

УДК 531.36

© 2001 г. П.С. Мюллер

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ДЕСКРИПТОРНЫМИ СИСТЕМАМИ

Показано, как нужно модифицировать алгоритмы вариационного исчисления и принципа максимума Понтрягина для их применения к нелинейным дескрипторным системам управления. При оптимизации без ограничений на управление классическое вариационное исчисление еще применимо, однако при наличии ограничений на управление для применения принципа максимума Понтрягина в обычной или в расширенной форме необходимо различать правильные и неправильные дескрипторные системы. В неправильном случае решение зависит от производных по времени нескольких порядков от управляющих входов. Для корректного описания задачи и применения принципа максимума Понтрягина приходится вводить дополнительные фазовые переменные и соответствующие им интеграторные цепочки. Получающееся оптимальное управление становится динамическим. Для упрощения обозначений индекс алгебраических уравнений связей предполагается однородным. В принципе результаты остаются справедливыми и в случае неоднородного индекса, т.е. когда разные уравнения связей имеют разные индексы и разные компоненты управления входят с разными максимальными порядками производных по времени. Результаты несколько усложняются, особенно в случае оптимизации неправильных систем с ограничениями.

Рассматривается обобщение алгоритмов построения оптимального управления в вариационном исчислении и в принципе максимума Понтрягина на дескрипторные системы управления (ДС), описываемые системой обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений. При этом важную роль играют понятия "правильности" и "неправильности" ДС, разделяющие ДС на те, поведение которых зависит только от управляющих входов, и на те, в которых дополнительно появляются производные по времени нескольких порядков от управляющих входов. В случае неправильных систем приходится изменять постановку задачи оптимального управления.

Обсуждение ДС началось в 1977 г. с фундаментальной работы [1]. С этого времени в исследовании ДС достигнут существенный прогресс (см. обзоры [2, 3] по линейным ДС, первые результаты [4–6] по нелинейным ДС, первые попытки [7, 8] построения оптимального управления, анализ [9] линейно-квадратичного оптимального регулятора для ДС, а также последние теоретические работы [10–12] по проблемам оптимального управления с фазовыми ограничениями). Однако в большинстве опубликованных работ для получения необходимых условий оптимальности вводились существенные ограничения на тип задачи управления. Эти ограничения часто не выполняются для реальных практических задач. Корректное решение возможно только при учете различий между правильными и неправильными ДС, что было реализовано автором [13, 14] для построения линейно-квадратичного оптимального управления линейной ДС. В данной работе обсуждаются особенности построения оптимального управления нелинейными ДС, касающиеся правильного и неправильного поведения.

1. Постановка задачи и различные формы представления системы. Управляемая инвариантная по времени конечномерная ДС описывается дифференциально-алгебраическими уравнениями

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u) \quad (1.1)$$

$$0 = f_2(x_1, x_2, u) \quad (1.2)$$

где x_i , f_i ($i = 1, 2$) – n_i -мерные векторы ($n_1 + n_2 = n$), $u \in U$ – r -мерный вектор управляющего входа.

Задача оптимального управления для нелинейной ДС состоит в построении управления, минимизирующего функционал (критерий качества)

$$J = \int_0^T f_0(x_1, x_2, u) dt \Rightarrow \min \quad (1.3)$$

где $u(t)$ принадлежит множеству ограниченных или неограниченных управляющих функций. Кроме того, для построения оптимального управления нужно ввести краевые условия, которые либо заданы как геометрические соотношения, либо определяются в процессе решения задачи оптимизации как динамические краевые условия. В обоих случаях они должны быть совместны с алгебраическими уравнениями (1.2). Поскольку использование краевых условий при построении оптимального управления ДС не отличается от обычных правил построения оптимального управления, в дальнейшем краевые условия явно не рассматриваются.

Рассматриваются только общие принципы корректного формулирования задачи построения оптимального управления для нелинейных ДС, причем для упрощения обозначений предполагается, что алгебраические уравнения (1.2) имеют однородный индекс (все уравнения имеют одинаковый индекс).

Для аккуратного исследования ДС полезно принимать во внимание разные формы представления динамической системы (1.1)–(1.3), которые получаются либо построением дифференциального уравнения для x_2 путем многократного дифференцирования алгебраического соотношения (1.2), либо исключением избыточных координат и получением дифференциального уравнения в фазовом пространстве. В обоих случаях ключевую роль играет индекс k системы, который равен числу дифференцирований алгебраического соотношения (1.2), необходимых для получения базовой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Предположим, что f_1 и f_2 являются соответственно, $(k-1)$ и k раз непрерывно дифференцируемыми функциями, и вместе с функцией f_2 рассмотрим ее полные производные по времени $\dot{f}_2, \ddot{f}_2, \dots, f_2^{(k-1)}, f_2^{(k)}$ в силу системы (1.1). Предполагается, что в случае однородного индекса k функции $f_2, \dot{f}_2, \dots, f_2^{(k-2)}$ зависят от x_1 , но не зависят от x_2 , и первой зависит от x_2 функция $f_2^{(k-1)}$, причем так, что ее Якобиан невырожден и уравнение $f_2^{(k)} = 0$ может быть разрешено относительно $\dot{x}_2$.

Введем обозначения

$$L(\cdot) = L_{f_1}(\cdot) + L_{\dot{u}}(\cdot) + \frac{\Delta}{\Delta t}(\cdot) \quad (1.4)$$

$$L_{f_1}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1^T} f_1, \quad L_{u^{(j)}}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial u^T} u^{(j)}, \quad \frac{\Delta}{\Delta t} L_{u^{(j)}}(\cdot) = L_{u^{(j+1)}}(\cdot) \quad (1.5)$$

Здесь оператор (1.4) определяется через операторы (1.5), первые два из которых являются производными Ли, а последний действует только на $L_{u^{(j)}}$ путем дифференцирования функций управляющих входов по времени.

В этих обозначениях будем иметь

$$f_2^{(j)} \equiv L^j(f_2) = 0, \quad j = 0, \dots, k-1 \quad (1.6)$$

$$\dot{x}_2 = - \left(\frac{\partial}{\partial x_2^T} L_{f_1}^{k-1}(f_2) \right)^{-1}, \quad L^k(f_2) = \bar{f}_2(x_1, x_2, u, \dots, u^{(s)}) \quad (1.7)$$

При этом соотношения (1.6) являются первыми интегралами дифференциальных уравнений (1.7) и в общем случае зависят от управляющих входов u и их производных по времени $\dot{u}, \dots, u^{(s)}$, $0 \leq s \leq k$. Если u первый раз явно входит в $L^p(f_2) = 0$, то $s = k-p$.

Таким образом, ДС (1.1), (1.2) может быть представлена дифференциальными уравнениями (1.1), (1.7) на инвариантном многообразии, определяемом первыми интегралами (1.6).

В принципе, используя инварианты (1.6), можно исключить kn_2 избыточных переменных и свести задачу к системе $n_1 - (k-1)n_2$ обыкновенных дифференциальных уравнений в фазовом пространстве. Но мы не пойдем по такому пути.

Оба типа представления ДС должны быть дополнены соответствующими начальными или краевыми условиями, удовлетворяющими первым интегралам (1.6):

$$L^j(\mathbf{f}_2)|_{t=0} = 0, \quad L^j(\mathbf{f}_2)|_{t=T} = 0, \quad j = 0, \dots, k-1 \quad (1.8)$$

2. Правильные и неправильные ДС. Различные формы представления ДС из предыдущего раздела показывают, что поведение ДС может зависеть не только от управляющего входа u , но также от его производных по времени $\dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(s)}$. Несмотря на то что дифференциально-алгебраическое описание (1.1), (1.2) включает явную зависимость только от входа u , в нем могут проявляться скрытые эффекты, зависящие от производных по времени $\dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(s)}$, как это видно из представления (1.1), (1.6), (1.7). Поэтому любой метод построения управления должен учитывать этот факт, который не возникает при обычном рассмотрении в фазовом пространстве. Для систем с дискретным временем указанная необычная ситуация объясняется [3] введением понятия "причинности", которое, к сожалению, не имеет аналога для систем с непрерывным временем.

Для систем с непрерывным временем вводится понятие "правильности", соответствующее определению области частот для линейных систем. ДС (1.1), (1.2) называется *правильной*, если решение $x_1(t), x_2(t)$ зависит только от $u(t)$ (и, возможно, от интегралов от $u(t)$) и не зависит от $\dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots, u^{(s-1)}(t)$. В противном случае система называется *неправильной*.

В этом определении не должно фигурировать $u^{(s)}(t)$, как этого можно было бы ожидать на основании (1.7), потому что $L^{k-1}(\mathbf{f}_2) = 0$ представляет первый интеграл системы (1.7), зависящий только от $u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots, u^{(s-1)}(t)$. Отметим, что ДС индекса $k = 1$ всегда правильная. Неправильные системы появляются только при $k \geq 2$. Кроме того, из (1.6), (1.7) и определения правильности непосредственно следует, что ДС с индексом k является правильной, если и только если выполнены условия

$$\frac{\partial}{\partial u^T} (L_{f_1}^j(\mathbf{f}_2)) = 0, \quad j = 0, \dots, k-2$$

Тогда первые интегралы (1.6) принимают вид

$$L^j(\mathbf{f}_2) \equiv L_{f_1}^j(\mathbf{f}_2) \equiv \mathbf{f}_{2,j}(\mathbf{x}_1) = 0, \quad j = 0, \dots, k-2 \quad (2.1)$$

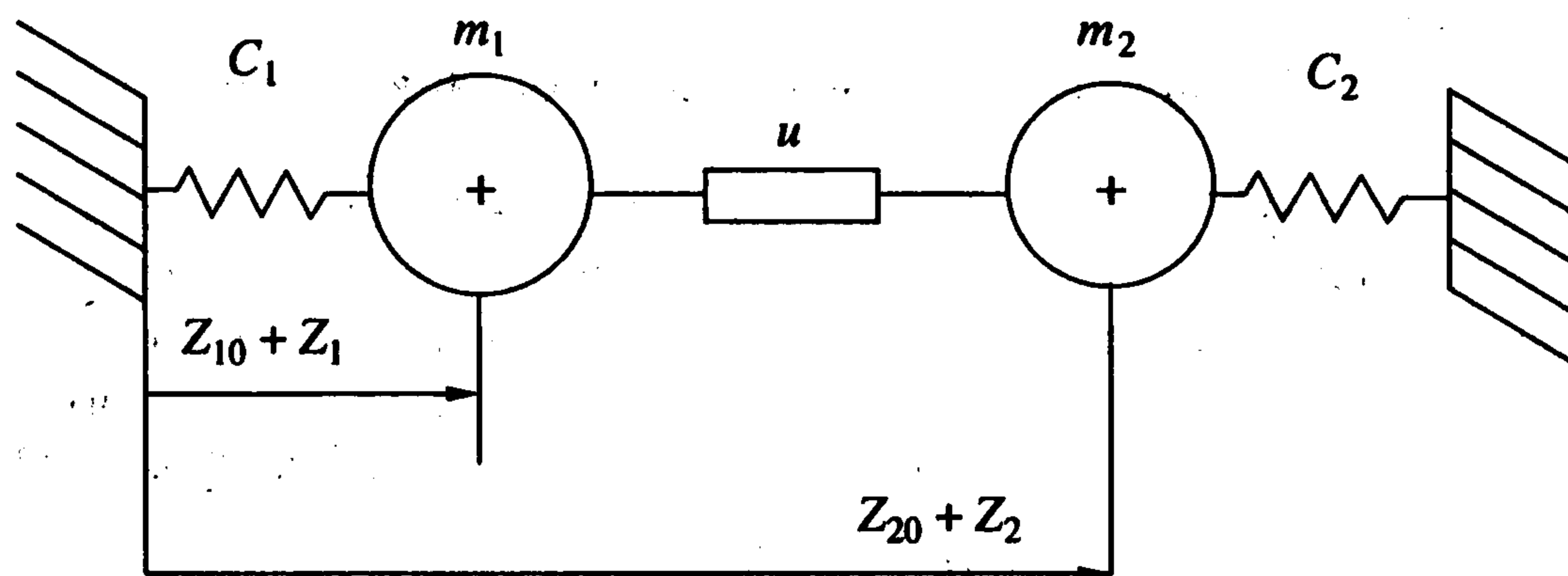
$$L^{k-1}(\mathbf{f}_2) \equiv L_{f_1}^{k-1}(\mathbf{f}_2) \equiv \mathbf{f}_{2,k-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, u) = 0 \quad (2.2)$$

Они не зависят от производных по времени от управляющего входа, и выполняется условие $s = 1$.

Рассматривается также более сильное свойство "строгой правильности" ДС (1.1), (1.2), когда она является правильной и, дополнительно, $\mathbf{f}_{2,k-1}$ зависит от $\mathbf{x}_1$ и не зависит от u , так что $s = 0$ и функция (2.2) принимает вид

$$\mathbf{f}_{2,k-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0 \quad (2.3)$$

Правильность играет существенную роль для возможности применения принципа максимума Понтрягина в обычной форме.



В качестве примера неправильной ДС приведем типичный простой управляющий механизм, состоящий из двух масс, закрепленных на концах пружин (линейные осцилляторы) и связанных твердым стержнем переменной длины, которая и рассматривается как управляющий вход (фигура).

Рассматривая переменные z_1, z_2 как смещения масс от их статического положения равновесия z_{10}, z_{20} , выпишем уравнения Лагранжа второго рода

$$m_1 \ddot{z}_1 + c_1 z_1 = \lambda, \quad m_2 \ddot{z}_2 + c_2 z_2 = -\lambda, \quad z_1 - z_2 + u = 0 \quad (2.4)$$

Уравнения (2.4) принимают дескрипторную форму (1.1), (1.2) при введении обозначений

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= [z_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2]^T, \quad \mathbf{x}_2 = [\lambda] \\ \mathbf{f}_1 &= \left[\dot{z}_1, \dot{z}_2, -\frac{c_1}{m_1} z_1 + \frac{\lambda}{m_1}, -\frac{c_2}{m_2} z_2 - \frac{\lambda}{m_2} \right]^T \\ \mathbf{f}_2 &= [z_1 - z_2 + u] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Заменой переменных

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{2}{m_1 + m_2} (m_1 z_1 + m_2 z_2), \quad \bar{x}_2 = \frac{2}{m_1 + m_2} (m_1 \dot{z}_1 + m_2 \dot{z}_2) \\ \bar{x}_3 &= -\frac{c_1}{m_1} z_1 + \frac{c_2}{m_2} z_2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \lambda, \quad \bar{x}_4 = \dot{z}_1 - \dot{z}_2, \quad \bar{x}_5 = z_1 - z_2 \end{aligned}$$

система приводится к канонической форме Вейерштрасса–Кронекера [3], из которой следует решение уравнений (2.4)

$$z_1(t) = \frac{1}{2} \bar{x}_1(t) - \frac{m_2}{m_1 + m_2} u(t), \quad z_2(t) = \frac{1}{2} \bar{x}_1(t) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} u(t) \quad (2.6)$$

$$\dot{z}_1(t) = \frac{1}{2} \dot{\bar{x}}_1(t) - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{u}(t), \quad \dot{z}_2(t) = \frac{1}{2} \dot{\bar{x}}_1(t) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{u}(t) \quad (2.7)$$

$$\lambda(t) = \frac{c_1 m_2 - c_2 m_1}{2(m_1 + m_2)} \bar{x}_1(t) - \frac{c_1 m_2^2 + c_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} u(t) - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{u}(t) \quad (2.8)$$

где $\bar{x}_1(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\ddot{\bar{x}}_1(t) + \frac{c_1 + c_2}{m_1 + m_2} \bar{x}_1(t) = 2 \frac{c_1 m_2 - c_2 m_1}{(m_1 + m_2)^2} u(t)$$

Очевидно, что решение зависит от $\dot{u}(t)$ (2.7) и от $\ddot{u}(t)$ (2.8). С механической точки зрения этот результат не удивителен. Если перемещения v , силу последнего из уравнений (2.4) зависят от $u(t)$, то скорости (2.7) зависят от $\dot{u}(t)$, а сила реакции связи (2.8) зависит от ускорения $\ddot{u}(t)$. Тем не менее система (2.4) является неправильной.

Вообще нетрудно показать, что лагранжевы системы правильны, если и только если вектор управляющего входа входит в дифференциальное уравнение (1.1), но не входит в алгебраическое соотношение (1.2), т.е. в случае обычного силового или моментного управления. Если же посредством алгебраических соотношений (1.2) управляющий вход $u(t)$ накладывает ограничения на перемещения системы, как в рассмотренном примере, то поведение системы оказывается неправильным.

3. Оптимальное управление (общие положения). Для получения необходимых условий оптимальности управления для ДС с критерием качества (1.3) при помощи хорошо известных методов вариационного исчисления или принципа максимума Понтрягина [15–17] наиболее удобной формой описания ДС является система, включающая дифференциальные уравнения (1.1), (1.7) и дополнительные краевые условия (1.8). В случае неправильной системы необходимо корректное обращение с производными по времени $\dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots, u^{(s)}(t)$. Эта проблема легко решается введением дополнительных переменных

$$\xi_1 = u, \quad \xi_2 = \dot{u}, \dots, \quad \xi_s = u^{(s-1)}, \quad v = u^{(s)} \quad (3.1)$$

определяющих многомерную интеграторную цепочку

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_3, \dots, \quad \dot{\xi}_{s-1} = \xi_s, \quad \dot{\xi}_s = v \quad (3.2)$$

Идея введения интеграторных цепочек (3.1), (3.2) для корректного описания влияния управляющего входа использовалась для построения линейно-квадратичного оптимального управления неправильной линейной ДС. Хотя обычные уравнения (см. далее (4.3), (4.4)) в этом случае сохраняют силу, корректное решение соответствующей двухточечной краевой задачи при введении интеграторной цепочки (3.1), (3.2) сильно упрощается. Так называемый подход Риккати также можно корректно применить только при введении расширения (3.1), (3.2). В случае неправильных систем матрица усиления для динамической обратной связи определяется из матричного уравнения Риккати для расширенной динамической системы. Детали этого подхода изложены в [13, 14].

С дополнительными переменными задача оптимального управления принимает вид: найти минимум критерия качества (1.3)

$$J = \int_0^T f_0(x_1, x_2, \xi_1) dt \Rightarrow \min$$

при наличии дифференциальных ограничений, соответствующих расширенной динамической системе (1.1), (1.6), (3.2),

$$\dot{x}_e = [f_1(x_1, x_2, \xi_1), \quad \bar{f}_2(x_1, x_2, \xi_1, \dots, v), \quad \xi_2, \dots, \xi_s, v]^T \quad (3.3)$$

где расширенный фазовый вектор определяется как

$$x_e = [x_1, x_2, \xi_1, \dots, \xi_s]^T \quad (3.4)$$

а вектор $v(t)$ представляет новый (фиктивный) управляющий вход. Исходное ограничение на управление $u \in U$ заменяется теперь на фазовое ограничение $\xi_1 \in U$. Заданные геометрические краевые условия нужно дополнить условиями (1.8).

Введение множителей Лагранжа $\lambda_1, \bar{\lambda}_2, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_s$ в расширенную формулировку задачи приводит к расширенному критерию качества

$$J_e = \int_0^T [f_0 + \lambda_1^T (\dot{x}_1 - f_1) + \bar{\lambda}_2^T (\dot{x}_2 - \bar{f}_2) + \psi_1^T (\dot{\xi}_1 - \xi_2) + \dots + \psi_{s-1}^T (\dot{\xi}_{s-1} - \xi_s) + \psi_s^T (\dot{\xi}_s - v)] dt \Rightarrow \min \quad (3.5)$$

и гамильтониану

$$H = \lambda_1^T f_1 + \bar{\lambda}_2^T \bar{f}_2 - f_0 + \psi_1^T \xi_2 + \psi_2^T \xi_3 + \dots + \psi_{s-1}^T \xi_s + \psi_s^T v$$

Теперь оптимальное управление для неправильной ДС общего вида в случае отсутствия ограничений ($U = R^r$) строится с помощью классического вариационного исчисления и в случае ограничения ($U \subset R^r$) – с помощью принципа максимума Понтрягина.

Для задачи оптимизации без ограничений и для правильных систем указанный общий подход можно упростить.

4. Задача оптимизации при отсутствии ограничений на управление (вариационное исчисление). Рассмотрим подробнее критерий качества (3.5), в частности его третий член

$$J_2 = \int_0^T \bar{\lambda}_2^T (\dot{x}_2 - \bar{f}_2) dt = \int_0^T \bar{\lambda}_2^T F^{-1} (F \dot{x}_2 + L^k(f_2)) dt \left(F = \frac{\partial}{\partial x_2^T} L_{f_1}^{k-1}(f_2) \right)$$

Вводя $\eta^T = \bar{\lambda}_2^T F^{-1}$ после интегрирования по частям с учетом уравнений (1.6)–(1.8), получим

$$J_2 = (-1)^k \int_0^T \eta^{(k)T} f_2 dt$$

Обозначая $\lambda_2 = -(-1)^k \eta^{(k)}$, критерий качества приведем к виду

$$J_e = \int_0^T [f_0 + \lambda_1^T (\dot{x}_1 - f_1) - \lambda_2^T f_2 + \psi_1^T (\dot{\xi}_1 - \xi_2) + \dots + \psi_s^T (\dot{\xi}_s - v)] dt \Rightarrow \min \quad (4.1)$$

Выписывая сначала уравнение Эйлера по v , получим $\psi_s = 0$. Уравнения Эйлера по $\xi_2, \dots, \xi_s$ приводят к равенствам $\psi_i = 0$ ($i = 1, \dots, s-1$). С помощью приведенного Гамильтониана

$$H_r = H_r(x_1, x_2, u, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^T f_1 + \lambda_2^T f_2 - f_0 \quad (4.2)$$

остальные уравнения Эйлера могут быть представлены в виде

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H_r}{\partial x_1}, \quad 0 = -\frac{\partial H_r}{\partial x_2} \quad (4.3)$$

$$0 = -\frac{\partial H_r}{\partial u} \quad (4.4)$$

Сопряженные переменные λ_1, λ_2 удовлетворяют дифференциально-алгебраическим уравнениям (4.3), а оптимальное управление определяется из уравнения (4.4) и зависит в общем случае от $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$.

Краевые условия для сопряженных переменных определяются по обычным правилам и здесь в явном виде не рассматриваются.

Процедура решения задачи оптимизации без ограничений состоит в решении двухточечной краевой задачи для двух подсистем дифференциально-алгебраических уравнений подсистемы (1.1), (1.2) и подсистемы (4.3), в которых управление определяется из уравнения (4.4). Итак, задача оптимизации без ограничений решается с помощью обычного подхода вариационного исчисления вне зависимости от правильности или неправильности динамической системы (1.1), (1.2).

5. Процедура оптимизации для правильной ДС при наличии ограничений на управление. Правильные ДС характеризуются инвариантами (2.1), (2.2) при $s = 1$. Следовательно, расширенный набор переменных (3.1) включает только

$$\dot{\xi} = u, \quad v = \dot{u} : \dot{\xi} = v \quad (5.1)$$

Тогда критерий качества (4.1) (преобразованный в результате интегрирования по частям) принимает вид

$$J_e = \int_0^T [f_0 + \lambda_1^T (\dot{x}_1 - f_1) - \lambda_2^T f_2 + \psi^T (\dot{\xi} - v)] dt \Rightarrow \min$$

и приводит к функции Гамильтона $H_p = \lambda_1^T f_1 + \lambda_2^T f_2 + \psi^T v - f_0$ и к необходимым условиям принципа максимума Понтрягина

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H_p}{\partial x_1}, \quad \dot{0} = -\frac{\partial H_p}{\partial x_2}, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H_p}{\partial \xi}, \quad H_{p \max} = \max_v H_p : \psi^T v \Rightarrow \max_v$$

Если вдобавок ДС строго правильная, так что $s = 0$, и выполняется (2.3), то расширение (5.1) больше не требуется, и снова получаем приведенный Гамильтониан H_r (4.2), который приводит к необходимым условиям

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H_r}{\partial x_1}, \quad \dot{0} = -\frac{\partial H_r}{\partial x_2}, \quad H_{r \max} = \max_{u \in U} H_r$$

Следовательно, для строго правильной ДС задача оптимизации с ограничениями решается обычным образом с помощью принципа максимума Понтрягина.

6. Процедура оптимизации для неправильной ДС при наличии ограничений на управление. Для неправильной ДС (1.1), (1.2) можно применить только общий подход, о котором шла речь в разд. 3. Для расширенной системы (3.3) с функцией Гамильтона H_{np} , связанной с критерием качества (4.1),

$$H_{np} = \lambda_1^T f_1 + \lambda_2^T f_2 + \psi_1^T \xi_2 + \dots + \psi_s^T v - f_0$$

необходимые условия принципа максимума имеют вид

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H_{np}}{\partial x_1}, \quad \dot{0} = -\frac{\partial H_{np}}{\partial x_2}, \quad \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H_{np}}{\partial \xi_1}, \quad \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H_{np}}{\partial \xi_i} = -\psi_{i-1}, \quad i = 2, \dots, s \quad (6.1)$$

$$H_{np \max} = \max_v H_{np} : \psi_s^T v \Rightarrow \max_v \quad (6.2)$$

Следовательно, для неправильных ДС в процедуру оптимизации необходимо включить производные по времени высшего порядка от управляющих входов в соответствии с интеграторной цепочкой (3.1), (3.2). Кроме того, ограничение на управление $u \in U$ должно рассматриваться как ограничение $\xi_1 \in U$ в расширенном фазовом пространстве (3.4). Практическая трудность разрешения условия максимума (6.2) состоит в том, что ограничение на v заранее не задано. Поэтому следует подумать о надлежащей постановке задачи оптимизации. Условие (6.2) дает намек на то, что, возможно, с самого начала задача некорректно поставлена. Во многих приложениях по существу

задачи часто имеет смысл именно ограничение $v \in V$, а не $u \in U$. Если условие $u \in U$ заменить на $v \in V$, то условия (6.1), (6.2) приводят к обычной процедуре оптимизации. После этого для получения оптимального управления $v(t)$ (фиктивного) нужно рассматривать двухточечную краевую задачу. В соответствии с интеграторной цепочкой (3.1), (3.2) это управление является не статическим (пропорциональным), а динамическим.

Для управляющего механизма из разд. 2 требуется интеграторная цепочка

$$\xi_1 = u, \quad \xi_2 = \dot{u}, \quad v = \ddot{u}: \quad \dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = v \quad (6.3)$$

Следовательно, принцип максимума нужно применять к системе (1.1), расширенной уравнениями (2.5) и (6.3). Общая размерность расширенной системы равна $n + s = 5 + 2 = 7$. После этого нужно решать сопряженные уравнения (6.1) и условие максимума (6.2). Задача оптимизации без ограничений и с квадратичным критерием качества обсуждалась ранее [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Luenberger D.G. Dynamic equations in descriptor form // IEEE Trans. Automat. Control. 1977. V. 22. № 3. P. 312–321.
2. Lewis F.L. A survey of linear singular systems // Circuits, Systems and Signal Processing. 1986. V. 5. № 1. P. 3–36.
3. Dai L. Singular control systems // Lecture Notes in Control and Information Sciences. Berlin; Heidelberg: Springer, 1989. V. 118. 332 p.
4. Bajic V.B. Lyapunov's Direct Method in the Analysis of Singular Systems and Networks. Hillcrest, Natal, RSA: Shades Technical Publications, 1992.
5. Müller P.C. Stability and optimal control of nonlinear descriptor systems: A Survey // Appl. Math. and Comput. Sci. 1998. V. 8. № 2. P. 269–286.
6. Campbell S.L., Nikoukhah R., Delebecque F. Nonlinear descriptor systems // Advances in Control: Highlights of ECC'99/Ed. P.M. Frank. L.: Springer, 1999. P. 247–282.
7. Cobb D. Descriptor variable systems and optimal state regulation // IEEE Trans. Automat. Control. 1983. V. 28. № 5. P. 601–611.
8. Jonckheere E. Variational calculus for descriptor problems // IEEE Trans. Automat. Control. 1988. V. 33. № 5. P. 491–495.
9. Bender D.J., Laub A.J. The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. V. 32. № 8. P. 672–688.
10. Dmitruk A.V. Maximum principle for the general optimal control with phase and regular mixed constraints // Comput. Mathematics and Modelling. 1993. V. 4. № 4. P. 364–377.
11. Hartl R.F., Sethi S.P., Vickson R.G. A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints // SIAM Review. 1995. V. 37. № 2. P. 181–218.
12. Stefani G., Zezza P. Optimality conditions for a constrained control problem // SIAM J. Control and Optimiz. 1996. V. 34. № 2. P. 635–659.
13. Müller P.C. Linear control design of linear descriptor systems // Proc. 14th IFAC World Congr. Pergamon Press. 1999. V.C. P. 31–56.
14. Müller P.C. Linear-quadratic optimal control of non-proper descriptor systems // CD-Proc. 14th Intern. Symp. Math. Theory of networks and systems (MTNS 2000). Univ. of Perpignan, 2000. 5 p.
15. Funk P. Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik. Berlin; Heidelberg: Springer, 1970. 678 S.
16. Leitmann G. The Calculus of Variations and Optimal Control. N.Y.; L.: Plenum Press, 1981. 311 p.
17. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. Физматгиз, 1961. 391 с.

Вупперталь (Германия)
e-mail: mueller@srm.uni-wuppertal.de

Поступила в редакцию
6.II.2001