

УДК 531.36; 62-50

© 2001 г. И.М. Ананьевский

ОГРАНИЧЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕОНОМНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассматривается реономная механическая система, кинетическая энергия которой представляется в виде полного квадратичного полинома с коэффициентами, явным образом зависящими от времени. Предполагается, что коэффициенты этого полинома неизвестны и на систему действуют неконтролируемые ограниченные возмущения. Предложен закон управления, позволяющий приводить систему в заданное терминальное состояние за конечное время с помощью ограниченной по модулю силы. В предлагаемом алгоритме используются кусочно-линейные обратные связи, коэффициенты усиления которых увеличиваются по мере приближения системы к терминальному состоянию. Алгоритм обоснован с помощью второго метода Ляпунова. Приведены результаты численного моделирования.

В большинстве публикаций, посвященных построению управления для механических систем с неизвестными параметрами, либо предлагаются алгоритмы, которые обеспечивают лишь асимптотическую устойчивость движения системы, т.е. приводят систему в заданное состояние за бесконечное время [1, 2], либо на управления не накладывается никаких ограничений. На практике такие ограничения, как правило, присутствуют.

Для склерономных механических систем был предложен [3, 4] основанный на декомпозиции подход, позволяющий с помощью ограниченной силы приводить в заданное состояние за конечное время подверженную неконтролируемым возмущениям систему, матрица инерции которой известна. Другие подходы, предполагающие использование программных траекторий [5, 6] и линейных обратных связей с кусочно-постоянными коэффициентами [7, 8], развиты для управления лагранжевой системой с неизвестной матрицей кинетической энергии.

1. Постановка задачи. Рассматривается реономная механическая система, кинетическая энергия которой представляется в виде полного квадратичного полинома с коэффициентами, явным образом зависящими от времени

$$T(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle A(t, q) \dot{q}, \dot{q} \rangle + \langle a(t, q), \dot{q} \rangle + a_0(t, q) \quad (1.1)$$

Здесь $q \in R^n$ – вектор обобщенных координат системы, $\dot{q}$ – вектор обобщенных скоростей, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение. Предполагается, что положительно-определенная симметрическая матрица $A(t, q) \in C^1$ неизвестна, ее собственные числа при любых t, q принадлежат отрезку $[m, M]$, $0 < m \leq M$, а частные производные равномерно ограничены по норме, т.е.

$$mz^2 \leq \langle A(t, q)z, z \rangle \leq Mz^2, \quad \forall z \in R^n \quad (1.2)$$

$$\left\| \frac{\partial A}{\partial q_i} \right\| \leq D_1, \quad \left\| \frac{\partial A}{\partial t} \right\| \leq D_2, \quad i = 1, \dots, n, \quad D_1, D_2 > 0$$

Вектор-функция $a(t, q) \in C^1$ и функции $a_0(t, q) \in C^1$ также считаются неизвестными и удовлетворяющими условиям

$$\left\| \left(\frac{\partial a}{\partial q} \right)^T - \frac{\partial a}{\partial q} \right\| \leq D_3, \quad \left| \frac{\partial a_0}{\partial q} - \frac{\partial a}{\partial t} \right| \leq D_4, \quad D_3, D_4 > 0 \quad (1.3)$$

Выше и всюду в дальнейшем $|\cdot|$ – евклидова норма вектора, $\|\cdot\|$ – норма матрицы, понимаемая как норма соответствующего оператора в евклидовом пространстве.

Динамика рассматриваемой системы описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = S + u \quad (1.4)$$

Предполагается, что система управляется непосредственно по каждой степени свободы и на n -мерный вектор управляющих сил u наложено ограничение

$$|u| \leq U, \quad U > 0 \quad (1.5)$$

а обобщенные силы S неизвестны и удовлетворяют условию

$$|S| \leq S_0, \quad S_0 > 0 \quad (1.6)$$

Наряду с неизвестными силами S и управляющими силами u на систему могут действовать другие известные силы. Будем считать, что ресурсы управления достаточно велики, чтобы компенсировать эти силы, а величина U – это максимальная возможная интенсивность управления, оставшегося после такой компенсации.

Задача. Пусть даны постоянные m , M , U и D_j ($j = 1, \dots, 4$). Требуется построить управление, подчиняющееся ограничению (1.5), и указать область допустимых начальных состояний, из которой система (1.4) придет под действием этого управления в заданное терминальное состояние покоя $(\bar{q}, 0)$ за конечное время, каковы бы ни были матрица A , вектор a , функция a_0 и возмущения S , удовлетворяющие условиям (1.2), (1.3) и (1.6). При этом фазовые переменные q , $\dot{q}$ считаются доступными измерению в каждый момент времени.

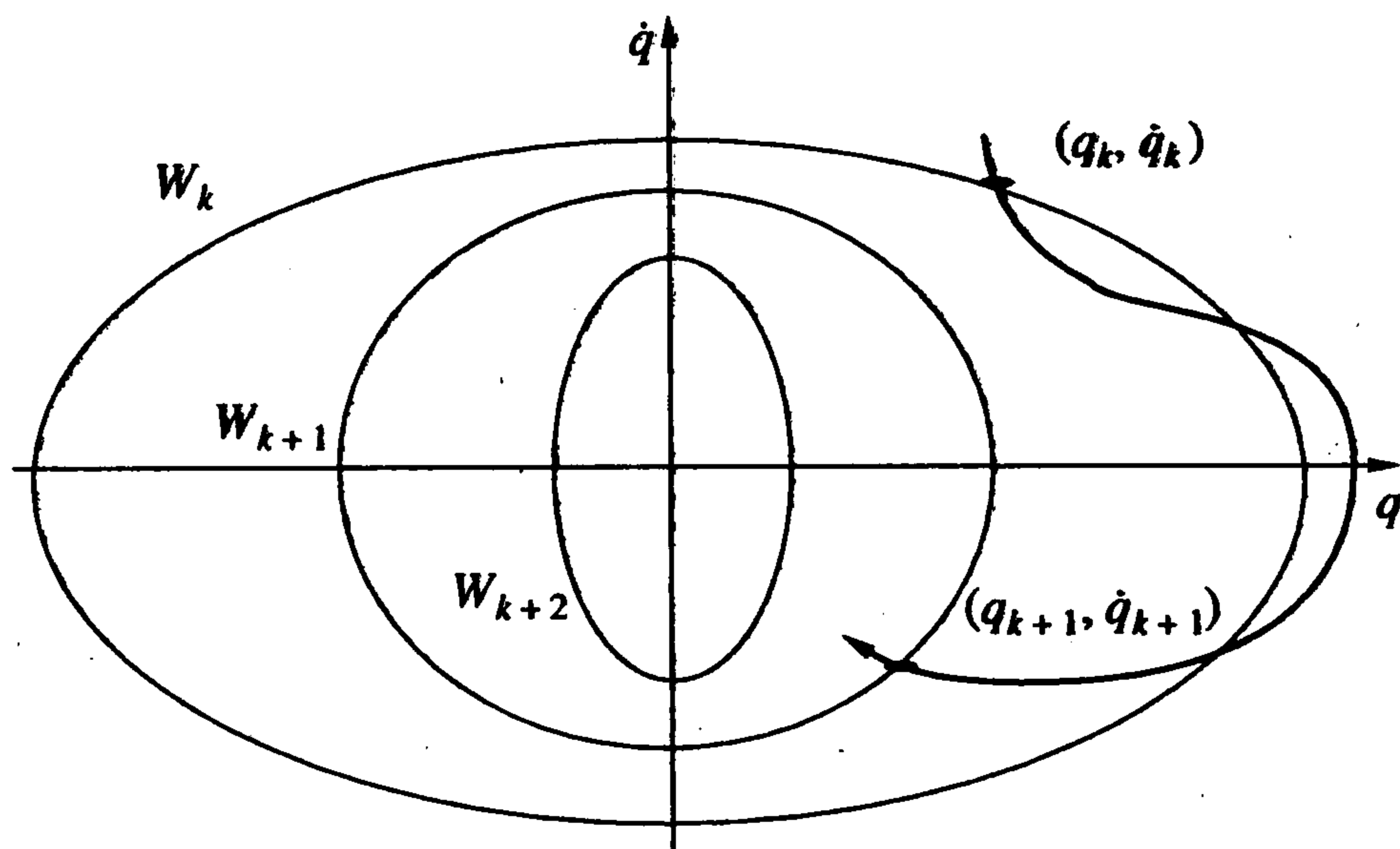
Для склерономной механической системы, т.е. для системы, кинетическая энергия которой не зависит явным образом от времени и имеет вид $T(q, \dot{q}) = \langle A(q)\dot{q}, \dot{q} \rangle / 2$, на основе методов теории устойчивости движения разработан [7, 8] алгоритм управления, позволяющий приводить систему (1.4) из произвольного начального состояния в заданное терминальное состояние покоя за конечное время. В алгоритме используются линейные обратные связи с кусочно-постоянными коэффициентами. Коэффициенты возрастают и стремятся к бесконечности по мере приближения траектории системы к терминальному состоянию, однако управляющие силы остаются ограниченными и удовлетворяют наложенным на них условиям. Ниже этот подход распространяется на реономные механические системы.

2. Описание алгоритма. Не ограничивая общности, будем считать, что терминальное состояние совпадает с началом координат, т.е. $\bar{q} = 0$ (этого можно добиться с помощью соответствующей замены переменных).

Построим управление в форме линейной обратной связи по обобщенным координатам и скоростям

$$u = -\alpha_k \dot{q} - \beta_k q, \quad \alpha_k, \beta_k > 0 \quad (2.1)$$

с коэффициентами усиления в виде кусочно-постоянных функций. Опишем алгоритм изменения этих коэффициентов.



Фиг. 1

Обозначим через $q_0 = q(0)$, $\dot{q}_0 = \dot{q}(0)$ начальное состояние системы и введем в рассмотрение функцию

$$W(q, \dot{q}) = M\dot{q}^2 + (M^2\dot{q}^4 + U^2q^2)^{1/2} \quad (2.2)$$

Величина $W(q, \dot{q})$ имеет размерность энергии и характеризует удаленность точки $(q, \dot{q})$ от терминального положения $(0,0)$: множество уровня $W(q, \dot{q}) = C$ функции W в фазовом пространстве $q, \dot{q} \in R^{2n}$ представляет собой эллипсоид $2CM\dot{q}^2 + U^2q^2 = C^2$, который сжимается к началу координат $(0, 0)$ при $C \rightarrow 0$.

Положим

$$W_0 = W(q_0, \dot{q}_0), \quad W_k = \frac{W_0}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Множества уровня функции $W(q, \dot{q})$, отвечающие постоянным W_k , представляют собой семейство эллипсоидов, стягивающихся к нулю с ростом k . Обозначим через t_1 момент времени, когда траектория системы впервые попадет на эллипсоид $W(q, \dot{q}) = W_1$, и положим $q_1 = q(t_1)$, $\dot{q}_1 = \dot{q}(t_1)$. Ниже будет показано, что при выбранном алгоритме управления траектория системы стремится к началу координат, поэтому такой момент времени существует. Обозначим через t_2 момент времени, когда траектория системы впервые попадает на эллипсоид $W(q, \dot{q}) = W_2$. Положим $q_2 = q(t_2)$, $\dot{q}_2 = \dot{q}(t_2)$ и т.д.

Последовательность $\{t_k\}$ определяет моменты изменения коэффициентов α_k, β_k в управлении (2.1). Зададим значения этих коэффициентов на полуинтервале времени $[t_k, t_{k+1})$ ($k = 0, 1, \dots$) следующим образом:

$$\beta_k = \frac{U^2}{2W_k}, \quad \alpha_k^2 = m\beta_k \quad (2.4)$$

В фазовом пространстве R^{2n} траектория движения рассматриваемой механической системы состоит из отрезков траекторий различных систем дифференциальных уравнений: k -й отрезок соединяет точки $(q_k, \dot{q}_k)$ и $(q_{k+1}, \dot{q}_{k+1})$ и отвечает системе вида (1.4), (2.1), в которой коэффициенты усиления α_k, β_k постоянны и определяются формулами (2.4). Все точки $(q_k, \dot{q}_k)$ лежат на соответствующих эллипсоидах $W(q, \dot{q}) = W_k$ ($k = 0, 1, \dots$) (фиг. 1).

Заметим, что функция W , вообще говоря, не является монотонно убывающей вдоль траектории системы, несмотря на то что траектория стремится к началу координат $(0, 0)$. Поэтому траектория может иметь более одной точки пересечения с некоторыми эллипсоидами. Предположим, например, что после назначения новых

коэффициентов в момент времени t_k траектория системы стала "удаляться" от начала координат $(0, 0)$ и в момент $t' > t_k$ вновь пересекла эллипсоид $W(q, \dot{q}) = W_{k-1}$. В момент времени t' индекс k и коэффициенты α_k, β_k не изменятся. Они примут новые значения лишь тогда, когда траектория достигнет эллипсоида $W(q, \dot{q}) = W_{k+1}$.

Таким образом, для реализации алгоритма достаточно измерять текущие значения фазовых переменных системы $q, \dot{q}$ и хранить в памяти текущее значение индекса k , равное номеру минимального эллипсоида, на котором уже побывала траектория системы. Так как в выражение (2.2) для функции W помимо фазовых переменных входят только известные параметры задачи, то значение функции $W(q(t), \dot{q}(t))$ может быть вычислено в любой момент времени. Каждый раз, когда значение W уменьшается вдвое, индекс k возрастает на единицу, коэффициент α увеличивается в $\sqrt{2}$ раз, а коэффициент β – в 2 раза.

3. Обоснование алгоритма. Для обоснования алгоритма используется второй метод Ляпунова. Рассмотрим k -й отрезок траектории при некотором фиксированном $k \geq 0$. Этот отрезок начинается в точке $(q_k, \dot{q}_k)$ в момент времени t_k и отвечает системе (1.4), (2.1) с постоянными коэффициентами обратной связи, задаваемыми формулами (2.4). Покажем, что существует такой момент времени t_{k+1} , когда траектория системы попадает на эллипсоид $W(q, \dot{q}) = W_{k+1}$.

Функция Ляпунова и ее оценки. Положим

$$\varepsilon_k = \sqrt{m\beta_k} / (4M) \quad (3.1)$$

и введем в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V^k(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle A(t, q) \dot{q}, \dot{q} \rangle + \frac{1}{2} \beta_k q^2 + \varepsilon_k \langle A(t, q) \dot{q}, q \rangle \quad (3.2)$$

Выражение для функции V^k содержит матрицу кинетической энергии $A(t, q)$, которая предполагается неизвестной. Оценим через известные величины значение этой функции в произвольной точке $(t, q, \dot{q})$ расширенного фазового пространства. В силу неравенства Коши и выражения (3.1) справедливы соотношения

$$|\varepsilon_k \langle A \dot{q}, q \rangle| \leq \frac{1}{8} \langle A \dot{q}, \dot{q} \rangle + 2\varepsilon_k^2 \langle A q, q \rangle \leq \frac{1}{8} \left(\langle A \dot{q}, \dot{q} \rangle + \frac{m\beta_k}{M^2} \langle A q, q \rangle \right)$$

а из условий (1.2) вытекает

$$\frac{m\beta_k}{M^2} \langle A q, q \rangle \leq \frac{m\beta_k}{M} q^2 \leq \beta_k q^2$$

Подставив полученные неравенства в соотношение (3.2) и вновь используя условия (1.2), получим следующие оценки для функции V^k :

$$V_-^k(q, \dot{q}) \leq V^k(t, q, \dot{q}) \leq V_+^k(q, \dot{q}) \quad (3.3)$$

где

$$V_-^k(q, \dot{q}) = \frac{3}{8} (m\dot{q}^2 + \beta_k q^2), \quad V_+^k(q, \dot{q}) = \frac{5}{8} (M\dot{q}^2 + \beta_k q^2) \quad (3.4)$$

Установим некоторые соотношения, связывающие функции $V_+^k(q, \dot{q})$ и $W(q, \dot{q})$. Подставив формулу для коэффициента β_k из (2.4) в выражение (3.4) для функции V_+^k , получим

$$V_+^k(q_k, \dot{q}_k) = \frac{10M\dot{q}_k^2 W_k + 5U^2 q_k^2}{16W_k} \quad (3.5)$$

По построению точка $(q_k, \dot{q}_k)$ лежит на эллипсоиде с номером k . Отсюда и из определения (2.2) функции W следует

$$W_k = W(q_k, \dot{q}_k) = M\dot{q}_k^2 + (M^2\dot{q}_k^4 + U^2q_k^2)^{1/2}$$

С помощью данного равенства числитель в выражении (3.5) приводится к виду $5W_k^2$, откуда вытекает соотношение

$$V_+^k(q_k, \dot{q}_k) = 5W_k / 16 \quad (3.6)$$

которое связывает функции $V_+^k(q, \dot{q})$ и $W(q, \dot{q})$ и означает, что при любом k эллипсоид с номером k является множеством уровня квадратичной формы $V_+^k(q, \dot{q})$, отвечающим значению $5W_k/16$. В соответствии с алгоритмом точка $(q(t), \dot{q}(t))$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$ лежит вне $(k+1)$ -го эллипсоида, т.е. вне множества уровня $V_+^{k+1}(q, \dot{q}) = 5W_{k+1}/16$, поэтому

$$V_+^{k+1}(q(t), \dot{q}(t)) > 5W_{k+1} / 16 = 5W_k / 32, \quad t_k \leq t < t_{k+1}$$

В силу формул (2.3), (2.4) имеет место равенство $\beta_{k+1} = 2\beta_k$, из которого вытекает соотношение

$$M\dot{q}^2 + \beta_k q^2 \geq (M\dot{q}^2 + \beta_{k+1} q^2) / 2$$

Следовательно, на k -м отрезке траектории справедлива оценка

$$V_+^k(q(t), \dot{q}(t)) \geq V_+^{k+1}(q(t), \dot{q}(t)) / 2 \geq 5W_k / 64 \quad (3.7)$$

Отрицательная определенность производной функции Ляпунова. Обратимся теперь к вычислению производной V^k . Введем обозначения

$$B(t, q) = \left(\frac{\partial a}{\partial q}(t, q) \right)^T - \frac{\partial a}{\partial q}(t, q), \quad b(t, q) = \frac{\partial a_0}{\partial q}(t, q) - \frac{\partial a}{\partial t}(t, q) \quad (3.8)$$

и продифференцируем функцию V^k в силу системы (1.4), (2.1). Получим

$$\begin{aligned} \dot{V}^k(t, q, \dot{q}) = & - \left\langle \left[\alpha_k I - \varepsilon_k A + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\varepsilon_k}{2} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \right] \dot{q}, \dot{q} \right\rangle - \\ & - \varepsilon_k \beta_k q^2 - \varepsilon_k \alpha_k \langle \dot{q}, q \rangle + \langle S + b, \dot{q} + \varepsilon_k q \rangle - \varepsilon_k \langle B \dot{q}, q \rangle \end{aligned} \quad (3.9)$$

где I – единичная матрица.

Оценим отдельные слагаемые в выражении (3.9). С помощью неравенства Коши и соотношений (1.3), (3.8) получаем

$$|\varepsilon_k \alpha_k \langle \dot{q}, q \rangle| \leq \frac{\alpha_k}{4} \dot{q}^2 + \varepsilon_k^2 \alpha_k q^2, \quad |\varepsilon_k \langle B \dot{q}, q \rangle| \leq \frac{D_3}{2} \dot{q}^2 + \frac{\varepsilon_k^2 D_3}{2} q^2 \quad (3.10)$$

Используя неравенство $|2\varepsilon_k \langle \dot{q}, q \rangle| \leq \dot{q}^2 / 16 + 16\varepsilon_k^2 q^2$, выражение (3.1) для ε_k и соотношение (3.7), оценим величину $|\dot{q} + \varepsilon_k q|$ следующим образом:

$$\begin{aligned} (\dot{q} + \varepsilon_k q)^2 & \leq \frac{17}{16} \dot{q}^2 + 17\varepsilon_k^2 q^2 \leq \frac{17}{16M} (M\dot{q}^2 + \beta_k q^2) = \frac{17}{10M} V_+^k(q, \dot{q}) = \\ & = \frac{17}{10M V_+^k(q, \dot{q})} (V_+^k(q, \dot{q}))^2 \leq \frac{1088}{50MW_k} (V_+^k(q, \dot{q}))^2 \end{aligned}$$

Отсюда при учете второго выражения (3.4) получаем

$$|\langle S + b, \dot{q} + \varepsilon_k q \rangle| \leq |S + b| \sqrt{\frac{17}{2MW_k}} (M\dot{q}^2 + \beta_k q^2) \quad (3.11)$$

В силу (1.2) и неравенства $\sum_{i=1}^n |q_i| \leq \sqrt{n} |q|$ справедливо соотношение

$$\left| \frac{\varepsilon_k}{2} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \right| \leq \frac{\sqrt{n} D_1}{2} \varepsilon_k |q| \quad (3.12)$$

Подставив неравенства (3.10) – (3.12) в выражение (3.9) и воспользовавшись условиями (1.2), (1.3) и (1.6), приходим к следующей оценке производной функции V^k вдоль k -го участка траектории:

$$\begin{aligned} \dot{V}^k(t, q, \dot{q}) \leq & - \left(\varepsilon_k \beta_k - \varepsilon_k^2 \alpha_k - \beta_k \sqrt{\frac{17}{2MW_k}} (S_0 + D_4) - \frac{\varepsilon_k^2 D_3}{2} \right) q^2 - \\ & - \left(\frac{3\alpha_k}{4} - \varepsilon_k M - \frac{D_2 + D_3}{2} - \sqrt{\frac{17M}{2W_k}} (S_0 + D_4) - \frac{\sqrt{n} D_1}{2} \varepsilon_k |q| \right) \dot{q}^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Покажем, что при некоторых дополнительных предположениях производная $\dot{V}^k$ будет отрицательно определена. Положим

$$\Omega = \min \left\{ \frac{\sqrt{15}MU}{8\sqrt{n}D_1}, \frac{mU^2}{32D_2^2}, \frac{mU^2}{32D_3^2} \right\}$$

и введем в рассмотрение множества

$$G = \{(q, \dot{q}) \in R^{2n} : W(q, \dot{q}) \leq \Omega\}, \quad G_k = \left\{ (q, \dot{q}) : |q| < \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{W_k}{U} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Из определения (2.2) функции W вытекает неравенство $3q_k^2 U^2 \leq 5W^2(q_k, \dot{q}_k)$, из которого в силу соотношений (2.3) следует, что точка $(q_k, \dot{q}_k)$ лежит в области G_k .

Лемма 1. Пусть начальная точка $(q_k, \dot{q}_k)$ k -го отрезка принадлежит множеству G , матрица A , вектор-функции S, a и функция a_0 удовлетворяют условиям (1.2), (1.3), (1.6) и

$$S_0 + D_4 \leq \sqrt{\frac{m}{17M}} \frac{U}{8} \quad (3.14)$$

Тогда на участке траектории, который начинается в точке $(q_k, \dot{q}_k)$, лежит вне эллипсоида $W(q, \dot{q}) = W_{k+1}$ и во множестве G_k , производная функции V^k в силу системы (1.4), (2.1), (2.4) удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}^k(t, q, \dot{q}) \leq -\frac{3\alpha_k}{40M} V^k(t, q, \dot{q}) \quad (3.15)$$

Доказательство. По условию леммы $W(q_k, \dot{q}_k) \leq \Omega$, следовательно, $D_2^2, D_3^2 \leq mU^2 / (32W_k)$. Отсюда и из определений (2.4), (3.1) чисел ε_k, α_k вытекает

$$\frac{D_2 + D_3}{2} \leq \frac{\alpha_k}{4}, \quad \frac{\varepsilon_k^2 D_3}{2} \leq \frac{\alpha_k \beta_k}{64M} \quad (3.16)$$

Из условия (3.14) и формул (2.4) получаем

$$\sqrt{\frac{17M}{2W_k}}(S_0 + D_4) \leq \frac{\alpha_k}{8}, \quad \beta_k \sqrt{\frac{17}{2MW_k}}(S_0 + D_4) \leq \frac{\alpha_k \beta_k}{8M} \quad (3.17)$$

В силу соотношений (2.4), (3.1) имеем

$$\epsilon_k M = \frac{\alpha_k}{4}, \quad \epsilon_k \beta_k - \epsilon_k^2 \alpha_k = \frac{\alpha_k \beta_k}{4M} \left(1 - \frac{m}{4M}\right) \geq \frac{3\alpha_k \beta_k}{16M} \quad (3.18)$$

Из условия $W(q_k, \dot{q}_k) \leq \Omega$ вытекает $D_1 \leq \sqrt{15MU}/(8\sqrt{n}W_k)$. Так как рассматриваемый участок траектории лежит во множестве G_k , то

$$\epsilon_k |q| \leq \sqrt{5}\alpha_k W_k / (4\sqrt{3}MU)$$

и, следовательно,

$$\frac{\sqrt{n}D_1}{2} \epsilon_k |q| \leq \frac{5\alpha_k}{64} \quad (3.19)$$

Подставив неравенства (3.16) – (3.19) в (3.13) и воспользовавшись равенствами (3.4), приходим к соотношениям

$$\dot{V}^k(t, q, \dot{q}) \leq -\frac{3\alpha_k}{64M}(M\dot{q}^2 + \beta_k q^2) \leq -\frac{3\alpha_k}{40M} V_+^k(q, \dot{q})$$

откуда в силу оценок (3.3) вытекает утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть матрица A , вектор-функции S , a и функция a_0 удовлетворяют условиям (1.2), (1.3), (1.6), (3.14) и $(q_k, \dot{q}_k) \in G$. Тогда на k -м отрезке траектории выполняется неравенство (3.15).

Доказательство. Выше было установлено, что $(q_k, \dot{q}_k) \in G_k$. В силу леммы 1 для доказательства леммы 2 достаточно показать, что k -й отрезок траектории целиком лежит в области G_k .

Предположим противное. Пусть t' – первый момент времени, когда траектория покинет область G_k , т.е.

$$q^2(t') = \frac{5W_k^2}{3U^2} \quad (3.20)$$

С другой стороны, из определений (2.4), (3.1) коэффициентов ϵ_k , β_k и соотношений (3.3), (3.4) вытекает

$$\begin{aligned} \epsilon_k^2 q^2(t') &= \frac{m}{16M^2} \beta_k q^2(t') \leq \frac{m}{16M^2} (M\dot{q}^2(t') + \beta_k q^2(t')) = \\ &= \frac{m}{6M^2} V_-^k(q(t'), \dot{q}(t')) \leq \frac{m}{6M^2} V^k(t', q(t'), \dot{q}(t')) \end{aligned}$$

Так как рассматриваемый участок траектории при $t_k \leq t < t'$ лежит в области G_k , то в силу леммы 1 функция V^k вдоль него убывает и с помощью соотношения (3.6) оценка может быть продолжена так:

$$\epsilon_k^2 q^2(t') < \frac{m}{6M^2} V^k(t_k, q(t_k), \dot{q}(t_k)) \leq \frac{m}{6M^2} V_+^k(q(t_k), \dot{q}(t_k)) = \frac{5m}{96M^2} W_k$$

Следовательно,

$$q^2(t') < \frac{5mW_k}{96M^2 \epsilon_k^2} = \frac{5W_k^2}{3U^2}$$

что противоречит условию (3.20).

Из утверждений лемм 1, 2 вытекает, что вне эллипсоида $W(q, \dot{q}) = W_{k+1}$ функция V^k строго убывает вдоль траектории системы (1.4), (2.1), (2.4), а в силу соотношений (3.3) – (3.6) существует такой момент времени t_{k+1} , когда траектория попадет на эллипсоид с номером $k + 1$.

Видно, что если начальное состояние системы $(q_0, \dot{q}_0)$ принадлежит множеству G , то в этом множестве целиком лежит эллипсоид $W(q, \dot{q}) = W_0$, а вместе с ним и все остальные эллипсоиды $W(q, \dot{q}) = W_k$ ($k = 1, 2, \dots$). Следовательно, все точки $(q_k, \dot{q}_k)$ также принадлежат G и утверждения лемм 1, 2 применимы для любого из отрезков, составляющих траекторию движения системы.

Оценка времени движения. Покажем, что система придет в начало координат за конечное время. Для оценки времени движения вдоль k -го участка траектории проинтегрируем неравенство (3.15). Получим

$$t_{k+1} - t_k \leq \frac{40M}{3\alpha_k} \ln \frac{V^k(t_k, q_k, \dot{q}_k)}{V^k(t_{k+1}, q_{k+1}, \dot{q}_{k+1})} \quad (3.21)$$

В силу соотношений (2.4), (3.3) – (3.7) имеем

$$V^k(t_k, q_k, \dot{q}_k) \leq \frac{5}{16} W_k$$

$$\begin{aligned} V^k(t_{k+1}, q_{k+1}, \dot{q}_{k+1}) &\geq V_-^k(q_{k+1}, \dot{q}_{k+1}) = \frac{3}{8} (m\dot{q}_{k+1}^2 + \beta_k q_{k+1}^2) \geq \\ &\geq \frac{3m}{16M} (M\dot{q}_{k+1}^2 + \beta_{k+1} q_{k+1}^2) = \frac{3m}{10M} V_+^{k+1}(q_{k+1}, \dot{q}_{k+1}) = \frac{3m}{64M} W_k \end{aligned}$$

Подставив эти соотношения и выражение (2.4) для α_k в неравенство (3.21), получим следующую оценку времени движения от точки $(q_k, \dot{q}_k)$ до точки $(q_{k+1}, \dot{q}_{k+1})$:

$$t_{k+1} - t_k \leq \tau 2^{-k/2}, \quad \tau = \frac{40M\sqrt{2W_0}}{3\sqrt{mU}} \ln \frac{20M}{3m}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Полное время движения системы до терминального состояния T_* не превосходит суммы ряда:

$$T_* \leq \tau \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2} = \frac{\tau\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \quad (3.22)$$

Следовательно, предложенный алгоритм управления приводит систему (1.4) в начало координат за конечное время.

Проверим, что вдоль траектории движения выполнено условие (1.5). Оценим для этого модуль вектора управляющих сил на k -м отрезке траектории, используя неравенство Коши и соотношения (2.4), (3.3), (3.4) следующим образом:

$$|u|^2 \leq 2(\alpha_k^2 \dot{q}^2 + \beta_k^2 q^2) = 2\beta_k (m\dot{q}^2 + \beta_k q^2) = \frac{16}{3} \beta_k V_-^k(q, \dot{q}) \leq \frac{16}{3} \beta_k V^k(t, q, \dot{q})$$

Так как функция V^k на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$ убывает, то, используя соотношения (3.6), оценку можно продолжить так:

$$|u|^2 \leq \frac{16}{3} \beta_k V^k(t_k, q_k, \dot{q}_k) \leq \frac{16}{3} \beta_k V_+^k(q_k, \dot{q}_k) = \frac{5}{3} \beta_k W_k = \frac{5}{6} U^2$$

откуда вытекает неравенство (1.15).

Модификация алгоритма. Из приведенных рассуждений вытекает, что система придет в точку $(0, 0)$ за конечное время, если начальное состояние принадлежит

эллипсоиду G . Отметим, что в качестве терминального состояния может быть выбрана любая точка вида $(\bar{q}, 0)$ в фазовом пространстве системы. При этом совокупность эллипсоидов, на которых происходит изменение коэффициентов усиления, окажется сдвинутой на вектор $\bar{q}$, параметры же эллипсоидов останутся прежними. Покажем, что, используя это обстоятельство и модифицировав предложенный алгоритм, можно существенно расширить множество допустимых начальных состояний.

Пусть

$$(q_0, \dot{q}_0) \in G_*, \quad G_* = \left\{ (q, \dot{q}) \in R^{2n} : \dot{q}^2 \leq \frac{\Omega}{2M} \right\} \quad (3.23)$$

Переведем сначала систему в точку $q = q_0, \dot{q} = 0$. Сделаем для этого замену переменных $q' = q - q_0$. В новых переменных $q', \dot{q}'$ множество $G' = \{(q', \dot{q}') : W(q', \dot{q}') \leq \Omega\}$, аналогичное рассмотренному ранее множеству G , представляет собой эллипсоид с центром в точке $q' = \dot{q}' = 0$, причем начальное состояние системы – точка $q'_0 = 0, \dot{q}'_0 = \dot{q}_0$ – в силу включения (3.23) и определения (2.2) функции W принадлежит этому множеству. Следовательно, закон управления $u = -\alpha_k \dot{q}' - \beta_k q'$ с указанным выше алгоритмом изменения коэффициентов α_k, β_k приведет систему за конечное время в центр этого эллипсоида, т.е. в точку $q = q_0, \dot{q} = 0$.

В фазовом пространстве $q, \dot{q}$ выберем конечную последовательность точек $(\bar{q}^j, 0)$, $j = 1, 2, \dots, J$, таких, что $\bar{q}^{-1} = q_0, \bar{q}^J = 0$ и

$$|\bar{q}^j - \bar{q}^{j-1}| \leq \Omega/U, \quad j = 2, \dots, J \quad (3.24)$$

Перевод системы из точки $(\bar{q}^1, 0) = (q_0, 0)$ в точку $(\bar{q}^J, 0) = (0, 0)$, т.е. в начало координат, осуществим за $J - 1$ шагов, применяя каждый раз алгоритм управления заново. На j -м шаге начальному состоянию системы отвечает точка $(\bar{q}^j, 0)$, а терминальному – точка $(\bar{q}^{j+1}, 0)$. Из неравенства (3.24) и определения (2.2) функции W вытекает, что при любом j точка $(\bar{q}^j, 0)$ принадлежит эллипсоиду $G^j = \{(q, \dot{q}) : W(q - \bar{q}^{j+1}, \dot{q}) \leq \Omega\}$ с центром в $(\bar{q}^{j+1}, 0)$. Этот эллипсоид представляет собой множество допустимых начальных состояний системы для приведения ее в терминальное состояние $(\bar{q}^{j+1}, 0)$ на j -м шаге. Следовательно, закон управления $u = -\alpha_k \dot{q} - \beta_k (q - \bar{q}^{j+1})$ с указанным выше алгоритмом изменения коэффициентов α_k, β_k переведет систему за конечное время из точки $(\bar{q}^j, 0)$ в центр этого эллипсоида, т.е. в точку $q = \bar{q}^{j+1}, \dot{q} = 0$. Таким образом, через $J - 1$ шагов система (1.4) окажется в терминальном состоянии $(0, 0)$.

Основной результат и его обсуждение. Следующая теорема подводит итог проведенным выше рассуждениям.

Теорема. Пусть матрица A , вектор-функции S, a и функция a_0 удовлетворяют условиям (1.2), (1.3), (1.6), (3.14) и $(q_0, \dot{q}_0) \in G_*$. Тогда предложенный закон управления переведет систему (1.4) из начального состояния $(q_0, \dot{q}_0)$ в начало координат фазового пространства за конечное время. При этом управляющие силы будут удовлетворять ограничению (1.5).

Сопоставим данный результат с результатами, полученными ранее [3–8]. Как уже отмечалось выше, изложенный подход является распространением на реономные механические системы подхода, разработанного [7, 8] для склерономных систем. В случае склерономных систем множество допустимых начальных состояний совпадает со всем фазовым пространством, т.е. система приводится из произвольного

начального положения в заданное терминальное состояние. Для реономных же систем множество допустимых начальных состояний (3.23) представляет собой "полосу" в фазовом пространстве R^{2n} : на начальные скорости накладывается условие $\dot{q}_0^2 \leq \Omega/(2M)$.

Отметим, что в определение множества G_* и в выражения для функции W и коэффициентов усиления α_k, β_k входят только известные параметры задачи. Для реализации алгоритма достаточно знать величины m, M, U , а также значения фазовых переменных системы в каждый текущий момент времени. Постоянные D_1, D_2, D_3 присутствуют только в условиях, определяющих множество допустимых начальных состояний G_* . Эти условия, как и ограничения на вектор-функцию $a(t, q)$, функцию $a_0(t, q)$ и возмущающие силы S в соотношениях (3.14), являются лишь достаточными условиями приведения системы в терминальное состояние. Поэтому предложенный алгоритм управления может быть формально применен и в случаях, когда ограничения (3.14) не выполняются, а начальное состояние системы не принадлежит множеству G_* . Компьютерное моделирование динамики различных механических систем показывает, что алгоритм эффективен и за пределами приведенных достаточных условий.

Множество допустимых начальных состояний для разработанных ранее [3–6] законов управления, основанных на принципе декомпозиции, также представляет собой все фазовое пространство, однако эти законы применимы лишь для склерономных систем.

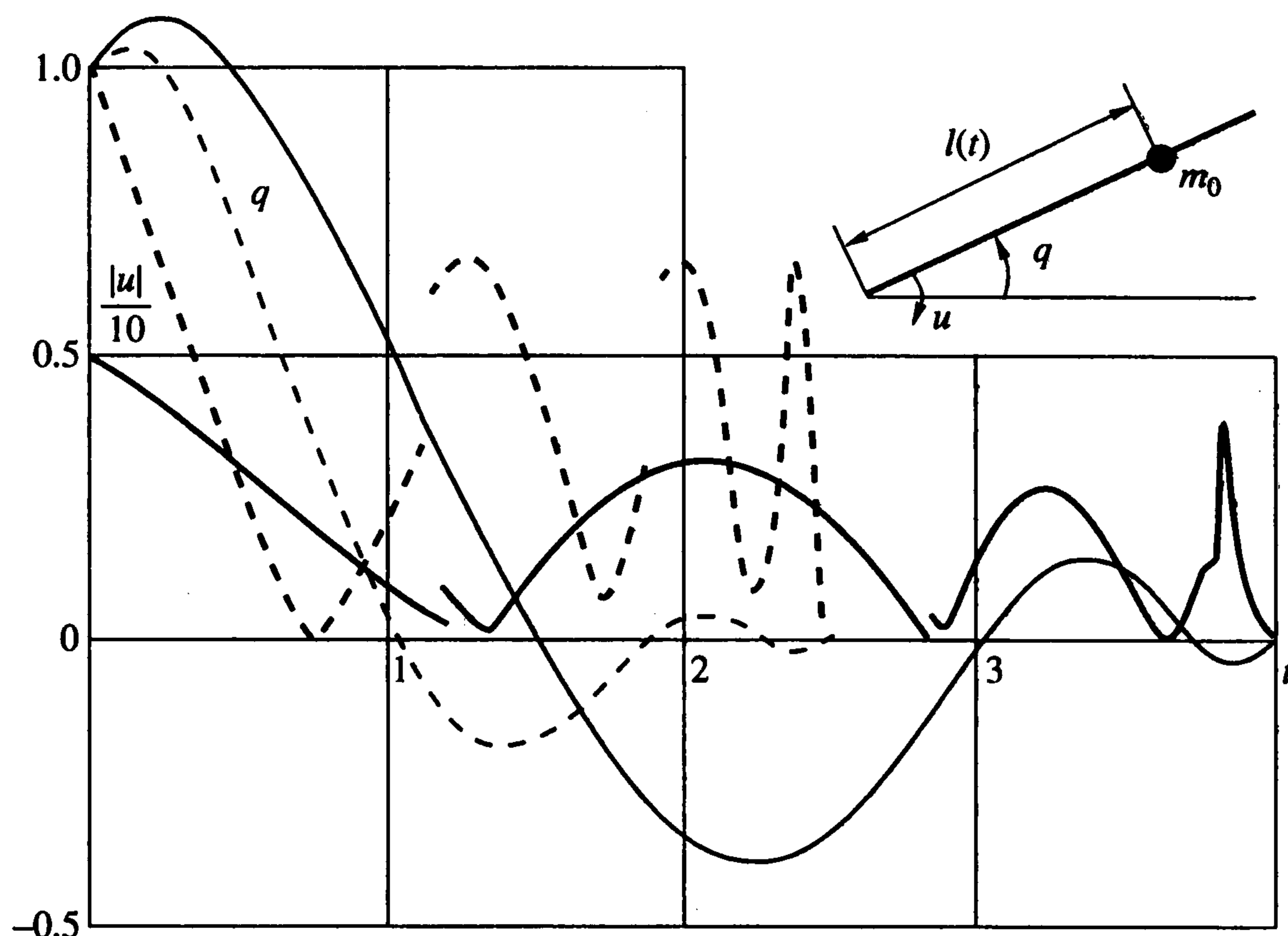
Условия, накладываемые на возмущающую силу S , полученные ранее [3, 4], аналогичны условию (3.14), так как для склерономной системы можно положить $D_4 = 0$. Кроме того, в отличие от данной работы предполагалось [3, 4], что матрица кинетической энергии A известна.

Условие приведения системы в терминальное состояние с помощью закона управления, развитого в [5, 6], задается неравенством $U > S$, т.е. для достижения цели управления достаточно простого превосходства управления над помехой. Данное условие выгодно отличает этот подход от других рассматриваемых здесь подходов, в которых необходимо многократное превышение ресурсов управления над помехой, причем соотношение между ними зависит от прочих параметров системы.

Было проведено [9] более подробное сопоставление рассматриваемых законов управления для склерономных механических систем. В частности, указанные алгоритмы были применены для приведения в начало координат материальной точки неизвестной массы, перемещающейся вдоль прямой. Оптимальное по быстродействию управление для такой задачи известно [10]. Сравнение показывает, что для такой простейшей механической системы время движения под действием законов управления, предложенных ранее [3–8], отличается от оптимального в 2–3 раза.

Наряду с обсуждаемыми здесь подходами к построению управления для механических систем в условиях неопределенности существует множество других подходов, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость заданного состояния системы, т.е. приведение ее в терминальное положение за бесконечное время. Несмотря на то что в практических приложениях приведение системы всегда осуществляется лишь в некоторую окрестность заданного состояния, постановка задачи о приведении за конечное время имеет смысл. При уменьшении размеров терминальной окрестности время движения системы под действием алгоритма, обеспечивающего асимптотическую устойчивость, стремится к бесконечности, тогда как время движения системы под управлением алгоритма, гарантирующего конечность процесса, остается конечным. Следовательно, с точки зрения быстродействия последний алгоритм эффективнее.

4. Результаты моделирования. Проиллюстрируем работу алгоритма с помощью численного моделирования вращения тела с изменяющимся во времени моментом инерции. Рассмотрим систему, состоящую из невесомого стержня и материальной



Фиг. 2

точки неизвестной массы m_0 (правая верхняя часть фиг. 2), которая перемещается вдоль стержня по неизвестному закону. Предполагается, что стержень вращается в горизонтальной плоскости вокруг одного из концов под действием управляющего момента u . Обозначим через $q, \dot{q}$ угловые координату и скорость стержня, через $l(t)$ – расстояние от оси вращения до материальной точки. В принятых выше обозначениях отдельные слагаемые в выражении (1.1) для кинетической энергии системы принимают вид

$$A(t) = m_0 l^2(t), \quad a \equiv 0, \quad a_0(t) = m_0 \dot{l}^2(t) / 2$$

а уравнения движения – вид

$$m_0 l^2(t) \ddot{q} + 2m_0 l(t) \dot{l}(t) \dot{q} = S + u \quad (4.1)$$

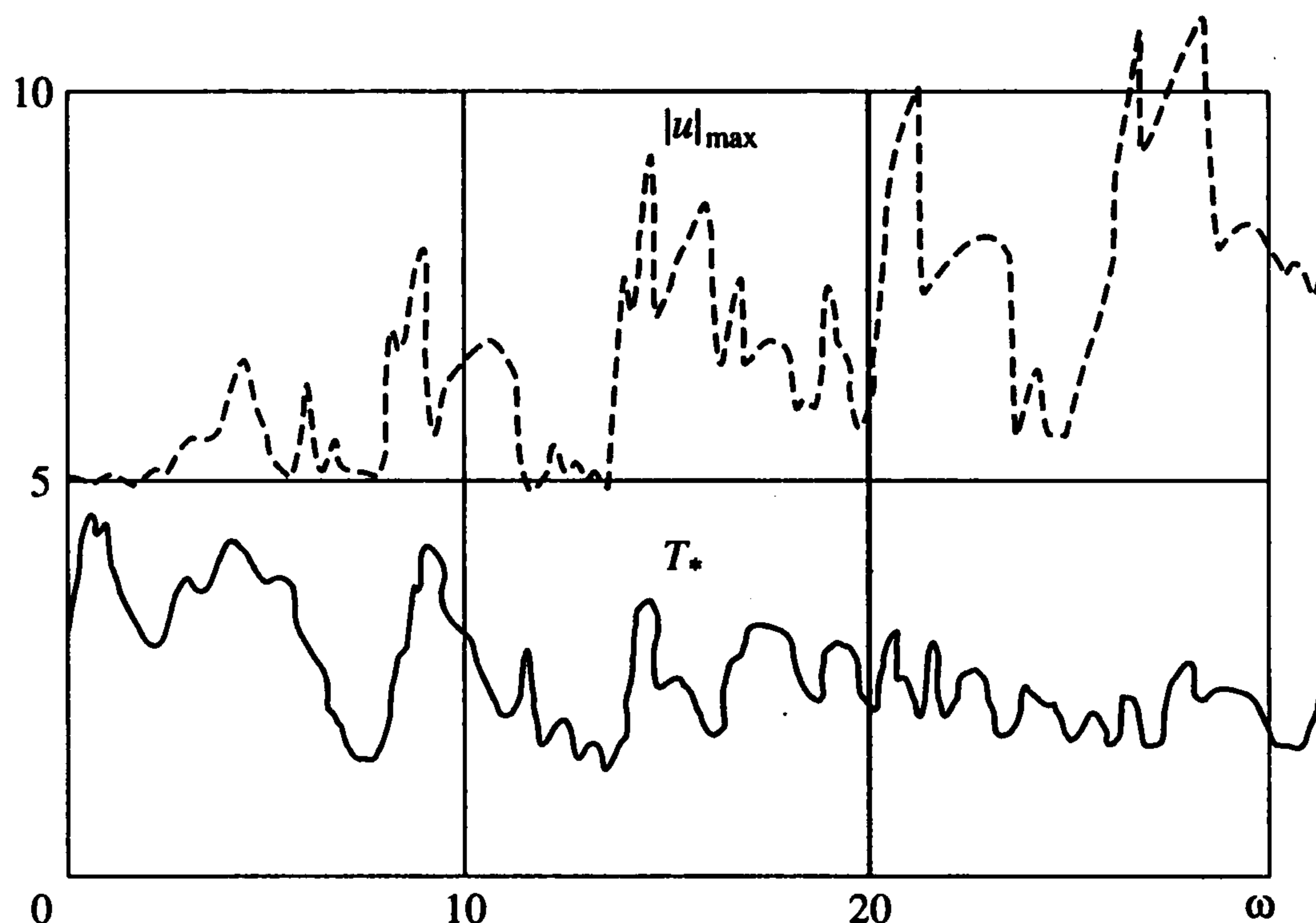
В качестве неизвестной обобщенной силы S в данном случае служит момент сил сухого трения, действующий на стержень. Постоянные m, M, U , а также неизвестные по предположению масса m_0 , возмущения S и закон движения материальной точки вдоль стержня $l(t)$ при моделировании принимались такими:

$$m = 0.25 \text{ кг}, \quad M = 2.25 \text{ кг}, \quad U = 10 \text{ Н·м}$$

$$S = -0.1 \text{sign}(\dot{q}) \text{ Н·м}, \quad m_0 = 1 \text{ кг}, \quad l(t) = 1 + \frac{1}{2} \sin \omega t \text{ м}$$

С помощью предложенного закона управления стержень переводился из начального состояния $q_0 = 1$ рад, $\dot{q}_0 = 1$ рад/с в терминальное $q = \dot{q} = 0$. Интегрирование уравнения (4.1) прекращалось, когда евклидово расстояние от текущей точки траектории до терминального состояния в фазовом пространстве $(q, \dot{q}) \in R^2$ становилось меньше 0.01.

Результаты моделирования для случая $\omega = 1$ представлены на фиг. 2. Тонкой сплошной линией изображена зависимость угла поворота стержня q , а жирной сплошной (разрывная кривая) – величины $|u|/10$ от времени. За время интегрирования коэффициенты α_k, β_k изменились 7 раз. Полное время движения оказалось равным $T_* = 3.98$ с.



Фиг. 3

Видно, что ограничение (1.5) выполняется со значительным запасом. Поэтому было проведено моделирование движения системы, управляемой по закону (2.1), но с коэффициентами обратной связи α_k , β_k , в 2 раза большими, чем предписываемые алгоритмом (2.4). Штриховыми линиями на фиг. 2 изображены зависимости угла поворота стержня (тонкая кривая) и величины $|u|/10$ (жирная кривая) от времени при таком законе управления. Время движения в этом случае сократилось до $T_* = 2.53$ с, а управление u по прежнему удовлетворяет ограничению (1.5).

Для оценки работоспособности алгоритма в случае нарушения условия $(q_0, \dot{q}_0) \in G_*$ сформулированной выше теоремы было проведено моделирование динамики системы (4.1) при различных значениях ω . На фиг. 3 сплошной линией изображена зависимость от параметра ω полного времени движения системы до терминального состояния, где $\omega \in [0, 10\pi]$. В этом случае

$$\dot{A}(t) = m_0 \omega \left(1 + \frac{1}{2} \sin \omega t \right) \cos \omega t$$

и постоянная D_2 из ограничений (1.2) удовлетворяет неравенству $\omega \leq D_2$. Следовательно, $\Omega \leq mU^2/(32\omega^2)$ и при выбранных значениях параметров системы для большей части отрезка $0 \leq \omega \leq 10\pi$ начальное состояние $q_0 = 1$, $\dot{q}_0 = 1$ не лежит в области G_* . Тем не менее предложенный закон управления приводит систему в терминальное состояние.

Штриховой линией на фиг. 3 представлена зависимость от параметра ω максимума абсолютной величины управляющего момента u , реализовавшегося при применении алгоритма. Видно, что ограничения (1.5) выполнены для всех рассмотренных значений $\omega < 26$.

Работа выполнена в рамках гранта поддержки ведущих научных школ (00-15-96013), гранта Министерства образования РФ (Е00-1.0-94) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00258 и 99-01-00222).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Corless M.* Control of uncertain nonlinear systems // Trans. ASME. J. Dynam. Syst., Measurem., and Control. 1993. V. 115. № 2B. P. 362–372.
2. *Leightmann G.* On one approach to the control of uncertain systems // Trans. ASME. J. Dynam. Syst., Measurem., and Control. 1993. V. 115. № 2B. P. 373–380.
3. Черноусько Ф.Л. Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 883–893.
4. Черноусько Ф.Л. Синтез управления нелинейной динамической системой. // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 179–191.
5. Пятницкий Е.С. Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 300–303.
6. Матюхин В.И., Пятницкий Е.С. Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 67–81.
7. Ананьевский И.М. Управление механической системой с неизвестными параметрами посредством ограниченной силы // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 52–62.
8. Ананьевский И.М. Ограниченное управление механической системой в условиях неопределенности // Докл. РАН. 1998. Т. 359. № 5. С. 607–609.
9. Ананьевский И.М. Два подхода к управлению механической системой с неизвестными параметрами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 2. С. 39–47.
10. Ананьевский И.М. Игровая задача управления материальной точкой неизвестной массы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 4. С. 19–27.

Москва

Поступила в редакцию
18.1.2001