процесса. Имея свободу выбора матриц D, F_1, F_2, N, A и функции f , подынтегральному выражению и функции Ляпунова можно придать нужную структуру с необходимыми весовыми элементами.

При задании конкретного числового значения V_0 уравнение

$$\frac{1}{2} (\omega_{20}^T N \omega_{20} + y_0^T A y_0 + \omega_{10}^T F_1 \omega_{10}) = V_0 \quad (3.2)$$

в $(2k + m)$ -мерном пространстве $\dot{\omega}_{10}, \omega_{10}, \omega_{20}$ описывает эллипсоид, поверхность

которого является геометрическим местом точек, обладающих следующим свойством. Для начавшихся из них движений имеет место интегральный критерий качества переходного процесса (3.1), а для всех начальных значений $\dot{\omega}_{10}$, ω_{10} , ω_{20} внутри эллипсоида (3.2) справедлива оценка качества переходного процесса

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[\omega_2^T F_2 \omega_2 + y^T D y - \left(f^T F_1 + \omega_1^T \frac{\dot{F}_1}{2} \right) \omega_1 \right] dt < \frac{1}{2} V_0$$

4. Построение системы с релейным управлением. Пусть система (2.2) в области G удовлетворяет условиям

$$Q_i^{(1)} > |G_i^{(1)}|, \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad Q_j^{(2)} > |G_j^{(2)}|, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

где $G_i^{(1)}$, $G_j^{(2)}$ – соответственно элементы векторов

$$G^{(1)} = B + A \left(\frac{\partial f}{\partial \omega_1} \right)^T y - A \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \omega_1} \right)^T f + \frac{\partial f}{\partial t} \right] + \frac{1}{2} \frac{dA}{dt} y$$

$$G^{(2)} = K + \frac{1}{2} \frac{dN}{dt} \omega_2$$

входящих в выражение (2.4); $Q_i^{(1)}$, $Q_j^{(2)}$ – модули элементов векторов Q_1 и Q_2 при релейном управлении.

Тогда из (2.4) следует возможность релейного управления

$$Q_{1i} = -Q_i^{(1)} \operatorname{sign} y_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4.1)$$

$$Q_{2j} = -Q_j^{(2)} \operatorname{sign} \omega_{2j}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

При этом функция $V_1 = \omega_2^T N \omega_2 + y^T A y$ и вместе с ней векторы ω_2 , y обращаются в нуль за конечный промежуток времени [4]. Это означает, что за этот промежуток времени фазовое состояние системы приводится на многообразие

$$\dot{\omega}_1 - f(\omega_1, t) = 0, \quad \omega_2 = 0 \quad (4.2)$$

Если функцию $f(\omega_1, t)$ выбрать так, чтобы решение $\dot{\omega}_1 = 0$ первого уравнения (4.2) было экспоненциально устойчивым в G , то фазовое состояние системы (2.1) со временем будет стягиваться к программному многообразию (1.2).

Теперь остается выразить вектор u через значения (4.1). Для этого векторы Q_1 и Q_2 , входящие в уравнение (2.7), должны быть заменены на векторы Q'_1 , Q'_2 с элементами

$$Q'_{1i} = -Q_i^{(1)} \operatorname{sign} y_i, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$Q'_{2j} = -Q_j^{(2)} \operatorname{sign} \omega_{2j}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

соответственно.

При этом уравнение (2.7) примет вид

$$\Omega u = Q'; \quad \begin{pmatrix} Q'_1 \\ Q'_2 \end{pmatrix}$$

а искомое управление (2.8), имеющее минимальную евклидову норму, выразится в виде

$$u = \Omega^T (\Omega \Omega^T)^{-1} Q'$$

Заметим, что выражение составляющей u_τ управления u можно найти в [5] в виде $u_\tau = [E - \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}\Omega]W$, где E – единичная матрица, W – произвольная вектор-функция.

5. Примеры. Стабилизация программного многообразия манипулятора на подвижном основании. Рассмотрим манипулятор, состоящий из n прямолинейных звеньев T_v ($v = 1, 2, \dots, n$), расположенный на подвижном основании [6]. Каждое звено T_v вращается относительно предыдущего звена T_{v-1} вокруг цилиндрического шарнира O_{v-1} . В точку O_n последнего звена T_n поместим центр схвата, а плоскость схвата зададим плоскостью единичных векторов e_p и k_p .

Будем считать, что вращение звена T_v вокруг шарнира O_{v-1} осуществляется электрическим двигателем, помещенным со своим редуктором в этой точке. Первое звено манипулятора связано с точкой O основания манипулятора. Положение тела – основания манипулятора относительно неподвижной системы координат $o\varphi\eta\zeta$ определяется законом движения $r_0(t)$ точки O и тремя углами Эйлера.

В программу движения схвата заложим два требования: движение центра схвата относительно основания должно подчиняться заданному закону

$$O_0O_n = L(t); \quad L(t) = L_1(t) - r_0(t) \quad (5.1)$$

$L_1(t)$, $r_0(t)$ – заданные функции, а плоскость схвата должна быть ортогональна заданному вектору e_0 , т.е.

$$e_p^T e_0 = 0, \quad k_p^T e_0 = 0 \quad (5.2)$$

Если вектор O_0O_n выразить через векторы $l_v = O_{v-1}O_v$, то условие (5.1) примет вид

$$\sum_{v=1}^n l_v - L(t) = 0 \quad (5.3)$$

Движения манипулятора зададим уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q(p) - C\dot{x} + M_0 u \quad (5.4)$$

где x – n -мерный вектор обобщенных координат – углов поворотов φ_v ($v = 1, \dots, n$) его звеньев, u – n -мерный вектор управляющих сигналов, $Q(p)$ – вектор обобщенных сил тяжести, T – кинетическая энергия манипулятора

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}^T A_0(x, t) \dot{x} + b^T(x, t) \dot{x} + b_0(x, t)$$

$$C = \text{diag}(c_1 k_1^2, c_2 k_2^2, \dots, c_n k_n^2); \quad M_0 = \text{diag}(a_1 k_1, a_2 k_2, \dots, a_n k_n)$$

c_v – коэффициенты сопротивления на валу двигателей, k_v – передаточные числа редукторов, a_v – коэффициенты пропорциональности между управляющими моментами двигателей и управляющими сигналами u_v .

Уравнение (5.4) можно представить в виде (1.1)

$$A_0(x, t) \ddot{x} = B_0(\dot{x}, x, t) + M_0 u \quad (5.5)$$

где

$$B_0 = \frac{1}{2} \dot{x}^T \frac{\partial A_0}{\partial x} \dot{x} + \left(-\frac{dA_0}{dt} + \frac{\partial b}{\partial x} - C \right) \dot{x} - \frac{db}{dt} + \frac{\partial b_0}{\partial x} + Q(p)$$

Исходя из требований (5.3) и (5.2), программное многообразие (1.2) представим в виде 5-мерного вектора

$$\omega(x, t) = 0 \quad (5.6)$$

с элементами

$$\omega_i = \mathbf{k}_i^T \left[\sum_{v=1}^n l_v \mathbf{e}_v - \mathbf{L}(t) \right], \quad i = 1, 2, 3; \quad \omega_4 = \mathbf{e}_p^T \mathbf{e}_0, \quad \omega_5 = \mathbf{k}_p^T \mathbf{e}_0 \quad (5.7)$$

где $\mathbf{k}_i$ – орты осей системы координат $O\Phi\eta\zeta$; $\mathbf{e}_v$ – орты векторов $\mathbf{l}_v$.

Дифференцируя равенства (5.7) два раза по t с использованием формул Пуассона

$$\dot{\mathbf{e}}_v = \left(\boldsymbol{\omega}_0 + \sum_{\eta=1}^v \boldsymbol{\omega}'_{\eta} \right) \times \mathbf{e}_v, \quad \dot{\mathbf{e}}_p = \left(\boldsymbol{\omega}_0 + \sum_{\eta=1}^n \boldsymbol{\omega}'_{\eta} \right) \times \mathbf{e}_p$$

$$\dot{\mathbf{k}}_p = \left(\boldsymbol{\omega}_0 + \sum_{\eta=1}^n \boldsymbol{\omega}'_{\eta} \right) \times \mathbf{k}_p$$

где $\boldsymbol{\omega}'_{\eta} = \dot{x}_{\eta} \mathbf{j}_{\eta}$, $\mathbf{j}_{\eta}$ – орты векторов $\boldsymbol{\omega}'_{\eta}$, получим уравнение (2.1) в виде [6]

$$\ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{B}_0 + \dot{\mathbf{A}}_1^T \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{c}}_0 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{M} \mathbf{u} \quad (5.8)$$

Здесь $\mathbf{A}_1$ – $(n \times 5)$ -мерная матрица с элементами

$$a_{iv} = \left(\mathbf{j}_v \times \sum_{\eta=1}^n \mathbf{l}_{\eta} \right)^T \mathbf{k}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$a_{4v} = (\mathbf{j}_v \times \mathbf{e}_p)^T \mathbf{e}_0, \quad a_{5v} = (\mathbf{j}_v \times \mathbf{k}_p)^T \mathbf{e}_0$$

$\mathbf{c}_0$ – вектор с элементами

$$c_i^0 = \left[\dot{\mathbf{L}}(t) - \sum_{v=1}^n (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{l}_v) \right]^T \mathbf{k}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$c_4^0 = -(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{e}_p)^T \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_p^T \dot{\mathbf{e}}_0, \quad c_5^0 = -(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{k}_p)^T \mathbf{e}_0 - \mathbf{k}_p^T \dot{\mathbf{e}}_0$$

$\boldsymbol{\omega}_0$ – угловая скорость основания.

Умножая равенство (5.8) на симметрическую определенно-положительную (5×5) -матрицу $\mathbf{A}(x, t)$, получим

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{B}(\dot{\mathbf{x}}, x, t) + \mathbf{Q} \quad (5.9)$$

где

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0 + \dot{\mathbf{A}}_1^T \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{c}}_0), \quad \mathbf{Q} = \mathbf{A} \mathbf{A}_1^T \mathbf{M} \mathbf{u}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{M}_0$$

Уравнение (5.9) является первым из уравнений (2.2).

Следовательно, уравнение (2.7) для определения вектора $\mathbf{u}$ имеет вид

$$\mathbf{A} \mathbf{A}_1^T \mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{Q} \quad (5.10)$$

где

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{D} \mathbf{y} - \mathbf{F} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{B} - \mathbf{A} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right)^T \mathbf{y} + \mathbf{A} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right)^T \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right]^T \mathbf{y} \right] - \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y} = \dot{\mathbf{w}} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\omega}, t)$$

D, F – произвольные симметрические определенно-положительные матрицы; $f(\omega, t)$ – произвольная вектор-функция с ограниченными и дифференцируемыми элементами, выбираемая так, чтобы функция $(f^T F + \omega^T \dot{F} / 2)\omega$ была определенно-отрицательной.

Решение уравнения (5.10) можно представить в виде (2.8)

$$u = \Omega^T (\Omega \Omega^T)^{-1} Q; \quad \Omega = A A_1^T M$$

При этом евклидова норма вектора управления u будет минимальной.

При необходимости можно построить релейное управление системой по алгоритму, приведенному в разд. 4.

Заметим, что показатель качества переходного процесса (3.1) в данном случае имеет вид

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[y^T D y - \left(f^T + \omega^T \frac{\dot{F}}{2} \omega \right) \right] dt = \frac{1}{2} V_0, \quad V_0 = V(t_0)$$

Стабилизация программной ориентации преследующего тела. Рассмотрим твердое тело, жестко связанное с подвижной системой координат $sxuz$. Главный вектор управляющих сил $\tilde{u}_2$ построим так, чтобы центр масс тела s двигался по кривой погони за преследуемой точкой o при ее движении по произвольному закону $r_0(t)$ относительно инерциальной системы координат $o_1x_1y_1z_1$ [7]. При этом вектор управляющих моментов $\tilde{u}_1$ должен быть таким, чтобы одна ось тела, например sz , асимптотически стремилась занять направление so . Следовательно, программная ориентация тела в этом случае может быть задана выражениями

$$\omega_1^i = k_i \cdot (r_0 - r) = 0, \quad \omega_2^i = k_i \cdot v = 0, \quad i = 1, 2 \quad (5.11)$$

где k_1, k_2 – орты осей sx и sy ; $(\cdot)$ – знак скалярного произведения; r – радиус-вектор, v – вектор абсолютной скорости центра масс тела.

Известно, что движение центра масс в инерциальной системе координат $o_1x_1y_1z_1$ и вращательное движение тела вокруг центра масс в осях подвижной системы координат $sxuz$ описываются уравнениями

$$I \dot{\omega} = (I \omega \times \omega) + M_* + \tilde{u}_1 \quad (5.12)$$

$$m \dot{v} = f + \tilde{u}_2$$

где I – тензор инерции тела в точке s , $\omega(p, q, r)$ – мгновенная угловая скорость тела, p, q, r – проекции ω на оси sx, sy, sz , m – масса тела, M_* – момент заданных сил относительно центра масс s , f – главный вектор заданных сил, $\tilde{u}_1$ – главный момент управляющих сил относительно s , $\tilde{u}_2$ – главный вектор управляющих сил.

Уравнения (5.12) представим в виде

$$\dot{\omega} = I^{-1} [(I \omega \times \omega) + M_*] + u_1; \quad \dot{v} = f / m + u_2 \quad (5.13)$$

$$u_1 = I^{-1} \tilde{u}_1, \quad u_2 = \tilde{u}_2 / m$$

Теперь задачу можно сформулировать следующим образом: построить аналитические выражения векторов u_1, u_2 так, чтобы многообразие (5.11) было устойчивым программным многообразием системы (5.13).

Решение задачи заключается в следующем.

Дифференцируя по времени выражения (5.11) в силу уравнений (5.13), получим

$$\frac{d^2\omega_1^i}{dt^2} = B_1^i + \tilde{Q}_1^i, \quad \frac{d\omega_2^i}{dt} = K_1^i + \tilde{Q}_2^i, \quad i = 1, 2 \quad (5.14)$$

где

$$B_1^i = c_i^T I^{-1} [(I\omega \times \omega) + M_*] - k_i^T \frac{1}{m} \mathbf{f} + (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})^T [\omega \times (\omega \times \mathbf{k}_i)] + (\dot{\mathbf{r}}_0 - \mathbf{v})^T (\omega \times \mathbf{k}_i) + \ddot{\mathbf{r}}_0^T \mathbf{k}_i$$

$$K_1^i = \mathbf{k}_i^T \frac{1}{m} \mathbf{f} + \mathbf{v}^T (\omega \times \mathbf{k}_i)$$

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{k}_i \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})$$

$$\tilde{Q}_1^i = \mathbf{c}_i^T \mathbf{u}_1 - \mathbf{k}_i^T \mathbf{u}_2, \quad \tilde{Q}_2^i = \mathbf{k}_i^T \mathbf{u}_2$$

$\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{k}_i$, $\mathbf{c}_i$, ω , M_* , $\mathbf{f}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ – векторы-столбцы.

Систему уравнений (5.14) можно представить в векторной форме

$$\ddot{\omega}_1 = B_1 + \tilde{Q}_1, \quad \dot{\omega}_2 = K_1 + \tilde{Q}_2 \quad (5.16)$$

где

$$\omega_i = \begin{Bmatrix} \omega_i^1 \\ \omega_i^2 \end{Bmatrix}, \quad B_1 = \begin{Bmatrix} B_1^1 \\ B_1^2 \end{Bmatrix}, \quad \tilde{Q}_1 = \begin{Bmatrix} \tilde{Q}_1^1 \\ \tilde{Q}_1^2 \end{Bmatrix}$$

Умножая уравнения (5.16) на знакоопределенные симметрические матрицы A и N , получим

$$A\ddot{\omega}_1 = B + Q_1, \quad N\dot{\omega}_2 = K + Q_2 \quad (5.17)$$

где

$$B = AB_1, \quad K = NK_1, \quad Q_1 = A\tilde{Q}_1, \quad Q_2 = N\tilde{Q}_2 \quad (5.18)$$

Выражения (5.15), содержащие искомые векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$, при учете обозначений (5.18) можно представить в виде

$$\Omega_1 \mathbf{u} = A^{-1} Q_1, \quad \Omega_2 \mathbf{u} = N^{-1} Q_2 \quad (5.19)$$

где

$$\Omega_1 = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & -k_{11} & -k_{12} & -k_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & -k_{21} & -k_{22} & -k_{23} \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

$$\Omega_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & 0 & 0 & k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{Bmatrix}$$

c_{11} , c_{12} , c_{13} – элементы векторов $\mathbf{c}_i$; k_{11} , k_{12} , k_{13} – элементы векторов $\mathbf{k}_i$.

В уравнении (5.17) вместо $\dot{\omega}_1$ введем замену

$$y = \dot{\omega}_1 - f(\omega_1, t), \quad f(0, t) = 0 \quad (5.21)$$

где $f(\omega_1, t)$ – произвольная двумерная вектор-функция с ограниченными и дифференцируемыми элементами, допускающими бесконечно малый высший предел.

Умножая первое уравнение (5.17) скалярно на вектор y , а второе на вектор ω_2 , затем складывая, получим уравнение (2.4).

Если векторы Q_1 и Q_2 выбрать в виде (2.5), то получим уравнение (2.6).

Заметим, что Q_1 и Q_2 выражаются через 6-мерный вектор и равенствами (5.19), которые можно представить одним 4-мерным векторным уравнением вида (2.8), где Ω – (4×6) -матрица вида

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} A^{-1} Q_1 \\ N^{-1} Q_2 \end{bmatrix}$$

Ω_1, Ω_2 – матрицы (5.20).

Автор благодарит В.В. Румянцева за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01193).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухаметзянов И.А. Построение одного семейства функций Ляпунова // Вестн. РУДН. Сер. Прикл. математика и информатика. 1995. № 1. С. 9–12.
2. Мухаметзянов И.А. О применениях семейства функций Ляпунова // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 869–880.
3. Мухаметзянов И.А. Построение уравнений программных движений // Автоматика и телемеханика. 1972. № 10. С. 16–23.
4. Пятницкий Е.С. Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 300–303.
5. Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Уравнения программных движений. М.: Изд-во Российского университета дружбы народов, 1986. 88 с.
6. Мухаметзянов И.А., Булатская Т.Ф., Вишняков А.Ф. Управление программным движением инерционного манипулятора // Дифференциальные уравнения и обратные задачи динамики. М.: Изд-во Российского университета дружбы народов, 1983. С. 49–56.
7. Мухаметзянов И.А. Управление преследующим телом // Автоматика и телемеханика. 1974. № 11. С. 5–12.

Москва

Поступила в редакцию
5.V.2000