

УДК (531.36+539.3):534.1

© 2001 г. А.А. Майлыбаев, А.П. Сейранян

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В СИСТЕМАХ С МАЛОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Рассматривается линейная колебательная система со многими степенями свободы с периодическими коэффициентами, зависящая от трех независимых параметров: частоты и амплитуды периодического воздействия и параметра диссипативных сил, причем последние две величины предполагаются малыми. Исследуется неустойчивость тривиального решения (параметрический резонанс). Для произвольной матрицы периодического воздействия и положительно определенной матрицы диссипативных сил получены общие выражения для областей основного и комбинационного резонансов. Изучены два частных случая матрицы периодического воздействия, часто встречающихся в приложениях: симметрической матрицы и стационарной матрицы, умноженной на скалярную периодическую функцию. Доказано, что в первом случае система подвержена лишь основному и комбинационному резонансам суммарного типа, а во втором случае – основному резонансу и комбинационному резонансу суммарного или разностного типа в зависимости от знака некоторой постоянной. Показано, что в обоих случаях области резонанса в первом приближении представляют собой конусы в трехмерном пространстве параметров. В качестве примеров рассмотрены задача о динамической устойчивости плоской формы изгиба упругой балки, нагруженной периодическими моментами, и задача об устойчивости упругого стержня переменного сечения, сжатого периодической продольной силой.

Явление параметрического резонанса наблюдается во многих физических системах. Одним из существенных факторов, определяющих возникновение резонанса, является диссипация энергии. В настоящей работе предполагается, что диссипативные силы и амплитуда периодического воздействия малы. Выведенные формулы для областей комбинационного резонанса (конусов в пространстве параметров) содержат две частоты и две соответствующие формы колебаний невозмущенной консервативной системы, отвечающие резонансной частоте возбуждения. В случае основного резонанса требуются лишь одна частота и форма колебаний. Это позволяет трактовать параметрический резонанс как парное взаимодействие частот (форм) колебаний консервативной системы при периодическом воздействии с определенной частотой.

Полученные соотношения для областей параметрического резонанса позволяют проанализировать влияние возрастания частот собственных колебаний и номера резонанса на области неустойчивости. В частности, показано, что с увеличением номера резонанса конус неустойчивости сужается, а ось конуса выпрямляется. В большинстве работ по параметрическому резонансу делается предположение о равенстве нулю среднего по периоду значения периодической матрицы. Настоящая работа свободна от этого ограничения. Наличие ненулевого среднего значения существенно влияет на область резонанса, отклоняя оси конусов от вертикали.

В случае нерезонансных частот возбуждения малые диссипативные силы стабилизируют систему, т.е. делают ее асимптотически устойчивой. При заданных диссипативных силах граница области параметрического резонанса в первом приближении описывается гиперболой; найдены минимальные (критические) значения амплитуды периодического воздействия, при которых возникает резонанс, и соответствующие частоты возбуждения. В работе также выводятся формулы для резонансных зон при стремлении к нулю параметра диссипации и обсуждается парадокс дестабилизации системы бесконечно малыми диссипативными силами.

Из предшествующих исследований следует отметить прежде всего анализ систем, близких к гамильтоновым [1], а также систем, приведенных к нормальным координатам консервативной системы (требующих знания матрицы перехода) [2–5]. Метод исследования областей параметрического резонанса, представленный в работе, основан на анализе поведения мультипликаторов и вычислении производных матрицы монодромии по параметрам [6, 7]. Система с одной степенью свободы и тремя независимыми параметрами рассматривалась ранее [8].

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейную колебательную систему с периодическими коэффициентами

$$M\ddot{y} + \gamma D\dot{y} + (C + \delta B(\Omega t))y = 0 \quad (1.1)$$

где M , D и C – симметрические положительно определенные матрицы масс, демпфирования и потенциальных сил размерности $m \times m$; $B(\tau)$ – кусочно-непрерывная 2π -периодическая матрица параметрического воздействия; $y = (y_1, \dots, y_m)^T$ – вектор обобщенных координат; точкой обозначается производная по времени t .

Исследуем устойчивость тривиального решения $y \equiv 0$ системы (1.1) в зависимости от вектора трех параметров $p = (\gamma, \delta, \Omega)$, описывающих величину диссипативных сил, амплитуду и частоту периодического воздействия в предположении о малости величин γ и $|\delta|$. Это предположение отвечает близости системы (1.1) к автономной консервативной системе. На параметры γ и Ω накладываются естественные ограничения $\gamma \geq 0, \Omega > 0$.

Запишем (1.1) в виде системы уравнений первого порядка

$$\dot{x} = A(\Omega t)x \quad (1.2)$$

$$x = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \quad A(\Omega t) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}(C + \delta B(\Omega t)) & -\gamma M^{-1}D \end{pmatrix}$$

Матрица $A(\Omega t)$ размерности $2m \times 2m$ является вещественной периодической функцией с периодом $T = 2\pi/\Omega$. Матрицантом системы (1.2) называется матрица $X(t)$ размерности $2m \times 2m$, удовлетворяющая уравнению и начальным условиям

$$\dot{X} = A(\Omega t)X, \quad X(0) = I \quad (1.3)$$

где I – единичная матрица. Значение матрицанта при $t = T$ называется матрицей монодромии F [1]

$$F = X(T) \quad (1.4)$$

Согласно теореме о зависимости решения дифференциального уравнения от параметров матрица монодромии – гладкая функция вектора параметров p . Собственные значения (мультипликаторы) ρ и собственные векторы w матрицы монодромии определяются из уравнения

$$Fw = \rho w \quad (1.5)$$

Система (1.2) асимптотически устойчива, если все мультипликаторы лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости $|\rho| < 1$. Наличие хотя бы одного мультипликатора вне этого единичного круга означает неустойчивость системы [1].

При $\gamma = \delta = 0$ система (1.1) консервативна

$$M\ddot{y} + Cy = 0 \quad (1.6)$$

Отыскивая решение уравнения (1.6) в виде $y = u \exp(i\omega t)$, приходим к задаче на собственные значения

$$Cu = \omega^2 Mu, \quad u^T Mu = 1 \quad (1.7)$$

где второе равенство – условие нормировки. Из этих уравнений определяются действительные величины: собственные частоты ω и формы колебаний u . Предположим, что все частоты $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_m$ различны. Обозначим соответствующие собственные векторы через u_j ($j = 1, \dots, m$).

Матрицант и матрица монодромии (1.3), (1.4) при $\gamma = \delta = 0$ имеют вид [1]

$$X(t) = \exp(A_0 t), \quad F_0 = \exp(A_0 T), \quad A_0 = \begin{Bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}C & 0 \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

Собственные значения матрицы A_0 , а также соответствующие правые и левые собственные векторы w и v определяются соотношениями

$$A_0 w = \lambda w, \quad v^T A_0 = \lambda v^T, \quad v^T w = 1 \quad (1.9)$$

Последнее равенство представляет собой условие нормировки. Из соотношений (1.7) – (1.9) следует, что собственные значения матрицы A_0 равны λ_j , $\bar{\lambda}_j = \pm i\omega_j$ ($j = 1, \dots, m$). Правые и левые собственные векторы, отвечающие $\lambda_j = i\omega_j$, имеют вид

$$w_j = \begin{Bmatrix} u_j \\ i\omega_j u_j \end{Bmatrix}, \quad v_j = \begin{Bmatrix} Mu_j / 2 \\ Mu_j / (2i\omega_j) \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

Из теории матриц [1] известно, что мультипликаторы матрицы $F_0 = \exp(A_0 T)$ имеют вид

$$\rho_j, \bar{\rho}_j = \exp(\pm i\omega_j T) = \exp(\pm i2\pi\omega_j / \Omega), \quad j = 1, \dots, m \quad (1.11)$$

причем собственные векторы для матриц F_0 и A_0 совпадают. Таким образом, векторы w_j и v_j из (1.10) являются правым и левым собственными векторами, отвечающими мультипликатору ρ_j матрицы монодромии F_0 . Они удовлетворяют соотношениям

$$F_0 w_j = \rho_j w_j, \quad v_j^T F_0 = \rho_j v_j^T, \quad v_j^T w_j = 1 \quad (1.12)$$

Комплексно-сопряженным мультипликаторам $\bar{\rho}_j = \exp(-i\omega_j T)$ отвечают комплексно-сопряженные собственные векторы $\bar{w}_j$ и $\bar{v}_j$.

Поскольку все мультипликаторы ρ_j из (1.11) лежат на единичной окружности $|\rho| = 1$, устойчивость системы (1.1) при ненулевых γ и δ определяется возмущениями всех мультипликаторов ρ_j . В случае общего положения все ρ_j различны. Кратные мультипликаторы возникают при критических значениях частоты, равных

$$\Omega = 2\omega_j / k, \quad j = 1, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

$$\Omega = (\omega_j \pm \omega_l) / k, \quad i, j = 1, \dots, m; \quad j > l; \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

Случай (1.13) и (1.14) называются соответственно основным (простым) резонансом (ОР) и комбинационным резонансом (КР) [1] и отвечают наличию двукратных мультипликаторов $\rho = (-1)^k$ и $\rho = \exp(i\omega_j T)$ соответственно. Эти мультипликаторы полупростые, так как им отвечают два линейно независимых собственных вектора w_j , $\bar{w}_j$ в случае (1.13) и w_j , $\bar{w}_l$ (либо w_j , w_l при отрицательном знаке) в случае (1.14). Близость частоты Ω к критической может привести к неустойчивости системы. Поэтому критические случаи представляют особый интерес. Мультипликаторы более высокой кратности возникают только при наличии рациональных соотношений

между величинами $\omega_j \pm \omega_l$ ($j, l = 1, \dots, m; j \geq l$), где $j \neq l$ в случае $\omega_j - \omega_l$. Эти случаи не типичны и не будут далее рассматриваться, хотя могут быть исследованы аналогично.

2. Поведение простых мультипликаторов. Рассмотрим простой мультипликатор $\rho_j = \exp(i\omega_j T_0)$ ($T_0 = 2\pi/\Omega_0$), отвечающий матрице монодромии F_0 при $\gamma = \delta = 0$ и некотором значении $\Omega = \Omega_0$. Случай мультипликатора $\bar{\rho}_j = \exp(-i\omega_j T_0)$ исследуется аналогично. Как известно, простой мультипликатор гладкого семейства матриц $F(p)$ является гладкой функцией вектора параметров p . Производная мультипликатора ρ_j по параметру p_k имеет вид [9]

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial p_k} = \mathbf{v}_j^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_k} \mathbf{w}_j \quad (2.1)$$

причем первые производные матрицы монодромии определяются выражением [6, 7]

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_k} = \mathbf{F} \int_0^{T_0} \mathbf{X}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p_k} \mathbf{X} dt + \mathbf{A}(T_0) \mathbf{F} \frac{\partial T}{\partial p_k} \quad (2.2)$$

Используя формулы (1.8), (1.9), (1.12), (2.2), запишем соотношение (2.1) в виде

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial p_k} = \rho_j \left(\int_0^{T_0} \mathbf{v}_j^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p_k} \mathbf{w}_j dt + i\omega_j \frac{\partial T}{\partial p_k} \right) \quad (2.3)$$

Здесь использовалось следующее свойство: матрица $\mathbf{X} = \exp(\mathbf{A}_0 t)$ имеет собственное значение $\exp(i\omega_j t)$, которому отвечают правый и левый собственные векторы $\mathbf{w}_j, \mathbf{v}_j$. Подставив в равенство (2.3) явный вид матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\Omega t)$ из (1.2) и векторы $\mathbf{w}_j, \mathbf{v}_j$ из (1.10), найдем производные мультипликатора по компонентам вектора параметров $\mathbf{p} = (\gamma, \delta, \Omega)$ в точке $\mathbf{p}_0 = (0, 0, \Omega_0)$

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial \gamma} = -\frac{\rho_j \pi \mathbf{u}_j^T \mathbf{D} \mathbf{u}_j}{\Omega_0}, \quad \frac{\partial \rho_j}{\partial \delta} = \frac{i \rho_j \pi c_0^{(jj)}}{\omega_j \Omega_0}, \quad \frac{\partial \rho_j}{\partial \Omega} = -\frac{2i \rho_j \pi \omega_j}{\Omega_0^2} \quad (2.4)$$

$$c_0^{(jj)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_j^T \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}_j d\tau$$

Тогда в окрестности точки $\mathbf{p}_0$ мультипликатор $\rho_j(\mathbf{p})$ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \rho_j(\mathbf{p}) &= \rho_j + \frac{\partial \rho_j}{\partial \gamma} \gamma + \frac{\partial \rho_j}{\partial \delta} \delta + \frac{\partial \rho_j}{\partial \Omega} (\Omega - \Omega_0) + o(\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|) = \\ &= \rho_j \left(1 - \frac{\pi \mathbf{u}_j^T \mathbf{D} \mathbf{u}_j}{\Omega_0} \gamma + \frac{\pi c_0^{(jj)}}{\omega_j \Omega_0} \delta i - \frac{2\pi \omega_j}{\Omega_0^2} (\Omega - \Omega_0) i \right) + o(\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из соотношения (2.5) следует выражение для абсолютной величины мультипликатора в первом приближении

$$|\rho_j(\mathbf{p})| = 1 - \frac{\pi \mathbf{u}_j^T \mathbf{D} \mathbf{u}_j}{\Omega_0} \gamma + o(\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|) \quad (2.6)$$

Из предположения о положительной определенности матрицы диссипативных сил $\mathbf{D}$ следует отрицательность коэффициента при γ в равенстве (2.6). Следовательно, условием устойчивости $|\rho_j| < 1$ в первом приближении является неравенство

$$\gamma > 0 \quad (2.7)$$

Положим $\gamma = 0$ и рассмотрим случай, когда $\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{B}^T(\tau)$ или $\mathbf{B}(\tau_0 + \tau) = \mathbf{B}(\tau_0 - \tau)$, где τ_0 – некоторое число. Тогда система (1.1) при $\gamma = 0$ является гамильтоновой или обратимой соответственно. В этом случае характеристический многочлен матрицы монодромии возвратный [1], т.е. если ρ – мультипликатор, то $1/\rho$ – также мультипликатор. Следовательно, при $\gamma = 0$ и малых $|\delta|$ и $|\Omega - \Omega_0|$ простые мультипликаторы остаются на единичной окружности. Поэтому плоскость $\gamma = 0$ будет границей области асимптотической устойчивости в окрестности точки $\mathbf{p}_0$. Таким образом, введение малых диссипативных сил приводит к сдвигу всех простых мультипликаторов внутрь единичного круга при малых значениях $|\delta|$ и $|\Omega - \Omega_0|$. Это означает, что малые диссипативные силы стабилизируют систему (1.1) с малой амплитудой параметрического возбуждения при некритических значениях частоты Ω .

3. Области параметрического резонанса. Неустойчивость может возникать при частотах Ω , близких к критическим значениям (1.13) и (1.14). При этих условиях на единичной окружности появляются двукратные мультипликаторы. Пусть частота параметрического возбуждения $\Omega = \Omega_0$ удовлетворяет соотношению

$$\omega_j + \omega_l = k\Omega_0 \quad (3.1)$$

для некоторых частот ω_j и ω_l консервативной системы (1.6) и некоторого натурального числа k . Заметим, что условие (3.1) включает случай ОР (1.13) при $j = l$ и случай суммарного КР (1.14) при $j > l$. Критические частоты $\Omega_0 = (\omega_j - \omega_l)/k$, отвечающие разностному КР, будут рассмотрены ниже по аналогии.

Условие (3.1) означает, что два мультипликатора совпадают:

$$\rho_j = \bar{\rho}_l = \exp(i\omega_j T_0), \quad T_0 = 2\pi / \Omega_0 \quad (3.2)$$

Для удобства обозначим $\rho_0 = \rho_j = \bar{\rho}_l$. При $j = l$ (ОР) имеем $\rho_0 = (-1)^k$, а при $j > l$ (КР) ρ_0 – комплексный мультипликатор. Во втором случае имеется также двукратный мультипликатор $\bar{\rho}_0$. Однако в силу симметрии мультипликаторов относительно вещественной оси достаточно исследовать поведение одного из них. Двукратный мультипликатор ρ_0 является полупростым, поскольку ему отвечают два линейно независимых собственных вектора $\mathbf{w}_j$ и $\bar{\mathbf{w}}_l$, а также два левых собственных вектора $\mathbf{v}_j$ и $\bar{\mathbf{v}}_l$ из (1.10).

При возмущении параметров происходит бифуркация двукратного мультипликатора ρ_0 , соответствующего точке $\mathbf{p}_0 = (0, 0, \Omega_0)$, на два простых. Рассматривая возмущения параметров вдоль луча $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \epsilon \mathbf{e}$ ($\epsilon \geq 0$) с направлением $\mathbf{e}$, расщепление полупростого мультипликатора можно описать выражением

$$\rho = \rho_0 (1 + \mu\epsilon + o(\epsilon)) \quad (3.3)$$

Два значения величины μ находятся из квадратного уравнения [9]

$$\begin{vmatrix} \mathbf{v}_j^T \mathbf{F}_1 \mathbf{w}_j - \rho_0 \mu & \mathbf{v}_j^T \mathbf{F}_1 \bar{\mathbf{w}}_l \\ \bar{\mathbf{v}}_l^T \mathbf{F}_1 \mathbf{w}_j & \bar{\mathbf{v}}_l^T \mathbf{F}_1 \bar{\mathbf{w}}_l - \rho_0 \mu \end{vmatrix} = 0 \quad (3.4)$$

$$\mathbf{F}_1 = \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{p}_0 + \epsilon \mathbf{e})}{d\epsilon} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \gamma} e_1 + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \delta} e_2 + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Omega} e_3$$

где производные вычисляются при $\epsilon = 0$ и $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$. Уравнение (3.4) можно записать в виде

$$\mu^2 + (x_1 + ix_2)\mu + y_1 + iy_2 = 0 \quad (3.5)$$

$$x_1 + ix_2 = -(\mathbf{v}_j^T \mathbf{F}_1 \mathbf{w}_j + \bar{\mathbf{v}}_l^T \mathbf{F}_1 \bar{\mathbf{w}}_l) / \rho_0$$

$$y_1 + iy_2 = (\mathbf{v}_j^T \mathbf{F}_1 \mathbf{w}_j \bar{\mathbf{v}}_l^T \mathbf{F}_1 \bar{\mathbf{w}}_l - \mathbf{v}_j^T \mathbf{F}_1 \bar{\mathbf{w}}_l \bar{\mathbf{v}}_l^T \mathbf{F}_1 \mathbf{w}_j) / \rho_0^2 \quad (3.6)$$

Неравенство $|\rho| < 1$ при учете выражения (3.3) принимает вид

$$|\rho| = |\rho_0(1 + \mu\epsilon + o(\epsilon))| = 1 + \epsilon \operatorname{Re} \mu + o(\epsilon) < 1 \quad (3.7)$$

Следовательно, условие устойчивости в первом приближении сводится к неравенству

$$\operatorname{Re} \mu < 0 \quad (3.8)$$

для обоих корней квадратного уравнения (3.5). Отсюда с использованием условий типа Рауса – Гурвица для полинома второго порядка с комплексными коэффициентами (3.5) имеем [1]

$$x_1 > 0 \quad (x_1 y_1 + x_2 y_2) x_1 - y_2^2 > 0 \quad (3.9)$$

Подставим в неравенства (3.9) величины x_1 , x_2 , y_1 , y_2 из (3.6). В результате элементарных преобразований с использованием выражений для собственных векторов (1.10), производных матрицы монодромии (2.2) и соотношений (1.2), (1.8), (1.9), (1.12), (3.1) условия устойчивости (3.9) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \pi(\eta_j + \eta_l) e_1 / \Omega_0 &> 0 \\ \pi^4 [e_1^2 (\eta_j + \eta_l)^2 (\eta_j \eta_l e_1^2 - \xi_1 e_2^2 + k^2 (e_3 + \sigma_+ e_2 / k)^2) - \\ - (\xi_2 e_2^2 + k(\eta_j - \eta_l)(e_3 + \sigma_+ e_2 / k) e_1)^2] / \Omega_0^4 &> 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

где коэффициенты η_j , η_l , ξ_1 , ξ_2 и σ_+ – вещественные величины, определяемые соотношениями

$$\eta_j = \mathbf{u}_j^T \mathbf{D} \mathbf{u}_j, \quad \xi_1 + i\xi_2 = \frac{c_{-k}^{(jl)} c_k^{(lj)}}{\omega_j \omega_l}, \quad \sigma_{\pm} = -\frac{\omega_l c_0^{(jj)} \pm \omega_j c_0^{(ll)}}{2\omega_j \omega_l} \quad (3.11)$$

$$c_k^{(lj)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_l^T \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}_j e^{ik\tau} d\tau$$

Заметим, что постоянные η_j и η_l положительны в силу предположения о положительной определенности матрицы диссипативных сил $\mathbf{D}$. Выразив вектор $\mathbf{e}$ из соотношения $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{e}\epsilon$, получим

$$\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3) = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) / \epsilon = (\gamma, \delta, \Delta\Omega) / \epsilon, \quad \Delta\Omega = \Omega - \Omega_0 \quad (3.12)$$

Подставив выражения (3.12) в (3.10) и сократив в полученных неравенствах положительные множители, найдем соотношения, определяющие в первом приближении область устойчивости

$$\begin{aligned} \gamma > 0, \quad \gamma^2 (\eta_j + \eta_l)^2 [\eta_j \eta_l \gamma^2 - \xi_1 \delta^2 + k^2 (\Delta\Omega + \sigma_+ \delta / k)^2] - \\ - [\xi_2 \delta^2 + k(\eta_j - \eta_l)(\Delta\Omega + \sigma_+ \delta / k) \gamma]^2 &> 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Первое условие (3.13) означает наличие диссипативных сил. Второе условие определяет форму области устойчивости в пространстве трех параметров $\mathbf{p} = (\gamma, \delta, \Omega)$.

Наконец, рассмотрим критическую частоту Ω_0 , удовлетворяющую условию

$$\omega_j - \omega_l = k\Omega_0, \quad j > l \quad (3.14)$$

при некотором натуральном числе k (разностный КР). В этом случае имеется двукратный мультипликатор $\rho_0 = \rho_j = \rho_l$, которому отвечают два линейно независимых собственных вектора $\mathbf{w}_j$ и $\mathbf{w}_l$ (1.10). Проводя аналогичные выкладки и заменяя ω_l на $-\omega_l$ во всех соотношениях, определим в первом приближении область устойчивости в окрестности точки $\mathbf{p}_0 = (0, 0, \Omega_0)$ в виде

$$\begin{aligned} \gamma > 0, \quad \gamma^2 (\eta_j + \eta_l)^2 [\eta_j \eta_l \gamma^2 + \xi_1 \delta^2 + k^2 (\Delta\Omega + \sigma_- \delta / k)^2] - \\ - [\xi_2 \delta^2 - k(\eta_j - \eta_l)(\Delta\Omega + \sigma_- \delta / k) \gamma]^2 &> 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

где вещественные коэффициенты η_j , η_l , ξ_1 , ξ_2 и σ_- определяются соотношениями (3.11).

Проанализируем геометрию областей неустойчивости (параметрического резонанса) в следующих, наиболее часто встречающихся случаях.

1°. Пусть матрица параметрического возбуждения $\mathbf{B}(\Omega t)$ симметрическая. Тогда величины c_{-k}^{jl} и c_k^{lj} — комплексно-сопряженные. Следовательно, $\xi_2 = 0$, а величина ξ_1 в (3.11) имеет вид

$$\xi_1 = \frac{c_{-k}^{(jl)} c_k^{(lj)}}{\omega_j \omega_l} = \frac{(a_k^{(jl)})^2 + (b_k^{(jl)})^2}{4\omega_j \omega_l} \geq 0 \quad (3.16)$$

$$\begin{Bmatrix} a_k^{(jl)} \\ b_k^{(jl)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_j^T \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}_l \begin{Bmatrix} \cos k\tau \\ \sin k\tau \end{Bmatrix} d\tau$$

В случае ОР и суммарного КР (3.1) из второго условия устойчивости (3.13) после сокращения положительного множителя получим неравенство, определяющее в первом приближении область параметрического резонанса (ОПР)

$$\eta_j \eta_l \gamma^2 - \xi_1 \delta^2 + 4k^2 \eta_j \eta_l (\eta_j + \eta_l)^{-2} (\Delta\Omega + \sigma_+ \delta/k)^2 \leq 0 \quad (3.17)$$

Так как величины η_j, η_l положительны, а величина ξ_1 неотрицательна, условие (3.17) при $\xi_1 \neq 0$ определяет внутреннюю часть конуса в трехмерном пространстве параметров $\mathbf{p} = (\gamma, \delta, \Omega)$ (фиг. 1). Ось конуса, образованная центрами сечений конуса плоскостями $\delta = \text{const}$, определяется уравнениями

$$\gamma = 0, \quad \Omega - \Omega_0 + \sigma_+ \delta/k = 0 \quad (3.18)$$

В случае параметрического возбуждения с нулевым средним $c_0^{(jj)} = c_0^{(ll)} = 0$ имеем $\sigma_+ = 0$ и, следовательно, ось конуса параллельна оси $O\delta$. Область устойчивости соответствует внешней части конуса.

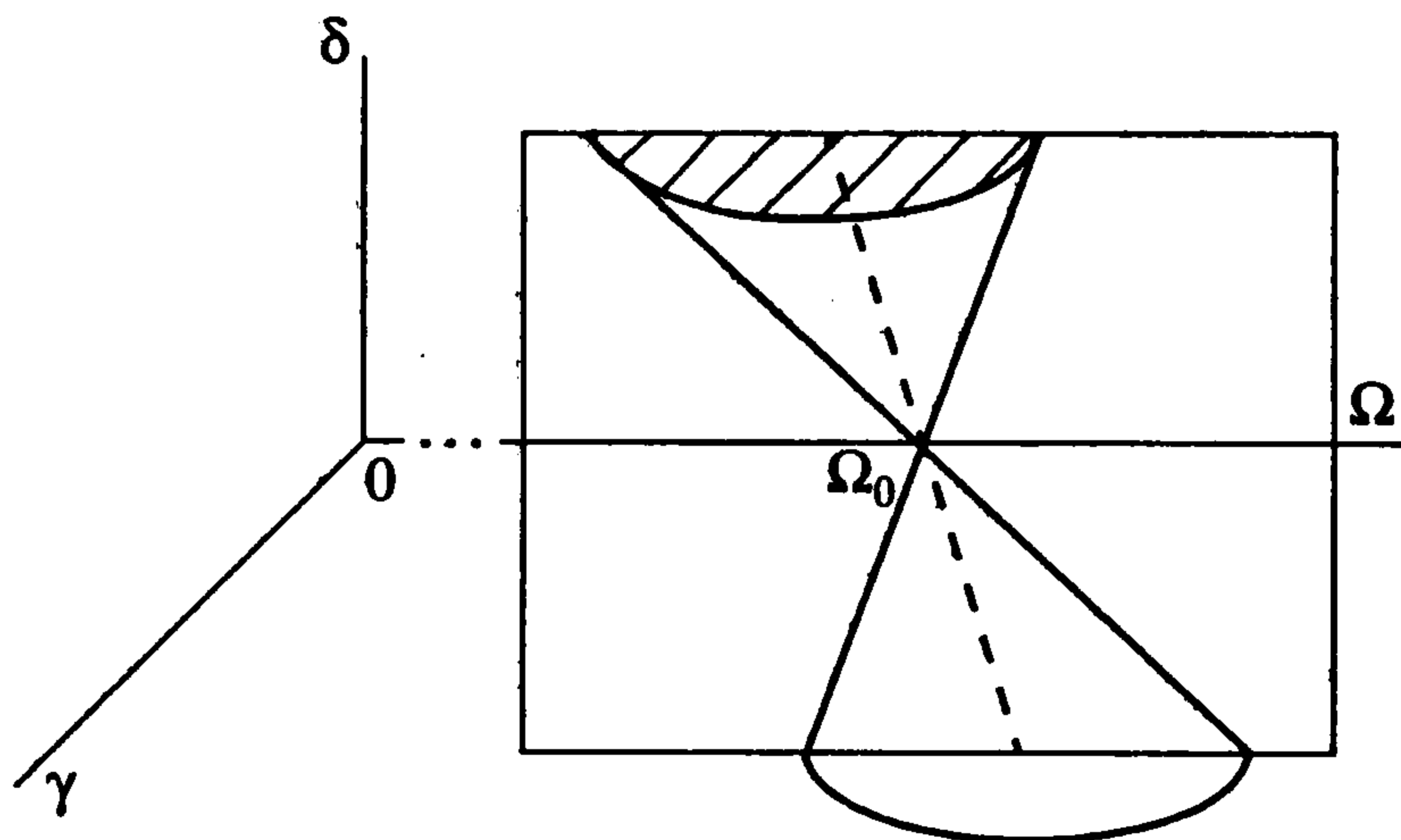
При увеличении числа k , определяющего номер резонанса (3.1), и фиксированных ω_j и ω_l коэффициент ξ_1 убывает как квадрат модуля коэффициента ряда Фурье. В результате конус неустойчивости быстро сужается с увеличением k , а ось конуса (3.18) выпрямляется. Сечение конуса плоскостью $\delta = \text{const}$ (при фиксированной амплитуде параметрического возбуждения) представляет собой эллипс, который при увеличении k сплющивается в направлении оси $O\Omega$ (фиг. 2). Это связано с наличием множителя k^2 в (3.17). Так как знаменатель в соотношениях (3.11) содержит произведение частот $\omega_j \omega_l$, с увеличением j и l характерно уменьшение величин ξ_1 и $|\sigma_+|$. В результате конус неустойчивости сужается, а его ось выпрямляется при увеличении j и l , т.е. при резонансах на более высоких частотах.

В случае, когда периодическая матрица-функция $\mathbf{B}(\tau)$ имеет конечное число членов в разложении Фурье, начиная с некоторого k , коэффициент ξ_1 равен нулю. Это означает вырождение ОПР в первом приближении (3.17) в прямую (3.18). Для анализа формы ОПР в этом случае необходимо рассмотреть приближения более высокого порядка. Такого рода вырождения хорошо известны для уравнения Матье, где граница ОПР имеет точки возврата различного порядка [10]. Из полученных выше результатов следует, что такое вырождение имеет место и в трехмерном пространстве параметров при наличии диссипативных сил (ОПР отсутствует либо образует узкие клинья с касательными лучами (3.18) при $\delta > 0$ и $\delta < 0$).

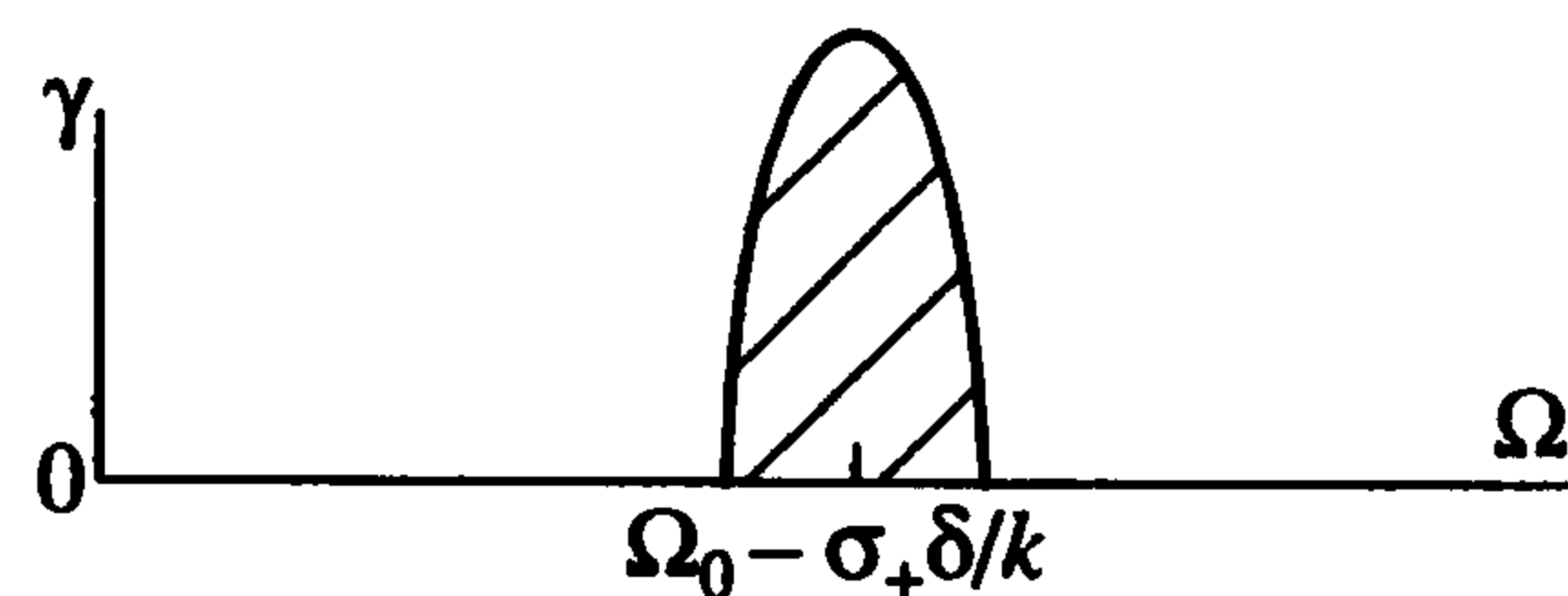
В случае разностного КР (3.14) из условия устойчивости (3.15) найдем ОПР в виде неравенства

$$\eta_j \eta_l \gamma^2 + \xi_1 \delta^2 + 4k^2 \eta_j \eta_l (\eta_j + \eta_l)^{-2} (\Delta\Omega + \sigma_- \delta/k)^2 \leq 0 \quad (3.19)$$

Заметим, что неравенства (3.17) и (3.19) отличаются только знаком при втором слагаемом и коэффициентами $\sigma_{\pm}$. Поэтому при $\xi_1 \neq 0$ (невыврожденный случай) лишь



Фиг. 1



Фиг. 2

одно из этих неравенств определяет конус, а другое неравенство дает точку $\gamma = \delta = \Delta\Omega = 0$ (отсутствие резонанса). Следовательно, при положительном ξ_1 область разностного КР отсутствует. Отметим, что для гамильтоновых систем (без диссипации) отсутствие КР разностного типа было известно [1].

2°. Пусть матрица параметрического возбуждения имеет вид

$$\mathbf{B}(\Omega t) = \varphi(\Omega t) \mathbf{B}_0 \quad (3.20)$$

где $\mathbf{B}_0$ – произвольная матрица, не зависящая от времени, $\varphi(\tau)$ – 2π -периодическая скалярная функция. В этом случае произведение $c_{-k}^{jl} c_k^{lj}$ в (3.11) является действительной величиной. Следовательно, $\xi_2 = 0$, а коэффициент ξ_1 равен

$$\xi_1 = c_{jl} \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{4\omega_j \omega_l} \quad (3.21)$$

$$c_{jl} = \mathbf{u}_j^T \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^T \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_j, \quad \begin{cases} \alpha_k \\ \beta_k \end{cases} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \begin{cases} \cos k\tau \\ \sin k\tau \end{cases} d\tau$$

Второе условие устойчивости (3.13) в случае ОР и суммарного КР (3.1) приводит к ОНР (3.17). В случае разностного КР (3.14) ОНР имеет вид (3.19). В невырожденном случае $\xi_1 \neq 0$ знак ξ_1 совпадает со знаком c_{jl} . В случае ОР $c_{jj} \geq 0$, поэтому при $c_{jj} \neq 0$ существует область ОР, описываемая конусом (3.17). А наличие областей КР зависит от знака c_{jl} : при $c_{jl} > 0$ существует только область суммарного КР, а при $c_{jl} < 0$ – лишь область разностного КР. Форма ОНР (конуса) зависит от номера резонанса k и частот ω_j, ω_l так же, как и в описанном выше случае 1°. При $c_{jl} = 0$ область резонанса отсутствует либо вырождена (первое приближение дает прямую).

Полученные результаты сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 1. Система (1.1) при симметрической матрице $\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{B}^T(\tau)$ подвержена лишь основным резонансам (1.13) и комбинационным резонансам суммарного типа (1.14). В случае матрицы $\mathbf{B}(\tau) = \varphi(\tau) \mathbf{B}_0$, где $\varphi(\tau)$ – периодическая скалярная функция, а $\mathbf{B}_0$ – стационарная матрица, реализуются основные резонансы (1.13) и в зависимости от знака постоянной c_{jl} в (3.21) либо суммарные комбинационные резонансы ($c_{jl} > 0$), либо разностные комбинационные резонансы ($c_{jl} < 0$). В трехмерном пространстве параметров γ, δ, Ω области основного и суммарного комбинационного резонансов описываются конусами (3.17), а области разностного комбинационного резонанса – конусами (3.19).

Рассмотренные случаи 1° и 2° соответствуют наиболее распространенным видам параметрического воздействия. В других случаях можно воспользоваться условиями устойчивости (3.13) и (3.15) для построения трехмерных ОНР.

4. Влияние диссипативных сил на области параметрического резонанса. Зафиксируем значение параметра $\gamma > 0$ и рассмотрим случай, когда выполняется условие $\xi_2 = 0$, например, случаи 1° или 2° из разд. 3. Тогда ОПР в первом приближении имеют вид (3.17) и (3.19). В зависимости от знака величины ξ_1 ОПР либо отсутствует, либо заключена внутри гипербола (сечений конуса плоскостью $\gamma = \text{const}$) на плоскости двух параметров δ, Ω (фиг. 3). Асимптоты гипербол определяются соотношениями

$$|\xi_1|^{1/2} \delta \pm 2k(\eta_j \eta_l)^{1/2} (\eta_j + \eta_l)^{-1} (\Delta\Omega + \sigma_s \delta / k) = 0 \quad (4.1)$$

где индекс s означает $+$ для резонансов (3.1) и $-$ для резонансов (3.14).

Отметим, что $\sigma_+ = \sigma_- = 0$ в случае равенства нулю среднего значения матрицы $B(\Omega t)$ на периоде. Увеличение параметра γ , определяющего величину диссипативных сил, приводит к уменьшению ОПР на плоскости δ, Ω .

Используя выражения (3.17) или (3.19) в зависимости от типа резонанса, найдем в первом приближении минимальную (критическую) амплитуду возбуждения $|\delta|$, при которой возможен параметрический резонанс

$$\delta_{\pm} = \pm |\eta_j \eta_l / \xi_1|^{1/2} \gamma \quad (4.2)$$

Величины $\delta_{\pm}$ соответствуют значениям частоты возбуждения

$$\Omega_{\pm} = \Omega_0 - \sigma_s \delta_{\pm} / k \quad (4.3)$$

где Ω_0 – резонансная частота (3.1) или (3.14) (фиг. 3).

Теорема 2. Граница области параметрического резонанса при малых фиксированных значениях параметра диссипации $\gamma > 0$ в случае $\xi_2 = 0$ описывается в первом приближении гиперболой (3.17), соответствующей основному и суммарному комбинационному резонансам ($\xi_1 > 0$), и гиперболой (3.19), соответствующей разностному комбинационному резонансу ($\xi_1 < 0$). Наименьшие (критические) значения амплитуды возбуждения и соответствующие частоты определяются соотношениями (4.2) и (4.3).

Используя соотношения (3.17), (3.19), исследуем предел ОПР при $\gamma \rightarrow +0$, что означает введение бесконечно малой диссипации. В первом приближении для случая ОР (3.1) ($j = l$) данная область имеет вид

$$\xi_1 \delta^2 > k^2 (\Delta\Omega + \sigma_+ \delta / k)^2 \quad (4.4)$$

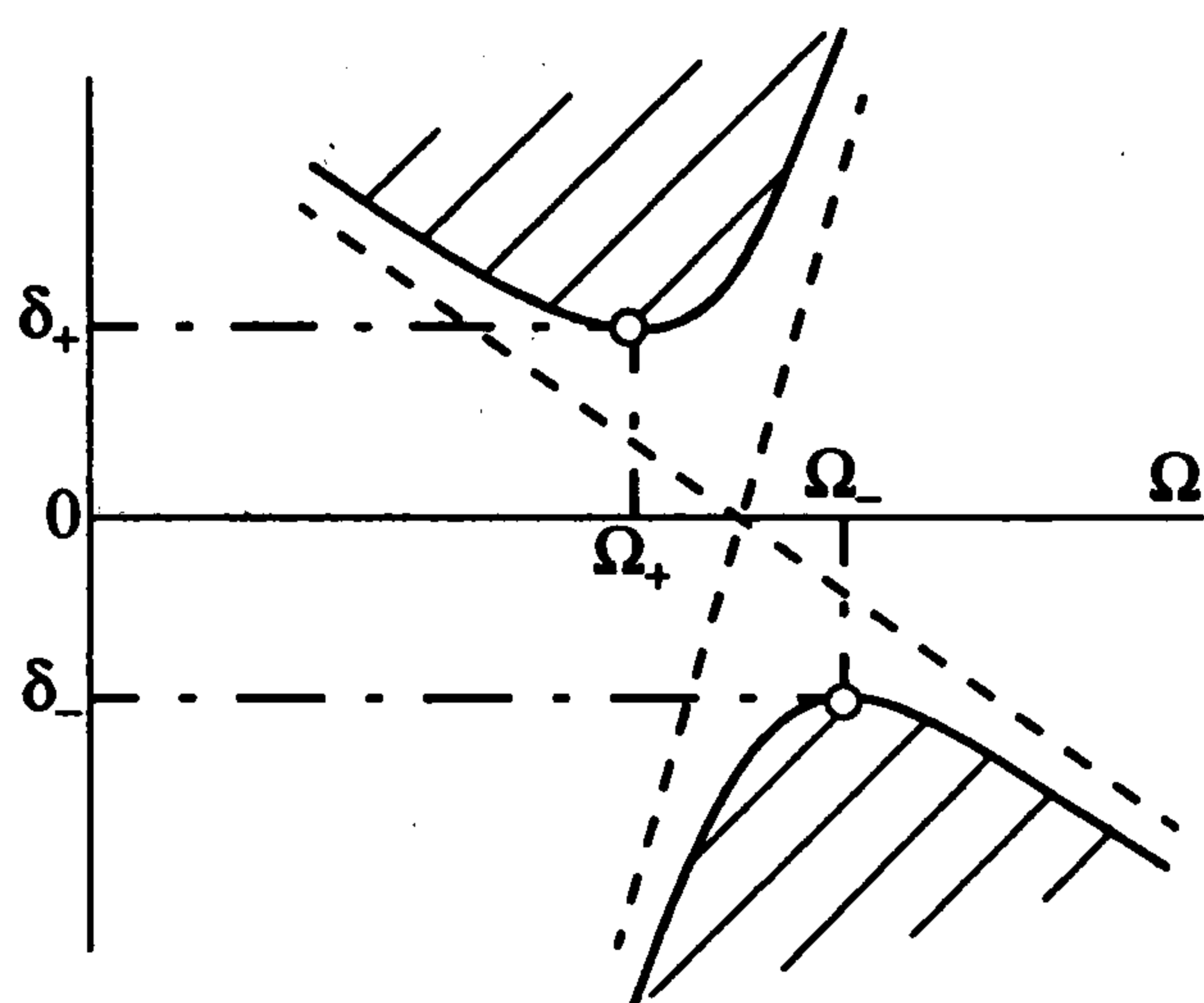
В случае суммарного (3.1) ($s = +$) или разностного (3.14) ($s = -$) КР эта область определяется соотношением

$$s \xi_1 \delta^2 > 4k^2 \eta_j \eta_l (\eta_j + \eta_l)^{-2} (\Delta\Omega + \sigma_s \delta / k)^2 \quad (4.5)$$

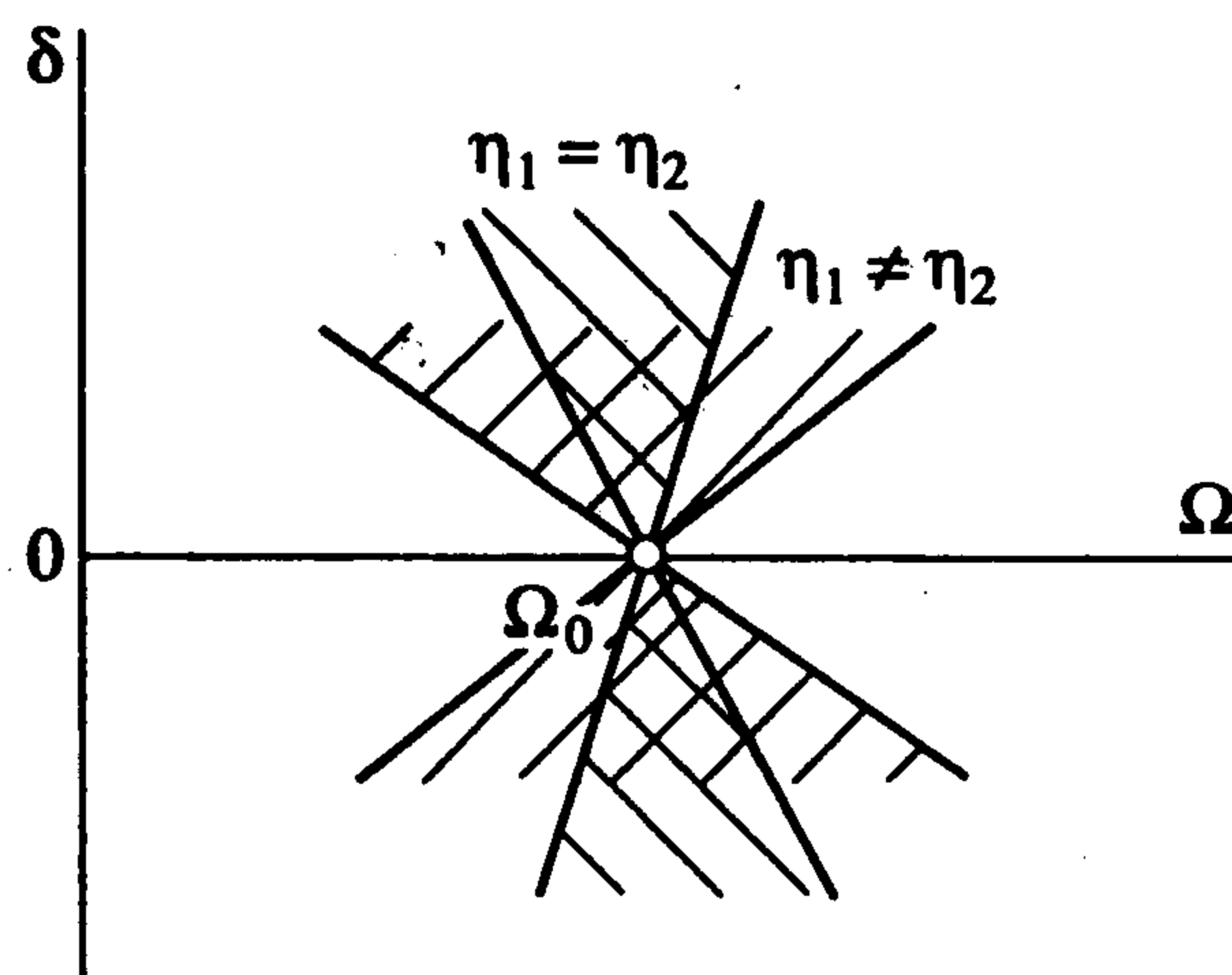
Видно, что область КР в пределе $\gamma \rightarrow +0$ зависит от отношения η_j / η_l величин диссипативных сил, относящихся к j -й и l -й формам собственных колебаний невозмущенной системы. При $\eta_j = \eta_l$ область КР минимальна, а при $\eta_j \ll \eta_l$ или $\eta_j \gg \eta_l$ – максимальна и составляет два вертикальных угла, величина которых стремится к π при $\eta_j / \eta_l \rightarrow 0$ или $\eta_j / \eta_l \rightarrow \infty$ (фиг. 4).

Положим $\gamma = 0$ и рассмотрим случай $B(\tau) = B^T(\tau)$ или $B(\tau_0 + \tau) = B(\tau_0 - \tau)$, когда характеристический многочлен матрицы монодромии является возвратным [1]. В этом случае система устойчива (не асимптотически) тогда и только тогда, когда все мультипликаторы полупростые (число собственных векторов равно алгебраической кратности мультипликатора) и лежат на единичной окружности. Используя соотношения (3.3), (3.5), найдем условие устойчивости для резонансов (3.1), (3.14) в виде

$$\text{Re } \mu = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad x_2^2 + 4y_1 > 0 \quad (4.6)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Подставив значения величин x_1, x_2, y_1, y_2 из (3.6) и используя соотношения (1.2), (1.8) – (1.12), (2.2), а также предположение $\xi_2 = 0$, найдем ОПР в первом приближении

$$s\xi_1\delta^2 \geq k^2(\Delta\Omega + \sigma_s\delta/k)^2 \quad (4.7)$$

где $s = +$ для резонансов (3.1) и $s = -$ для резонансов (3.14).

Из сравнения неравенств (4.4) и (4.7) видно, что область устойчивости для системы с бесконечно малой диссипацией ($\gamma \rightarrow +0$) и системы без диссипации ($\gamma = 0$) совпадают в случае ОР (3.1) ($j = l$). Однако в случае КР области (4.5) и (4.7) совпадают только при $\eta_j = \eta_l$ и различны при $\eta_j \neq \eta_l$, причем область КР системы с диссипацией всегда шире. При равенстве нулю среднего значения периодической матрицы $B(\tau)$ величины $\sigma_+ = 0$ и $\sigma_- = 0$. В этих случаях формулы (4.4), (4.5) и (4.7) совпадают с полученными ранее [1]. Увеличение области КР при введении бесконечно малой диссипации было обнаружено в различных периодических механических системах [1, 3, 11]. Этот эффект аналогичен известному парадоксу дестабилизации неконсервативной системы малыми диссипативными силами в случае автономных систем [12].

5. Система с одной степенью свободы. В случае одной степени свободы ($m = 1$) систему (1.1) можно записать в виде уравнения Хилла с демпфированием

$$\ddot{y} + \gamma\dot{y} + \omega^2(1 + \delta\phi(\Omega t))y = 0 \quad (5.1)$$

Наличие лишь одной собственной частоты ω означает отсутствие КР. ОР имеет место при $\Omega_0 = 2\omega/k$ ($k = 1, 2, \dots$), а соответствующие трехмерные области ОР (3.17) принимают вид

$$\gamma^2 - \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{4}\omega^2\delta^2 + k^2\left(\Delta\Omega - \frac{\alpha_0\omega}{2k}\delta\right)^2 \leq 0 \quad (5.2)$$

где α_k и β_k – коэффициенты Фурье функции $\phi(\tau)$ из (3.21). При фиксированных малых значениях $\gamma > 0$ критические амплитуды и частоты возбуждения, согласно соотношениям (4.2), (4.3), имеют вид

$$\delta_{\pm} = \pm \frac{2\gamma}{\omega(\alpha_k^2 + \beta_k^2)^{1/2}}, \quad \Omega_{\pm} = \Omega_0 + \frac{\alpha_0\omega}{2k}\delta_{\pm} \quad (5.3)$$

В случае $\phi(\tau) = \cos \tau$ (уравнение Матье с демпфированием) и $k = 1$ выражения (5.2), (5.3) при некоторых преобразованиях совпадают с приближенными формулами для первой области ОР и критической амплитуды, приведенными ранее [3].

6. Примеры. 1°. Рассмотрим задачу В.В. Болотина [3, 13] о динамической устойчивости плоской формы изгиба упругой балки (фиг. 5). Предполагается, что балка длиной l свободно оперта по концам и нагружена в плоскости наибольшей жесткости периодическими моментами $M(\Omega t) = \delta \varphi(\Omega t)$, где $\varphi(\tau)$ – 2π -периодическая функция. Изгибно-крутильные колебания, происходящие из этой плоскости, описываются уравнениями [13]

$$\begin{aligned} m\ddot{w} + \gamma m d_1 \dot{w} + EJ w'''' + \delta \varphi(\Omega t) \theta'' &= 0 \\ m r^2 \ddot{\theta} + \gamma m r^2 d_2 \dot{\theta} + \delta \varphi(\Omega t) w'' - GI \theta'' &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $w(x, t)$ – поперечный прогиб балки, $\theta(x, t)$ – угол поворота сечения, EJ , GI – жесткости балки на изгиб и кручение соответственно, m – погонная масса балки, r – радиус инерции поперечного сечения, γ – параметр диссипативных сил (вязкого трения), d_1 , d_2 – фиксированные постоянные, определяющие величину сил трения по отношению к изгибу и кручению, точка означает производную по времени t , штрих – производную по координате x . Граничные условия имеют вид

$$x = 0, l: \quad w = w'' = \theta = 0 \quad (6.2)$$

Решение системы (6.1), (6.2) ищет в виде рядов [3]

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (6.3)$$

где $W_n(t)$ и $\Theta_n(t)$ – неизвестные функции времени. Подставив ряды (6.3) в уравнения (6.1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $W_n(t)$ и $\Theta_n(t)$ вида (1.1), где

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \text{diag}\{1, 1\}, \quad \mathbf{D} = \text{diag}\{d_1, d_2\}, \quad \mathbf{C} = \text{diag}\{\omega_{n1}^2, \omega_{n2}^2\} \\ \mathbf{B}(\Omega t) &= \varphi(\Omega t) \begin{vmatrix} 0 & -\chi^2/m \\ -\chi^2/(r^2 m) & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{vmatrix} W_n \\ \Theta_n \end{vmatrix} \\ \omega_{n1} &= \chi^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad \omega_{n2} = \frac{\chi}{r} \sqrt{\frac{GI}{m}}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \chi = \pi \frac{n}{l} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Здесь ω_{n1} и ω_{n2} – собственные частоты изгибных и крутильных колебаний балки соответственно, им отвечают собственные векторы

$$u_{n1} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad u_{n2} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

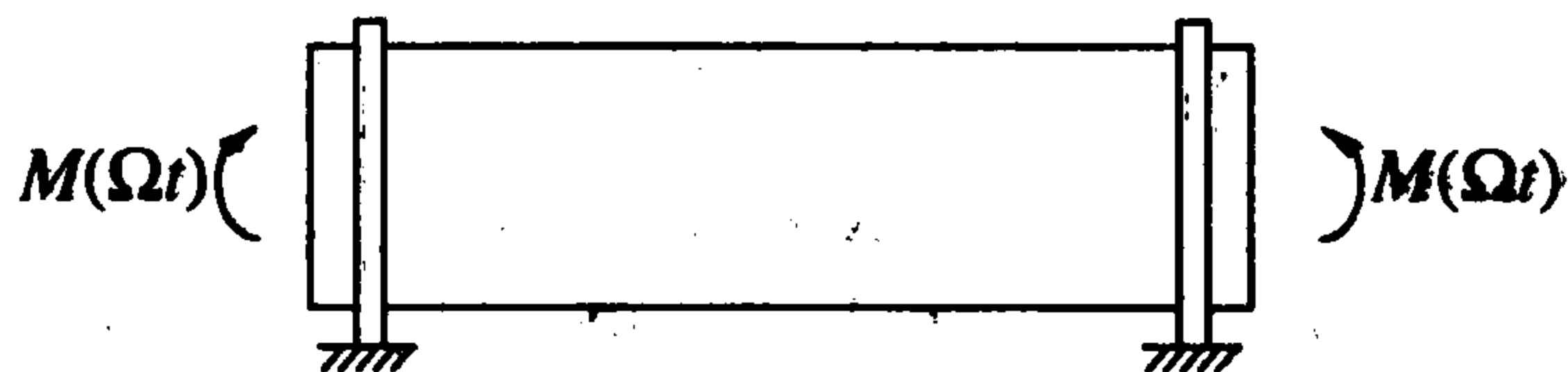
Исследуем устойчивость системы (1.1), (6.4) при некотором фиксированном значении n . Так как $\mathbf{B}(\Omega t) = \varphi(\Omega t) \mathbf{B}_0$, где $\mathbf{B}_0$ – фиксированная матрица, то данная система относится к типу, рассмотренному в пункте 2° разд. 3. Величины c_{jl} , вычисленные по формуле (3.21), имеют вид

$$c_{11} = c_{22} = 0, \quad c_{12} = \frac{\pi^4 n^4}{l^4 r^2 m^2} > 0$$

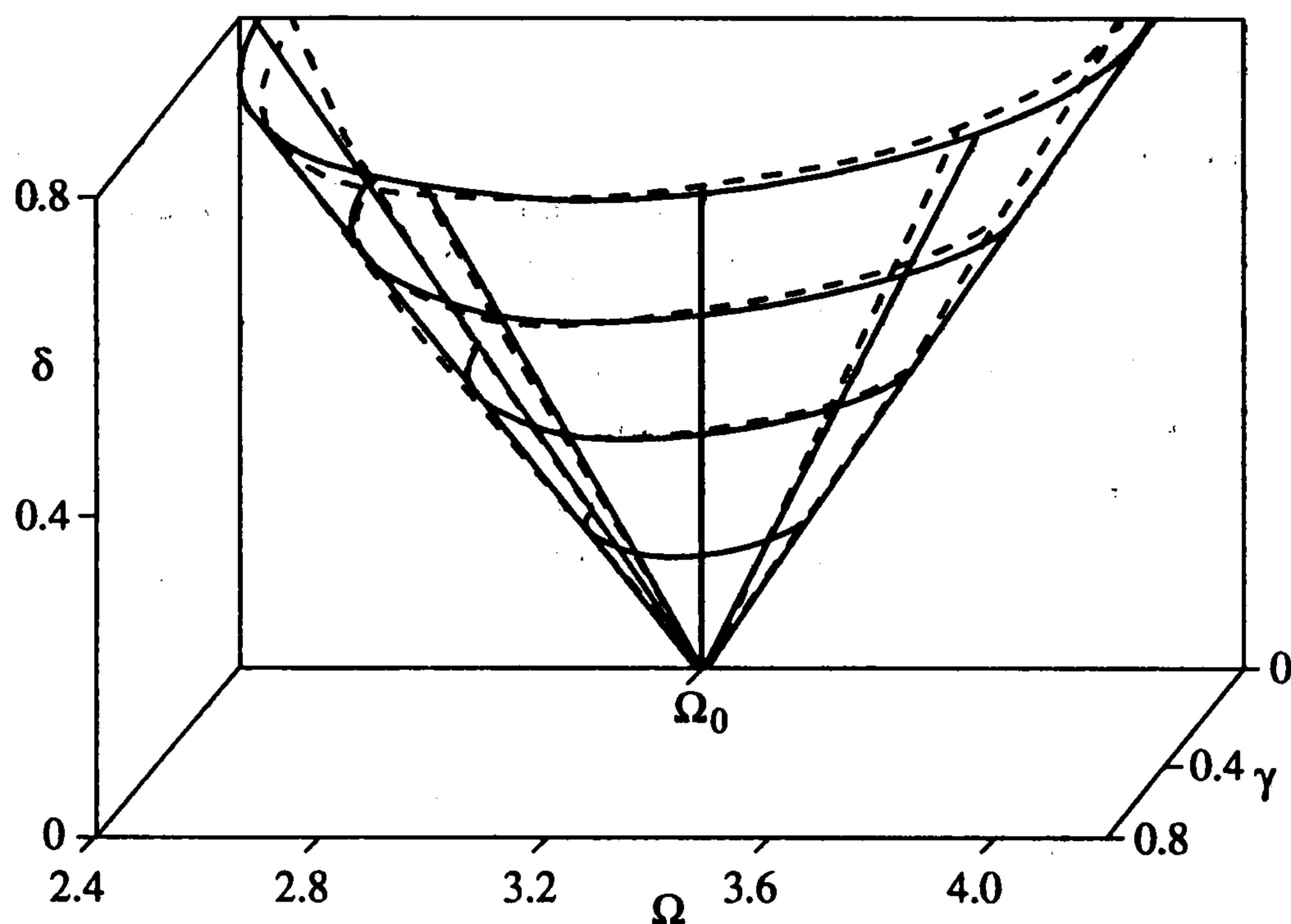
Следовательно, области разностного КР отсутствуют, а области ОР вырождены (их анализ требует вычисления приближений более высокого порядка). Согласно неравенству (3.17) области суммарного КР при частотах, близких к $\Omega_0 = (\omega_{n1} + \omega_{n2})/k$ ($k = 1, 2, \dots$), имеют вид

$$d_1 d_2 \gamma^2 - \frac{c_{12}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)}{4\omega_{n1}\omega_{n2}} \delta^2 + 4k^2 \frac{d_1 d_2}{(d_1 + d_2)^2} \Delta \Omega^2 \leq 0 \quad (6.5)$$

Величины α_k и β_k определены в (3.21).



Фиг. 5



Фиг. 6

Численные расчеты проведены для случая

$$n = 1, \quad \varphi(\tau) = \cos \tau, \quad d_1 = d_2 = 1, \quad \omega_{n1} = 1c^{-1}, \quad \omega_{n2} = \sqrt{5}c^{-1}$$

$$l^2 m = \pi^2 / 4 \text{ кг} \cdot \text{см}, \quad r^2 = 4 / \sqrt{5} \text{ см}^2$$

На фиг. 6 сплошными линиями изображена граница области первого КР ($k = 1$) в первом приближении (6.5). Штриховыми линиями показана граница области КР, полученная численно путем вычисления матрицы монодромии при разных значениях параметров γ , δ , Ω . Для интегрирования уравнений (1.3) использовался метод Рунге – Кутты. Из фиг. 6 следует хорошее соответствие точной (полученной численно) и приближенной областей КР вплоть до значений амплитуды $\delta \approx 0.8$.

2°. В качестве второго примера рассмотрим упругий стержень длиной l переменного сечения, нагруженный продольной периодической силой $P = P_0 + \delta \varphi(\Omega t)$, где δ и Ω – амплитуда и частота возбуждения, P_0 – фиксированное значение, меньшее критической эйлеровой силы P_E . Уравнение малых колебаний стержня имеет вид [3]

$$m(x)\ddot{w} + \gamma s(x)\dot{w} + [P_0 + \delta \varphi(\Omega t)]w'' + (EJ(x)w'')' = 0 \quad (6.6)$$

где $w(x, t)$ – прогиб стержня, $EJ(x)$ – жесткость, $m(x)$ – погонная масса, $s(x)$ – толщина стержня, γ – коэффициент вязкого трения. Рассмотрим случай упругого защемления стержня с обоих концов с коэффициентами жесткости $c_1 \geq 0$ и $c_2 \geq 0$. Тогда граничные условия имеют вид

$$w(0) = w(l) = 0 \quad (-c_1 w' + EJw'')_{x=0} = (c_2 w' + EJw'')_{x=l} = 0 \quad (6.7)$$

Предельные случаи $c_1 = c_2 = 0$ и $c_1^{-1} = c_2^{-1} = 0$ соответствуют шарнирному и жесткому опираниям концов.

Решение системы (6.6), (6.7) будем искать в виде ряда

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) u_n(x) \quad (6.8)$$

где $W_n(t)$ – неизвестные функции времени, $u_n(x)$ – формы свободных колебаний балки, сжатой постоянной силой P_0 , которые определяются из задачи на собственные значения (ω_n – частоты колебаний)

$$(EJ(x)u_n'')'' + P_0 u_n'' - \omega_n^2 m(x) u_n = 0 \quad (6.9)$$

$$u_n(0) = u_n(l) = 0 \quad (-c_1 u_n' + EJ u_n'')_{x=0} = (c_2 u_n' + EJ u_n'')_{x=l} = 0 \quad (6.10)$$

Собственные функции удовлетворяют условиям ортонормированности

$$\int_0^l m u_i u_j dx = \delta_{ij} \quad (6.11)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Подставив ряд (6.8) в уравнение (6.6) и используя уравнение (6.9), получим равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} [m \ddot{W}_n u_n + \gamma s \dot{W}_n u_n + \delta \varphi(\Omega t) W_n u_n'' + \omega_n^2 m W_n u_n] = 0$$

умножая которое на $u_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots$), интегрируя по x от 0 до l и используя интегрирование по частям и условия (6.10), (6.11), получим систему уравнений (1.1), где матрицы M и C диагональные, а D и $B(\Omega t)$ симметрические:

$$M = \|\delta_{ij}\|, \quad C = \|\omega_i^2 \delta_{ij}\|, \quad D = \|d_{ij}\|, \quad B = \varphi(\Omega t) \|b_{ij}\|$$

$$d_{ij} = \int_0^l s u_i u_j dx, \quad b_{ij} = -\int_0^l u_i' u_j' dx \quad (d_{jj} > 0, \quad b_{jj} < 0) \quad (6.12)$$

Исследуем устойчивость системы при малых δ, γ . В соответствии с теоремой 1 возможны лишь основные и суммарные КР. Собственный вектор u_i , отвечающий частоте ω_i , имеет все нулевые компоненты, кроме единицы, стоящей на i -м месте. Уравнение первого приближения для трехмерных областей ОР ($\Omega_0 = 2\omega_j/k$) и КР ($\Omega_0 = (\omega_j + \omega_l)/k, j > l$) (3.17) при учете соотношений (3.21), (6.12) принимает вид

$$d_{jj} d_{ll} \gamma^2 - \frac{b_{jl}^2 (\alpha_k^2 + \beta_k^2)}{4\omega_j \omega_l} \delta^2 + 4k^2 \frac{d_{jj} d_{ll}}{(d_{jj} + d_{ll})^2} \left(\Delta \Omega - \frac{\alpha_0 (\omega_j b_{ll} + \omega_l b_{jj})}{4k \omega_j \omega_l} \delta \right)^2 \leq 0 \quad (6.13)$$

Величины α_k и β_k определены в (3.21). Критические значения амплитуды и частоты (4.2), (4.3) при фиксированном малом $\gamma > 0$ таковы:

$$\delta_{\pm} = \pm \left(\frac{4\omega_j \omega_l d_{jj} d_{ll}}{b_{jl}^2 (\alpha_k^2 + \beta_k^2)} \right)^{1/2} \gamma, \quad \Omega_{\pm} = \Omega_0 + \frac{\alpha_0 (\omega_j b_{ll} + \omega_l b_{jj})}{4k \omega_j \omega_l} \delta_{\pm} \quad (6.14)$$

В случае однородного стержня, жестко или шарнирно закрепленного на концах, $k = 1$ и продольном нагружении вида $P = \delta \cos \Omega t$ соотношения (6.13), (6.14) согласуются с формулами, приведенными ранее [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
2. Hsu C.S. On the parametric excitation of a dynamic system having multiple degrees of freedom // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1963. V. 30. № 3. P. 367–372.
3. Вибрации в технике. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.
4. Шмидт Г. Параметрические колебания. М.: Мир, 1978. 336 с.
5. Челомей С.В. О динамической устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252. № 2. С. 307–310.
6. Seyranian A.P., Solem F., Pedersen P. Stability analysis for multiparameter linear periodic systems // Archive Appl. Mech. 1999. V. 69. № 3. P. 160–180.
7. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. О границах области параметрического резонанса // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 6. С. 947–962.
8. Сейранян А.П. Области резонанса для уравнения Хилла с демпфированием // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 1. С. 44–47.
9. Сейранян А.П. Анализ чувствительности собственных значений и развитие неустойчивости // Strojnický časopis. 1991. V. 42. № 3. P. 193–208.
10. Арнольд В.И. Замечания о теории возмущений для задач типа Матье // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. Вып. 4. С. 189–203.
11. Iwatsubo T., Sugiyama Y., Ogino S. Simple and combination resonances of columns under periodic axial loads // J. Sound Vibration. 1974. V. 33. № 2. P. 211–221.
12. Сейранян А.П. О стабилизации неконсервативных систем диссипативными силами и неопределенности критической нагрузки // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 3. С. 323–326.
13. Bolotin V.V. Dynamic stability of structures // Nonlinear Stability of Structures. Theory and Computational Techniques / Eds. A.N. Kounadis and W.B. Kratzig, Wien; New York: Springer, 1995. P. 3–72.

Москва

Поступила в редакцию
14.XII.2000