

УДК 62–50

© 2001 г. Г.А. Леонов

**АЛГОРИТМЫ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ
И ПРОБЛЕМА БРОКЕТТА**

Построены алгоритмы линейной нестационарной стабилизации, решающие в ряде случаев проблему Брокетта.

Брокеттом [1] была сформулирована следующая проблема: дана тройка матриц A , B , C ; при каких условиях существует матрица $K(t)$, такая, что система

$$\dot{x} = Ax + BK(t)Cx, \quad x \in R^n \quad (1)$$

будет асимптотически устойчивой?

Задача стабилизации системы (1) с помощью постоянной матрицы K является классической для теории автоматического управления [2, 3]. С этой точки зрения проблему Брокетта можно переформулировать следующим образом: насколько введение зависимых от времени t матриц $K(t)$ расширяет возможности классической стабилизации?

В задачах стабилизации механических систем часто оказывается необходимо рассматривать более узкий класс стабилизирующих матриц $K(t)$. Эти матрицы должны быть периодическими и иметь нулевое среднее на периоде $[0, T]$.

Рассмотрим, например, линейное приближение в окрестности положения равновесия маятника с вертикально колеблющейся точкой подвеса

$$\ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + (K(t) - \omega_0^2)\theta = 0 \quad (2)$$

где α и ω_0 – положительные числа. Здесь наиболее часто рассматриваются функции $K(t)$ вида [4] $\beta \sin \omega t$ и вида [5, 6]

$$K(t) = \begin{cases} \beta & \text{при } t \in [0, T/2) \\ -\beta & \text{при } t \in [T/2, T) \end{cases} \quad (3)$$

Для таких функций $K(t)$ хорошо известен эффект стабилизации верхнего положения равновесия маятника при больших ω и малых T .

Ниже приводятся алгоритмы построения периодических кусочно-постоянных функций $K(t)$, решающих в ряде случаев проблему Брокетта.

Для того чтобы наиболее просто показать основные особенности и достоинства этих алгоритмов, рассмотрим сначала уравнение (2) и докажем следующий результат

Предложение 1. Пусть

$$\alpha^2 < 4(\beta - \omega_0^2) \quad (4)$$

Тогда для любого числа $\tau > 0$ существует число $T > \tau$, такое, что уравнение (2) с функцией $K(t)$ вида (3) асимптотически устойчиво.

Отсюда, в частности, следует возможность стабилизации верхнего положения маятника при низкочастотных вертикальных колебаниях точки подвеса. Естественно,

что амплитуда колебаний здесь будет большой: $a = lT^2\beta/8$, где l – длина маятника, β – абсолютная величина ускорения, деленная на l .

Для доказательства предложения 1 заметим, что, не умаляя общности, можно считать, что

$$\beta - \omega_0^2 - \alpha^2/4 = 1 \quad (5)$$

(этого можно добиться, сделав замену времени).

Наряду с уравнением (2) рассмотрим эквивалентную ему систему

$$\dot{\theta} = \eta, \quad \dot{\eta} = -\alpha\eta - (K(t) - \omega_0^2)\theta \quad (6)$$

Рассмотрим нужные для дальнейшего свойства этой системы при $K(t) \equiv -\beta$ и $K(t) \equiv \beta$.

Система (6) в случае $K(t) \equiv -\beta$ имеет седловую особую точку с устойчивым многообразием $\eta = L_1\theta$ и неустойчивым многообразием $\eta = L_2\theta$. Здесь

$$L_{1,2} = -\alpha/2 \mp \sqrt{\alpha^2/4 + (\beta + \omega_0^2)}$$

Рассмотрим теперь фундаментальную матрицу $X(t)$ системы (6) в случае $K(t) = \beta$ с начальными данными $X(0) = I$. Из условия (4) следует, что характеристический полином этой системы имеет комплексные нули и, следовательно, существует число $T_1 > 0$, такое, что линейный оператор $X(T_1)$ преобразует прямую $\eta = L_2\theta$ в прямую $\eta = L_1\theta$. Из равенства (5) следует, что прямую $\eta = L_2\theta$ в прямую $\eta = L_1\theta$ переводят также операторы $X(T_1 + 2\pi j)$ (j – целые числа).

Покажем, что в качестве числа T можно выбрать значение $2(T_1 + 2\pi j)$ с достаточно большим j . Для этого рассмотрим систему (6) в случае

$$K(t) = \begin{cases} -\beta & \text{при } t \in [0, T/4) \text{ и } t \in [3T/4, T] \\ \beta & \text{при } t \in [T/4, 3T/4) \end{cases} \quad (7)$$

Докажем, что точки из шара $\{\eta^2 + \theta^2 \leq 1\}$, двигаясь вдоль траекторий системы (6), (7), попадут при $t = T$ в шар радиуса $1/2$. Для этого отметим сначала, что решения системы (6) в случае $K(t) \equiv -\beta$ при $t = 0$ с начальными данными из шара $\{\eta^2 + \theta^2 \leq 1\}$ попадают при $t = T/4$ в ε -окрестность прямой $\eta = L_2\theta$, где

$$\varepsilon = v_1 \exp(L_1 T/4)$$

(v_1 – некоторое число). Кроме того, для этих решений выполнено неравенство

$$\eta(T/4)^2 + \theta(T/4)^2 \leq v_2 \exp(L_2 T/2) \quad (8)$$

(v_2 – некоторое число).

На интервале $(T/4, 3T/4)$ движение происходит вдоль траекторий системы (6) в случае $K(t) \equiv \beta$. В результате действия оператора $X(T/2)$ ε -окрестность прямой $\eta = L_2\theta$ переходит в $v_3\varepsilon$ -окрестность прямой $\eta = L_1\theta$ (v_3 – некоторое число). При этом из неравенства (8) и соотношения (5) следует оценка

$$\eta(3T/4)^2 + \theta(3T/4)^2 \leq v_2 \exp(L_2 T/2) \quad (9)$$

На интервале $(3T/4, T)$ движение происходит вдоль траекторий системы (6) в случае $K(t) \equiv -\beta$. Здесь из того факта, что точки $\theta(3T/4)$, $\eta(3T/4)$ располагаются в $v_3\varepsilon$ -окрестности прямой $\eta = L_1\theta$, и из неравенства (9) следует, что точки $\theta(T)$, $\eta(T)$ принадлежат ε_1 -окрестности прямой $\eta = L_1\theta$ и

$$\eta(T)^2 + \theta(T)^2 \leq v_4 \exp[(L_1 + L_2)T/2] \quad (10)$$

Здесь

$$\varepsilon_1 = v_5 v_3 v_1 \exp[(L_1 + L_2)T/4] \quad (11)$$

(v_4 и v_5 – некоторые числа).

Из соотношений (10), (11) и неравенства $L_1 + L_2 < 0$ следует, что, выбирая T достаточно большим, можно удовлетворить неравенству

$$\eta(T)^2 + \theta(T)^2 \leq 1/4 \quad (12)$$

Известно [5], что для линейных систем с периодическими коэффициентами выполнение этого неравенства достаточно для асимптотической устойчивости.

Таким образом, описанный здесь алгоритм стабилизации весьма прост и в основе его лежат два свойства линейных систем, соответствующих системе (6) при $K(t) \equiv -\beta$ и $K(t) \equiv \beta$. Во-первых, прижатие решений первой из этих систем к неустойчивому многообразию происходит быстрее, чем растяжение решений вдоль этого многообразия. Во-вторых, это неустойчивое многообразие после переключения можно повернуть вдоль траекторий второй из указанных систем и достичь к следующему переключению его совпадения с устойчивым многообразием. Действуя на интервале $(3T/4, T)$, используем превалирование сжатия над растяжением и в целом к моменту времени $t = T$ полностью ликвидируем растяжение, погружая решения в шар сколь угодно малого радиуса.

Опишем теперь аналогичный алгоритм для системы (1).

Предположим существование матрицы K_1 , такой, что система

$$\dot{x} = (A + \mu B K_1 C)x \quad (13)$$

со скалярным параметром μ обладает устойчивым линейным инвариантным многообразием $L(\mu)$ при $\mu \geq \mu_0$. Здесь μ_0 – некоторое число. Будем также предполагать, что

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} L(\mu) = L_0 \quad (14)$$

и для любого числа $\delta > 0$ существует число $\mu_1 \geq \mu_0$, при котором

$$|x(1, x_0)| \leq \delta, \quad \forall x_0 \in \{|x| = 1\} \cap L(\mu), \quad \mu \geq \mu_1 \quad (15)$$

Здесь $x(0, x_0) = x_0$ и предел (14) понимается в том смысле, что множество $L(\mu) \cap \{|x| \leq 1\}$ расположено в ε -окрестности $L_0 \cap \{|x| \leq 1\}$, где $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow +\infty$.

Сформулированное здесь предположение означает быструю сходимость траекторий на многообразии $L(\mu)$ при большом параметре μ .

Обозначим через $M(\mu)$ линейное инвариантное многообразие системы (13), для которого

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} M(\mu) = M_0, \quad \dim M(\mu) + \dim L(\mu) = n, \quad M(\mu) \cap L(\mu) = \{0\}$$

Будем предполагать, что $M(\mu)$ – многообразие медленных движений, т.е. существует число R , такое, что для всех $\mu \geq \mu_0$ выполнено неравенство

$$|x(1, x_0)| \leq R, \quad \forall x_0 \in \{|x| = 1\} \cap M(\mu) \quad (16)$$

Предположим теперь существование матрицы K_2 , такой, что для системы

$$\dot{y} = (A + B K_2 C)y \quad (17)$$

существует число τ , для которого

$$Y(\tau)M_0 \subset L_0 \quad (18)$$

Здесь $Y(t)$ – фундаментальная матрица системы (17), $Y(0) = I$.

Определим $(2 + \tau)$ -периодическую матрицу $K(t)$ следующим образом:

$$K(t) = \begin{cases} \mu K_1 & \text{при } t \in [0, 1) \text{ и } t \in [1 + \tau, 2 + \tau) \\ K_2 & \text{при } t \in [1, 1 + \tau) \end{cases} \quad (19)$$

Теорема 1. Система (1) с матрицей $K(t)$ вида (19) при достаточно больших μ асимптотически устойчива.

Доказательство. Из построения множеств L_0 и M_0 следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\mu_2 \geq \mu_0$, удовлетворяющее следующему свойству. При $|x_0| = 1$ и $\mu \geq \mu_2$ решение системы (1) $x(1, x_0)$ расположено в ε -окрестности множества

$$M_0 \cap \{|x| \leq R\}$$

Отсюда и из условия (18) следует, что существует число R_1 , для которого имеет место следующее утверждение. При $|x_0| = 1$, $\mu \geq \mu_2$ решение системы (1) $x(1 + \tau, x_0)$ расположено в $R_1 \varepsilon$ -окрестности множества

$$L_0 \cap \{|x| \leq R_1\}$$

Отсюда следует, что для рассматриваемых решений существует число R_2 , при котором

$$|x(2 + \tau, x_0)| \leq R_2 \varepsilon$$

Выбирая ε достаточно малым (и, следовательно, μ достаточно большим), получим, что для всех x_0 из сферы $\{|x| = 1\}$ выполнена оценка

$$|x(2 + \tau, x_0)| < \frac{1}{2}$$

Последнее и означает асимптотическую устойчивость системы (1) с периодической матрицей $K(t)$ вида (19).

Для проверки условия (18) часто оказывается полезным следующее утверждение для периодического решения $z(t)$ системы

$$\dot{z} = Qz, \quad z \in R^n \quad (20)$$

где Q — постоянная неособая $(n \times n)$ -матрица.

Лемма. Для любого вектора $h \in R^n$ существует число τ , такое, что $h^* z(\tau) = 0$.

Доказательство. Предполагая противное, получим неравенство $h^* z(t) \neq 0, \forall t \in R^1$. Не умаляя общности, можно принять, что $h^* z(t) > 0, \forall t \in R^1$. Отсюда и из периодичности $z(t)$ следует соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Z(t) = +\infty, \quad Z(t) = \int_0^t h^* z(t) dt \quad (21)$$

С другой стороны,

$$Z(t) = h^* Q^{-1} (z(t) - z(0))$$

Отсюда и из периодичности $z(t)$ сразу следует периодичность функции $Z(t)$, что противоречит соотношению (21). Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.

Теорема 2. Пусть существуют матрицы K_1 и K_2 , удовлетворяющие следующим условиям:

1) матрица BK_1C имеет $n - 1$ собственное значение с отрицательной вещественной частью и $\det BK_1C = 0$,

2) для вектора $u \neq 0$, удовлетворяющего равенству $BK_1Cu = 0$, и для некоторого числа λ вектор-функция

$$\exp[(A + BK_2C + \lambda I)t]u$$

является периодической.

Тогда существует периодическая матрица $K(t)$, такая, что система (1) асимптотически устойчива.

Доказательство. Из условия 1 теоремы 2 следует выполнение соотношений (14)–(16). Здесь L_0 – устойчивое линейное многообразие системы $\dot{z} = BK_1Cz$, а $M_0 = \{\gamma u | \gamma \in R^1\}$.

Из условия 2 теоремы 2 по лемме следует существование числа τ , для которого $\exp[(A + BK_2C)\tau]u \in L_0$

Таким образом, выполнено условие (18). Следовательно, по теореме 1 система (1) с матрицей вида (19) асимптотически устойчива.

В двумерном случае теорема 2 имеет следующую простую формулировку.

Теорема 3. Пусть $n = 2$ и существуют матрицы K_1, K_2 , удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $\det BK_1C = 0$ и $\text{tr} BK_1C \neq 0$,
- 2) матрица $A + BK_2C$ имеет комплексные собственные значения.

Тогда существует периодическая матрица $K(t)$ вида (19), такая, что система (1) асимптотически устойчива.

Доказательство. Из условия 1 теоремы 3 следует существование ненулевого собственного значения матрицы BK_1C . Если это собственное значение отрицательно, то выполнено условие 1 теоремы 2, если оно положительно, то условие 1 теоремы 2 выполнено с $-K_1$.

Условие 2 теоремы 2 сразу следует из условия 2 теоремы 3.

Покажем теперь, как применять теорему 3 к важному для теории управления случаю, когда $n = 2$, B – вектор-столбец, C – вектор-строка, $K(t)$ – скалярная функция.

Введем передаточную функцию системы (1)

$$W(p) = C(A - pI)^{-1}B = \frac{\rho p + \gamma}{p^2 + \alpha p + \beta}$$

Здесь p – комплексная переменная.

Будем в дальнейшем предполагать, что $\rho \neq 0$. Тогда в рассматриваемой задаче, не умаляя общности, можно считать, что $\rho = 1$. Предположим также невырожденность функции $W(p)$, т.е. пусть выполнено неравенство

$$\gamma^2 - \alpha\gamma + \beta \neq 0$$

Известно [7], что в этом случае систему (1) можно записать в виде

$$\dot{\sigma} = \eta \quad \dot{\eta} = -\alpha\eta - \beta\sigma - K(t)(\eta + \gamma\sigma) \quad (22)$$

Видно, что стабилизация системы (22) с помощью постоянной $K(t) \equiv K_0$ возможна тогда и только тогда, когда

$$\alpha + K_0 > 0, \quad \beta + \gamma K_0 > 0$$

Для существования числа K_0 , удовлетворяющего этим неравенствам, необходимо и достаточно выполнения либо условия $\gamma > 0$, либо соотношений $\gamma \leq 0, \alpha\gamma < \beta$.

Рассмотрим случай, когда стабилизация с помощью постоянной $K(t) \equiv K_0$ невозможна:

$$\gamma \leq 0, \quad \alpha\gamma > \beta$$

Применим здесь теорему 3. В рассматриваемом случае матрицы K_1 и K_2 являются числами. Ясно, что условие 1 теоремы 3 выполнено, так как

$$\det BK_1C = K_1 \det BC = 0, \quad \text{tr} BK_1C = K_1CB = -K_1 \neq 0$$

Условие 2 теоремы 3 выполнено, если при некотором K_2 полином

$$p^2 + \alpha p + \beta + K_2(p + \gamma)$$

имеет комплексные нули. Видно, что для существования такого K_2 необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\gamma^2 - \alpha\gamma + \beta > 0 \quad (23)$$

Таким образом, если выполнено неравенство (23), то существует периодическая функция $K(t)$, такая, что система (22) асимптотически устойчива.

Если выполнено неравенство

$$\gamma^2 - \alpha\gamma + \beta < 0 \quad (24)$$

то для системы (22) справедлива оценка

$$(\eta + \gamma\sigma)' = (-\gamma^2 + \alpha\gamma - \beta)\sigma > 0, \quad \forall \sigma > 0, \quad \eta = -\gamma\sigma$$

Отсюда следует, что для $\sigma(0) > 0, \eta(0) + \gamma\sigma(0) > 0$ выполнено неравенство

$$\eta(t) + \gamma\sigma(t) > 0, \quad \forall t \geq 0$$

Но тогда $\dot{\sigma}(t) = \eta(t) > 0, \forall t \geq 0$. Отсюда следует неустойчивость системы (22).

Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема 4 [8]. Если выполнено неравенство (23), то существует периодическая функция $K(t)$, такая, что система (22) асимптотически устойчива.

Если выполнено неравенство (24), то не существует функций $K(t)$, для которых система (22) асимптотически устойчива.

Этот результат был получен [9] в другом классе стабилизирующих функций вида

$$K(t) = (k_0 + k_1 \omega \cos \omega t), \quad \omega \gg 1$$

с помощью метода усреднения.

Покажем теперь, что предложенный здесь метод построения кусочно-постоянных стабилизирующих функций позволяет рассматривать проблему Брокетта и для случая, когда $n = 3, B$ – вектор-столбец, C – вектор-строка, $K(t)$ – скалярная функция.

Будем предполагать здесь выполнение следующих условий:

- 1) $CB < 0$,
- 2) матрица A имеет два комплексных собственных значения с положительными вещественными частями и одно отрицательное собственное значение,
- 3) для некоторого числа k функция

$$G(t) = C \exp[(A + kBC)t]B \quad (25)$$

имеет по крайней мере один нуль на интервале $(-\infty, 0)$,

$$4) \det(B, AB, A^2B) \neq 0.$$

Теорема 5. Если выполнены условия 1–4, то существует периодическая функция $K(t)$, такая, что система (1) асимптотически устойчива.

Доказательство. Опишем алгоритм построения требуемой функции $K(t)$. Специфика рассматриваемой задачи заключается в том, что сильное сжатие в фазовом пространстве $R^3 = \{x\}$ можем получить за счет выбора $K(t) = \mu, \mu \gg 1$, только в одном направлении, параллельном вектору B . Поэтому алгоритм построения стабилизирующей функции $K(t)$ здесь имеет большее количество шагов, чем в доказательстве предыдущих утверждений. Рассмотрим последовательно каждый из этих шагов, наблюдая за преобразованиями вдоль траекторий в R^3 шара Ω единичного радиуса.

1°. На множестве $[0, 1)$ определим $K(t)$ следующим образом: $K(t) = \mu$, где μ – большой параметр. Шар Ω "сплющивается" в эллипсоид Ω_1 , расположенный в ε -окрест-

ности плоскости $\{Cx = 0\}$. Здесь $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$ – малое число. Таким образом, полученный эллипсоид $\Omega_1 = x(1, \Omega)$ имеет одну главную полуось порядка $O(\varepsilon)$ и две другие главные полуоси, зависящие от A, B и C .

2°. Рассмотрим промежуток $[1, 1 - \tau]$, где τ – некоторый нуль функции (25) на интервале $(-\infty, 0)$. На этом промежутке определим $K(t)$ следующим образом: $K(t) = k$. Видно, что для решения $z(t, B)$ системы

$$\dot{z} = (A + kBC)z \quad (26)$$

с начальными данными $z(0, B) = B$ выполнено равенство

$$Cz(\tau, B) = 0$$

Отсюда следует, что эллипс

$$\Omega_1 \cap \{Cx = 0\}$$

преобразованный вдоль траекторий системы (1) на $[1, 1 - \tau]$, в момент времени $t = 1 - \tau$ пересечется с прямой $\{\lambda B | \lambda \in R^1\}$.

3°. На интервале $(1 - \tau, 2 - \tau)$ определим $K(t)$, как и на первом шаге, следующим образом: $K(t) = \mu$, $\mu \geq 1$.

Здесь пересечение эллипса с прямой $\{\lambda B | \lambda \in R^1\}$, преобразованное вдоль траекторий системы (1), в момент времени $t = 2 - \tau$ "сплющивается" в эллипс, расположенный в ε -окрестности некоторого отрезка прямой $\{vd, v \in [-1, 1]\}$, расположенного на плоскости $\{Cx = 0\}$: $Cd = 0$.

Таким образом, в момент $t = 2 - \tau$ шар единичного радиуса Ω , преобразованный вдоль траекторий системы (1) на интервале $(0, 2 - \tau)$, преобразуется в эллипсоид, расположенный в $O(\varepsilon)$ -окрестности отрезка $\{vd, v \in [-1, 1]\}$.

4°. На промежутке $[2 - \tau, 2 - \tau + T_1]$ положим $K(t) = 0$. Здесь число T_1 определим следующим образом. Обозначим через $\{\lambda e | \lambda \in R^1\}$ устойчивое линейное многообразие системы (26). Здесь $e \in R^3$. Рассмотрим далее плоскость Ψ , натянутую на векторы e и B . Такая плоскость существует в силу условия 4 теоремы 5. Число T_1 – это первый на множестве $[0, +\infty)$ момент пересечения с плоскостью Ψ решения $z(t, d)$ системы (26) с начальными данными $z(0, d) = d$. Существование такого числа T_1 следует из условия 1 теоремы 5.

5°. На множестве $(2 - \tau + T_1, 2 - \tau + T_1 + T_2]$ положим $K(t) = \mu$ либо $K(t) = -\mu$, $\mu \geq 1$. При этом выбор числа T_2 и знака $K(t)$ проведем так, чтобы вектор $z(T_1, d)$ преобразовался в вектор $x(T_1 + T_2, z(T_1, d))$, расположенный в ε -окрестности устойчивого многообразия $\{\lambda e | \lambda \in R^1\}$.

6°. На множестве $(2 - \tau + T_1 + T_2, 2 - \tau + T_1 + T_2 + T_3]$ положим $K(t) = 0$. При этом число T_3 выберем настолько большим, чтобы

$$|x(T_3, x(T_1 + T_2, z(T_1, d)))| < 1/4 \quad (27)$$

Такое число существует в случае, если число $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$, упомянутое в предыдущем п. 5°, достаточно мало.

Поскольку образ единичного шара Ω , сдвинутого вдоль решений системы (1), в момент $t = 2 - \tau + T_1 + T_2 + T_3$ расположен в малой окрестности вектора $x(T_3, x(T_1 + T_2, z(T_1, d)))$, то в силу неравенства (27) можно утверждать, что этот образ принадлежит шару радиуса $1/2$. Последний факт равносителен асимптотической устойчивости системы (1) с построенной выше $(2 - \tau + T_1 + T_2 + T_3)$ -периодической функцией $K(t)$. Теорема 5 доказана.

Заметим, что условия 1–3 теоремы 5 можно заменить на следующие формально менее ограничительные условия:

- 1) $CB \neq 0$,
- 2) существует число k_1 , для которого матрица $A + k_1 BC$ имеет два комплексных собственных значения и одно отрицательное собственное значение,
- 3) существует число k_2 , для которого функция $\text{Cexp}[(A + k_2 BC)t]B$ имеет по крайней мере один нуль на интервале $(-\infty, 0)$.

Заметим также, что теорему 5 можно рассматривать как распространение теоремы 4 на трехмерный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brockett R. A Stabilization Problem // Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. Springer, 1999. P. 75–78.
2. Zadeh L.A., Desoer Ch.A. Linear System Theory. N.Y. etc.: McGraw-Hill, 1963. = Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. М.: Наука, 1970. 703 с.
3. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. 616 с.
4. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971. 440 с.
5. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971. 239 с.
6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
7. Lefschetz S. Stability of Nonlinear Control Systems. N.Y.; L.: Acad. Press, 1965. = Лефшец С. Устойчивость нелинейных систем автоматического управления. М.: Мир, 1967. 183 с.
8. Leonov G.A. The Brockett stabilization problem // Proc. Intern. Conf. Control of Oscillations and Chaos. СПб., 2000. P. 38–39.
9. Morean L., Aeyels D. Stabilization by means of periodic output feedback // Proc. 38th Conf. on Decision and Control. Phoenix, Arizona USA, 1999. P. 108–109.

Санкт-Петербург
e-mail:leonov@math.spbu.ru

Поступила в редакцию
20.IX.2000