

УДК 531.36

© 20001 г. Т.В. Руденко

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСТАТА НА АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Изучается задача о движении без скольжения динамически симметричного гиростата на неподвижной горизонтальной плоскости. Показано, что уравнения Чаплыгина выражают в проекциях на оси полуподвижной системы координат теорему о кинетическом моменте гиростата относительно точки контакта с плоскостью. При помощи обобщенной теоремы Рауса исследуются всевозможные стационарные движения тяжелого симметричного гиростата на абсолютно шероховатой плоскости, включая случай, когда угол нутации равен нулю. Исследуется влияние ротора на устойчивость стационарных движений. Рассматривается случай, когда корпус гиростата – тело с круговым основанием, в частности диск с ротором. Показано, что вращающийся ротор оказывает стабилизирующее влияние на равновесие гиростата и дестабилизирующее влияние на качение гиростата по прямой при условии, что осевой кинетический момент гиростата равняется нулю.

С.А. Чаплыгин вывел уравнения движения неголономной системы в обобщенных координатах для систем, называемых системами Чаплыгина [1]. Решая далее задачу о движении без скольжения тяжелого симметричного гиростата – тела вращения с ротором, он указал ряд частных случаев, когда интегрирование уравнений движения приводится к квадратурам, и сделал ряд замечаний о характере движения гиростата в этих случаях. Ниже исследуется устойчивость отмеченных им стационарных движений.

Была исследована [2] устойчивость качения диска с ротором по абсолютно шероховатой плоскости, а также получено необходимое и достаточное условие устойчивости перманентных вращений гиростата вокруг оси симметрии [3]. Получено [4] необходимое и достаточное условие устойчивости стационарных движений гиростата в предположении, что угол нутации отличен от нуля. При исследовании устойчивости прямым методом Ляпунова существенно использовалось представление неизвестных первых интегралов в виде гипергеометрических рядов.

Было исследовано движение на абсолютно шероховатой плоскости тяжелого тела, распределение масс и форма поверхности которого произвольны [6, 7], а также некоторых частных случаев тел [5, 8, 9]. Исследована [10] устойчивость стационарных вращений вокруг вертикали тяжелого гиростата произвольной формы. Изложена [11] теория движения тел, в частности, по абсолютно шероховатой плоскости. Найдены условия устойчивости всех стационарных движений тела вращения, за исключением вращения вокруг оси симметрии [12].

Ниже продолжено изучение динамики системы на абсолютно шероховатой плоскости. Предложенное [13] обобщение теоремы Рауса для исследования устойчивости стационарных движений консервативных неголономных систем Чаплыгина позволяет полностью изучить устойчивость стационарных движений гиростата и обобщить ряд ранее полученных результатов.

1. Некоторые геометрические и кинематические формулы. Рассмотрим движение без скольжения на горизонтальной плоскости тяжелого твердого тела, ограниченного выпуклой поверхностью вращения, причем ось симметрии поверхности тела совпадает с осью его динамической симметрии. Присоединим к телу ротор, который

Из уравнений (1.1) находим

$$\eta = -h \sin \vartheta - h' \cos \vartheta, \quad \zeta = -h \cos \vartheta + h' \sin \vartheta \quad (1.2)$$

Дифференцируя равенства (1.2) по ϑ , получим

$$\eta' = -[h(\vartheta) + h''(\vartheta)] \cos \vartheta, \quad \zeta' = [h(\vartheta) + h''(\vartheta)] \sin \vartheta \quad (1.3)$$

Пусть p, q, r – проекции на оси ξ, η, ζ вектора ω мгновенной угловой скорости тела. Кинематические уравнения Эйлера имеют вид

$$p = \dot{\vartheta}, \quad q = \dot{\psi} \sin \vartheta, \quad r = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi} \quad (1.4)$$

Проекции вектора скорости центра масс G тела на оси системы $O'xyz$ определяются из условия качения тела по плоскости без скольжения

$$\begin{aligned} \dot{x}_G &= m_{11} \dot{\vartheta} + m_{12} \dot{\phi} + m_{13} \dot{\psi}, \quad \dot{y}_G = m_{21} \dot{\vartheta} + m_{22} \dot{\phi} + m_{23} \dot{\psi} \\ \dot{z}_G &= -(\eta \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta) \dot{\vartheta} \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} m_{11} &= -\sin \psi (\eta \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta), \quad m_{21} = \cos \psi (\eta \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta) \\ m_{12} &= \eta \cos \psi, \quad m_{22} = \eta \sin \psi \\ m_{13} &= \cos \psi (\eta \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta), \quad m_{23} = \sin \psi (\eta \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Первые два равенства (1.5) представляют собой неинтегрируемые кинематические связи, а последнее – следствие геометрической связи $z_G = h(\vartheta)$. Уравнения негolonомных связей представим в виде [13]

$$\dot{y} = M \dot{x} \quad (1.7)$$

$$x = \{\vartheta, \phi, \psi\}, \quad y = \{x_G, y_G\}; \quad M = \|m_{\kappa i}\|, \quad \kappa = 1, 2; \quad i = 1, 2, 3$$

Здесь $\dot{x}$ – независимые обобщенные скорости, $\dot{y}$ – зависимые.

Проекции абсолютной скорости точки O на оси $Gx_1y_1z_1$ имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_{10} &= \eta \cos \psi \dot{\phi} - \sin \psi (\eta' \cos \vartheta - \zeta' \sin \vartheta) \dot{\vartheta} \\ \dot{y}_{10} &= \eta \sin \psi \dot{\phi} + \cos \psi (\eta' \cos \vartheta - \zeta' \sin \vartheta) \dot{\vartheta} \\ \dot{z}_{10} &= (\eta' \sin \vartheta + \zeta' \cos \vartheta) \dot{\vartheta} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для кинетической энергии и потенциальной энергии гиростата имеем выражения

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{\xi}_G^2 + \dot{\eta}_G^2 + \dot{\zeta}_G^2] + \frac{1}{2} [A(p^2 + q^2) + Cr^2] + \frac{1}{2} J(\dot{\delta} + r)^2 \quad (1.9)$$

$$V = mgh(\vartheta)$$

Проекции вектора скорости центра масс G на оси системы $G\xi\eta\zeta$ имеют вид

$$\dot{\xi}_G = \eta(\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi}) - \zeta \dot{\psi} \sin \vartheta, \quad \dot{\eta}_G = \zeta \dot{\vartheta}, \quad \dot{\zeta}_G = -\eta \dot{\vartheta}$$

Предположим, что обобщенные силы, действующие на ротор, равны нулю. Из уравнения движения ротора следует первый интеграл

$$\dot{\delta} + r = \Omega = \text{const} \quad (1.10)$$

выражающий постоянство проекции на ось вращения ротора его мгновенной абсолютной угловой скорости вращения.

Очевидно, тяжелый гироскоп на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости представляет собой неголономную систему Чаплыгина, так как T , V и коэффициенты связей $m_{\kappa h}$ не зависят от обобщенных координат x_G, y_G [1, 11].

2. Уравнения движения. Уравнения движения системы возьмем в форме Чаплыгина [1]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_*}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T_*}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{\kappa=1}^2 \Theta_{\kappa} \left[\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial m_{\kappa j}}{\partial x_i} - \frac{\partial m_{\kappa i}}{\partial x_j} \right) \dot{x}_j \right] = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

где

$$T_* = \frac{1}{2} A_1 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} B_1 \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \frac{1}{2} C_1 (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi})^2 - E \dot{\psi} \sin \vartheta (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi}) + \frac{1}{2} J (\dot{\delta} + \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi})^2 \quad (2.2)$$

$$A_1 = A + m(\eta^2 + \zeta^2), \quad B_1 = A + m\zeta^2 \\ C_1 = C + m\eta^2, \quad E = m\eta\zeta \quad (2.3)$$

Здесь T_* , Θ_{κ} – результат исключения величин $\dot{y}_{\kappa}$ с помощью соотношений (1.7) из T , $\partial T / \partial \dot{y}_{\kappa}$ соответственно.

Преобразовав последнее слагаемое в левой части i -го уравнения (2.1), эти уравнения можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_*}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T_*}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} - \sum_{j,h=1}^3 \omega_{ijh} \dot{x}_j \dot{x}_h = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

где введены коэффициенты членов неголономности [13]

$$\omega_{ijh} = \sum_{\kappa=1}^2 \left(\frac{\partial m_{\kappa i}}{\partial x_j} - \frac{\partial m_{\kappa j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \Theta_{\kappa}}{\partial \dot{x}_h} = -\omega_{jih}, \quad \omega_{iih} = 0$$

которые для рассматриваемой задачи таковы:

$$\omega_{121} = \omega_{131} = 0, \quad \omega_{122} = -m\eta\eta', \quad \omega_{123} = -m(\eta \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta)\eta' \\ \omega_{132} = -m\eta(\eta' \cos \vartheta - \zeta' \sin \vartheta) \\ \omega_{133} = -m(\eta \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta)(\eta' \cos \vartheta - \zeta' \sin \vartheta) \\ \omega_{231} = m\eta(\eta \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta), \quad \omega_{232} = \omega_{233} = 0 \quad (2.4)$$

Таким образом, уравнения движения гироскопа принимают вид

$$\frac{d}{dt} [A_1 \dot{\vartheta}] - m(\eta\eta' + \zeta\zeta') \dot{\vartheta}^2 + [C_1 (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi}) + J\Omega - B_1 \dot{\psi} \cos \vartheta] \dot{\psi} \sin \vartheta - \\ - E [\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta - \dot{\psi} \cos \vartheta (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi})] = -mgh'(\vartheta) \\ \frac{d}{dt} [B_1 \dot{\psi} \sin \vartheta - E(\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi})] + E \dot{\psi} \sin \vartheta \dot{\vartheta} + \\ + [B_1 \dot{\psi} \cos \vartheta - C_1 (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi}) - J\Omega + m\eta^2 (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi})] \dot{\vartheta} + \\ + m\zeta' [\eta (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi}) - \zeta \dot{\psi} \sin \vartheta] \dot{\vartheta} = 0 \\ \frac{d}{dt} [C_1 (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi}) + J\Omega - E \dot{\psi} \sin \vartheta] - [m\eta^2 \dot{\psi} \sin \vartheta + E \dot{\psi} \cos \vartheta] \dot{\vartheta} - \\ - m\eta' [\eta (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi}) - \zeta \dot{\psi} \sin \vartheta] \dot{\vartheta} = 0 \quad (2.5)$$

При $J\Omega = 0$ уравнения (2.5) принимают вид уравнений движения без скольжения тяжелого твердого тела вращения на неподвижной горизонтальной плоскости [14, 12].

Таким образом, уравнения Чаплыгина (2.5) выражают в проекциях на оси полуподвижной системы координат теорему о моменте количеств движения гиростата относительно подвижной точки O .

3. Функция Рауса. Из второго выражения (1.9) и соотношений (2.2), (2.4) видно, что кинетическая энергия T_* , потенциальная энергия V и отличные от нуля коэффициенты ω_{ijh} не зависят от обобщенных координат φ и ψ , т.е. координаты φ и ψ — псевдоциклические [13].

Перейдем от обобщенных скоростей к импульсам псевдоциклических координат

$$p_1 = \partial T_* / \partial \dot{\varphi} = C_1 r - E q + J\Omega \quad (3.1)$$

$$p_2 = \partial T_* / \partial \dot{\psi} = [B_1 q - E r] \sin \vartheta + [C_1 r - E q + J\Omega] \cos \vartheta$$

и введем аналог функции Рауса

$$R = T_* - V - p_1 \dot{\varphi} - p_2 \dot{\psi} - J\Omega \dot{\delta}$$

Выражая из (3.1) переменные q, r через p_1, p_2 и пренебрегая несущественной аддитивной постоянной, получим для функции Рауса соотношение

$$R = R_2 - W = \frac{1}{2} A_1 \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} \alpha_1 (p_1 - J\Omega)^2 - \frac{1}{2} \alpha_2 (p_2 - p_1 \cos \vartheta)^2 - \\ - \alpha_3 (p_1 - J\Omega)(p_2 - p_1 \cos \vartheta) - mgh(\vartheta)$$

$$R_2 = \frac{1}{2} A_1 \dot{\vartheta}^2, \quad W = mgh(\vartheta) + \frac{1}{2} \alpha_1 (p_1 - J\Omega)^2 + \\ + \frac{1}{2} \alpha_2 (p_2 - p_1 \cos \vartheta)^2 + \alpha_3 (p_1 - J\Omega)(p_2 - p_1 \cos \vartheta)$$

$$\alpha_1 = \frac{B_1}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{C_1}{\Delta \sin^2 \vartheta}, \quad \alpha_3 = \frac{E}{\Delta \sin \vartheta}, \quad \Delta = B_1 C_1 - E^2$$

В новых переменных уравнения (2.4) примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_2}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{\partial R_2}{\partial \vartheta} - \frac{DW}{D\vartheta}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \Gamma \dot{\vartheta} \quad (3.2)$$

Здесь

$$\frac{D}{D\vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \Gamma^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}, \quad \Gamma = \begin{vmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \end{vmatrix}$$

$$\gamma_{ll} = (\omega_{l12} + \omega_{l21}) \frac{\partial W}{\partial p_1} + (\omega_{l13} + \omega_{l31}) \frac{\partial W}{\partial p_2}, \quad l = 2, 3$$

Уравнения движения допускают интеграл инергии

$$T_* + V = R_2 + W = \text{const}$$

и два первых интеграла вида $U(\vartheta, \mathbf{p}) = \text{const}$, явные выражения которых неизвестны [13].

4. Стационарные движения. Система (3.2) допускает стационарные решения [13]

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \dot{\vartheta} = 0, \quad p_1 = P_1, \quad p_2 = P_2 \quad (4.1)$$

причем постоянные ϑ_0, P_1, P_2 удовлетворяют уравнению

$$DW / D\vartheta = 0 \quad (4.2)$$

Таким образом, стационарные движения (СД) образуют двухпараметрическое семейство, определяемое соотношением

$$mgh'(\vartheta_0) + \beta_1(P_1 - J\Omega)(P_1 - P_2 \cos \vartheta_0) + \beta_2(P_1 - P_2 \cos \vartheta_0)(P_2 - P_1 \cos \vartheta_0) = 0 \quad (4.3)$$

$$\beta_1 = \frac{E_0}{\Delta_0 \sin^2 \vartheta_0}, \quad \beta_2 = \frac{C_1^0}{\Delta_0 \sin^3 \vartheta_0}, \quad \Delta_0 = (B_1 C_1 - E^2)|_{\vartheta=\vartheta_0}$$

Рассмотрим частные типы СД.

Перманентные вращения вокруг оси симметрии

$$\vartheta_0 = 0, \quad \dot{\vartheta} = 0, \quad P_1 = P_2 = P \quad (4.4)$$

$$(\dot{\phi} + \dot{\psi} = \dot{\phi}_0 + \dot{\psi}_0 = r_0)$$

Они имеют место при условии

$$h'(0) = 0$$

Из соотношений (1.5), (1.8) при равенстве (4.4) следует, что центр масс G и точка контакта O гиростата неподвижны в этих движениях, представляющих собой вращение вокруг неподвижной вертикально расположенной оси симметрии с произвольной постоянной угловой скоростью r_0 .

Перманентные вращения: общий случай

$$\vartheta_0 \neq 0, \quad \dot{\vartheta} = 0, \quad P_2 = P_1 \cos \vartheta_0 + \frac{b_1}{b_2} \sin \vartheta_0 (P_1 - J\Omega) \quad (4.5)$$

$$(\dot{\phi} = 0, \quad \dot{\psi}_0 \neq 0)$$

Здесь

$$b_1 = B_1^0 \sin \vartheta_0 - E_0 \cos \vartheta_0, \quad b_2 = C_1^0 \cos \vartheta_0 - E_0 \sin \vartheta_0$$

причем постоянная P_1 удовлетворяет уравнению

$$mgh'(\vartheta_0) + \frac{\sin \vartheta_0}{b_2} P_1 (P_1 - J\Omega) - \frac{b_1 \cos \vartheta_0}{b_2^2} (P_1 - J\Omega)^2 = 0$$

которое после перехода к обобщенной скорости $\dot{\psi}_0$ преобразуется к виду

$$mgh'(\vartheta_0) = \Lambda(\vartheta_0) - J\Omega \dot{\psi}_0 \sin \vartheta_0$$

$$\Lambda(\vartheta_0) = [(B_1^0 - C_1^0) \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 + E_0 (\sin^2 \vartheta_0 - \cos^2 \vartheta_0)] \dot{\psi}_0^2$$

Этому уравнению должны удовлетворять направляющие косинусы кинематически возможных осей перманентных вращений гиростата. В отсутствие ротора имеем

$$mgh'(\vartheta_0) = \Lambda(\vartheta_0)$$

Однако динамически допустимыми будут лишь те оси, направляющие косинусы которых удовлетворяют неравенству

$$(J\Omega)^2 \sin^2 \vartheta_0 + 4\Lambda(\vartheta_0)mgh'(\vartheta_0) \geq 0 \quad (4.6)$$

Если ротор отсутствует, то неравенство сводится к виду

$$\Lambda(\vartheta_0)mgh'(\vartheta_0) \geq 0 \quad (4.7)$$

Неравенства (4.6) и (4.7) показывают, что присоединение к телу вращающегося ротора расширяет множество динамически допустимых осей перманентных вращений.

Решение (4.5) соответствует такому СД твердого тела, при котором тело опирается о горизонтальную плоскость одной и той же точкой своей поверхности и вращается с угловой скоростью $\dot{\psi}_0$ вокруг вертикали l , проходящей через эту точку. Центр тяжести G гиригостата описывает при этом окружность в плоскости $z = h(\vartheta_0)$, параллельной опорной плоскости, с центром на оси l и радиусом

$$\rho_G = |\mathbf{v}_G| / |\dot{\psi}_0| = |\eta_0 \cos \vartheta_0 - \zeta_0 \sin \vartheta_0|$$

Прямолинейное качение

$$\vartheta_0 \neq 0, \quad \dot{\vartheta} = 0, \quad P_2 = P_1 \cos \vartheta_0 - \frac{E_0}{C_1^0} \sin \vartheta_0 (P_1 - J\Omega)$$

$$(\dot{\psi} = 0, \quad \dot{\phi}_0 \neq 0) \quad (4.8)$$

причем P_1 удовлетворяет уравнению

$$mgh'(\vartheta_0) + (P_1 - J\Omega) \left[P_1 \sin \vartheta_0 + \frac{E_0}{C_1^0} \cos \vartheta_0 (P_1 - J\Omega) \right] \left[\beta_1 - \beta_2 \frac{E_0}{C_1^0} \sin \vartheta_0 \right] \sin \vartheta_0 = 0$$

Подставляя в это уравнение выражение $P_1 = C_1^0 \dot{\phi}_0 + J\Omega$, находим

$$h'(\vartheta_0) = 0 \quad (4.9)$$

Из равенств (1.5), (1.8), (4.8) следует, что соотношениям (4.8) соответствует СД гиригостата, при котором точка O описывает прямую линию, а постоянная угловая скорость $\dot{\phi}_0$ качения произвольна.

Движение типа регулярной прецессии

$$\vartheta_0 \neq 0, \quad \dot{\vartheta} = 0, \quad p_1 = P_1, \quad p_2 = P_2 \quad (4.10)$$

$$(\dot{\phi} = \dot{\phi}_0 \neq 0, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 \neq 0)$$

Постоянные ϑ_0, P_1, P_2 удовлетворяют уравнению (4.3).

В этом движении гиригостат вращается с постоянными угловыми скоростями $\dot{\phi}_0$ вокруг собственной оси вращения ζ и $\dot{\psi}_0$ вокруг вертикали. При этом центр масс G гиригостата описывает в плоскости, параллельной опорной плоскости, окружность радиуса ρ_G , а точка O контакта корпуса с плоскостью описывает окружность радиуса ρ_O , причем

$$\rho_G = \frac{|\mathbf{v}_G|}{|\dot{\psi}_0|} = \left| \frac{\eta_0 \dot{\phi}_0 + (\eta_0 \cos \vartheta_0 - \zeta_0 \sin \vartheta_0) \dot{\psi}_0}{\dot{\psi}_0} \right|$$

$$\rho_O = \frac{|\mathbf{v}_O|}{|\dot{\psi}_0|} = \left| \frac{\eta_0 \dot{\phi}_0}{\dot{\psi}_0} \right|$$

Если отвлечься от движения точки контакта O по опорной плоскости и сосредоточить внимание только на ориентации системы $\xi\eta\zeta$ относительно неподвижной системы, то движение сведется только к регулярной прецессии вокруг вертикальной оси [14].

5. Устойчивость стационарных движений. Как известно ([13], с. 100, 101, 129), СД (4.1) устойчиво, если все собственные значения матрицы

$$C = \| D^2 W / D\vartheta^2 \|$$

положительны в точке $(\vartheta_0, \mathbf{p}_0)$, и неустойчиво, если определитель матрицы C меньше нуля в точке $(\vartheta_0, \mathbf{p}_0)$.

В рассматриваемом случае достаточное условие устойчивости СД гиростата сводится к неравенству

$$\frac{D^2 W}{D\vartheta^2} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{DW}{D\vartheta} + \Gamma^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \frac{DW}{D\vartheta} > 0$$

Стационарные движения неустойчивы при строгом нарушении этого неравенства.

Получаем необходимое и достаточное условие устойчивости СД гиростата для любого угла $\vartheta_0 \neq 0$

$$L_1 q_0^2 + L_2 q_0 r_0 + L_3 r_0^2 + L_4 J\Omega q_0 + L_5 J\Omega r_0 + \frac{C_1^0}{\Delta_0} (J\Omega)^2 + mgh''(\vartheta_0) > 0 \quad (5.1)$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &= 3E_0 \operatorname{ctg} \vartheta_0 + 2B_1^0 \operatorname{ctg}^2 \vartheta_0 + m\eta_0^2 + \frac{B_1^0}{\sin^2 \vartheta_0} + \frac{C}{\Delta_0} \tilde{B} \operatorname{ctg} \vartheta_0 m\zeta_0 [\eta_0 + \zeta'_0] \\ L_2 &= -\frac{E_0}{\sin^2 \vartheta_0} - \frac{C}{\Delta_0} m\zeta_0 \zeta'_0 [C_1^0 - B_1^0 \operatorname{ctg}^2 \vartheta_0] - 2\frac{CC_1^0}{\Delta_0} \tilde{B} \operatorname{ctg} \vartheta_0 + \tilde{C} \operatorname{ctg} \vartheta_0 \\ L_3 &= \frac{C\tilde{C}}{\Delta_0} [C_1^0 - m\zeta_0 \zeta'_0 \operatorname{ctg} \vartheta_0] \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} L_4 &= -2 \operatorname{ctg} \vartheta_0 - \frac{C_1^0}{\Delta_0} \tilde{B} \operatorname{ctg} \vartheta_0 - \frac{Cm\zeta_0}{\Delta_0} [\eta_0 + \zeta'_0] \\ L_5 &= \frac{C_1^0 \tilde{C}}{\Delta_0} + \frac{C}{\Delta_0} [C_1^0 - m\zeta_0 \zeta'_0 \operatorname{ctg} \vartheta_0] \\ \tilde{B} &= A - m\zeta_0 \frac{h(\vartheta_0)}{\cos \vartheta_0}, \quad \tilde{C} = C - m\eta_0 \frac{h(\vartheta_0)}{\sin \vartheta_0} \end{aligned} \quad (5.3)$$

При $J\Omega = 0$ неравенство (5.1) есть достаточное условие устойчивости СД (4.1) тела вращения в предположении $\vartheta_0 \neq 0$ [12].

Рассмотрим СД вида

$$\vartheta_0 \neq 0, \quad \dot{\vartheta} = 0, \quad q_0 = 0, \quad r_0 \neq 0 \quad (5.4)$$

Это движение возможно, если выполняется условие (4.9).

Достаточное условие устойчивости СД (4.3) получаем из неравенства (5.1)

$$\frac{D^2 W}{D\vartheta^2} = \frac{1}{\Delta_0} [\tilde{L}_3 r_0^2 + \tilde{L}_5 J\Omega r_0 + C_1^0 (J\Omega)^2 + mgh''(\vartheta_0) \Delta_0] > 0 \quad (5.5)$$

причем коэффициенты $\tilde{L}_3, \tilde{L}_5$ запишем в виде

$$\begin{aligned} \tilde{L}_3 &= C[C_1^0 + m\eta_0^2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta_0] \left[C_1^0 + mh(\vartheta_0) \frac{\cos^2 \vartheta_0}{\sin \vartheta_0} \zeta'_0 \right] \\ \tilde{L}_5 &= C_1^0 \tilde{C} + C[C_1^0 - m\zeta_0 \zeta'_0 \operatorname{ctg} \vartheta_0] \end{aligned}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае кривизна k кривой, ограничивающей меридианное сечение, в точке контакта тела с плоскостью положительна. Так как [15]

$$k(\vartheta_0) = -1/[h(\vartheta_0) + h''(\vartheta_0)]$$

то из неравенства $k(\vartheta_0) > 0$ следует условие

$$h''(\vartheta_0) < -h(\vartheta_0) < 0 \quad (5.6)$$

Утверждение. 1°. Если $\tilde{L}_3 > 0$, $h''(\vartheta_0) < 0$, то СД (5.4) устойчиво при $r_0 \in (-\infty, r_{01}) \cup (r_{02}, +\infty)$ и неустойчиво при $r_0 \in (r_{01}, r_{02})$.

2°. Если $\tilde{L}_3 < 0$ и величина $\Omega \in (-\infty, -\sqrt{K_*}/J) \cup (\sqrt{K_*}/J, +\infty)$, то СД (5.4) устойчиво при $r_0 \in (r_{01}, r_{02})$ и неустойчиво при $r_0 \in (-\infty, r_{01}) \cup (r_{02}, +\infty)$. Если $\Omega \in [-\sqrt{K_*}/J, \sqrt{K_*}/J]$, то СД (5.4) неустойчиво при любом значении r_0 .

В самом деле, принимая во внимание неравенство

$$\Delta_0 = AC + Am\eta_0^2 + Cm\zeta_0^2 > 0 \quad (5.7)$$

исследуем знак квадратичной функции, стоящей в левой части неравенства (5.5), при различных значениях постоянных Ω , r_0 . Дискриминант этой квадратичной функции есть

$$d = [\tilde{L}_3^2 - 4\tilde{L}_3 C_1^0](J\Omega)^2 - 4\tilde{L}_3 mgh''(\vartheta_0)\Delta_0$$

Можно показать, что

$$\tilde{L}_3^2 - 4\tilde{L}_3 C_1^0 = m^2 [C_1^0 \eta_0 h(\vartheta_0) + C\zeta_0 \zeta_0' \cos \vartheta_0]^2 / \sin^2 \vartheta_0 = \chi^2 \geq 0$$

причем имеет место равенство, если

$$\zeta_0' = -C_1 \eta_0 h(\vartheta_0) / (C\zeta_0 \cos \vartheta_0) \quad (5.8)$$

Пусть имеет место случай 1°. Тогда дискриминант d квадратичной функции $D^2W/D\vartheta^2$ положителен при любом значении абсолютной мгновенной угловой скорости Ω вращения ротора. В этом случае существуют действительные различные $(r_0)_{1,2} = (-\tilde{L}_3 J\Omega \mp \sqrt{d}) / (2\tilde{L}_3)$, такие, что при $r_0 \in (-\infty, r_{01}) \cup (r_{02}, +\infty)$ СД (5.4) устойчиво.

Заметим, что дискриминант d принимает минимальное значение при $\Omega = 0$, т.е. когда ротор не вращается или отсутствует, или если имеет место равенство (5.8). В этом случае

$$(r_0)_{1,2} = \mp \sqrt{-mgh''(\vartheta_0)\Delta_0 / \tilde{L}_3}$$

Если имеет место случай 2°, то $h''(\vartheta_0) < 0$. Тогда дискриминант d может принимать положительные значения, только если

$$\Omega \in (-\infty, -\sqrt{K_*}/J) \cup (\sqrt{K_*}/J, +\infty)$$

$$K_* = 4\tilde{L}_3 mgh''(\vartheta_0)\Delta_0 / \chi^2, \quad \chi^2 \neq 0$$

В этом случае старший коэффициент $\tilde{L}_3$ квадратичной функции отрицателен и дискриминант d положителен. Следовательно, неравенство (5.5) справедливо при $r_0 \in (r_{01}, r_{02})$. При относительно малых значениях угловой скорости Ω вращения ротора

$$\Omega \in [-\sqrt{K_*}/J, \sqrt{K_*}/J] \quad (5.9)$$

или при выполнении равенства (5.8) дискриминант d принимает отрицательные значения или равняется нулю, следовательно, квадратичная функция отрицательна при любом значении r_0 . Это означает, что СД (5.4) неустойчиво. Отрезок (5.9) включает нулевое значение Ω , это имеет место, когда ротор не вращается или отсутствует. Неустойчивость в этом случае показана ранее [12].

Рассмотрим теперь СД вида

$$\vartheta_0 \neq 0, \quad \dot{\vartheta} = 0, \quad q_0 \neq 0, \quad r_0 \neq 0 \quad (5.10)$$

Запишем достаточное условие устойчивости в виде

$$\frac{D^2 W}{D\vartheta^2} = F_1 r_0^2 + F_2 q_0 r_0 + L_1 q_0^2 + mgh''(\vartheta_0) > 0$$

$$F_1 = L_3 + L_5 J \frac{\Omega}{r_0} + \frac{C_1^0}{\Delta_0} J^2 \left(\frac{\Omega}{r_0} \right)^2, \quad F_2 = L_2 + L_4 J \frac{\Omega}{r_0}$$

Если выполнены неравенства

$$F_1 > 0, \quad F_1 L_1 - \frac{1}{4} F_2^2 > 0$$

и $h''(\vartheta_0) > 0$, то СД (5.10) устойчиво. Если же $h''(\vartheta_0) < 0$, то могут существовать области устойчивости и неустойчивости.

Перейдем к рассмотрению выделенных выше частных случаев СД гиростата.

Перманентное вращение вокруг оси симметрии. Положим $p_1 = p_2 = P$ в выражении $DW/D\vartheta$ [16]. Тогда

$$\frac{DW}{D\vartheta} = mgh'(\vartheta) + \frac{E}{\Delta} \frac{P(P - J\Omega)}{1 + \cos \vartheta} + \frac{C_1}{\Delta} \frac{P^2 \sin \vartheta}{(1 + \cos \vartheta)^2}$$

Дифференцируя это выражение, полагая $\vartheta = 0$ и используя равенство $P = Cr_0 + J\Omega$, получаем необходимое и достаточное условие устойчивости

$$[Cr_0 + J\Omega]^2 + 2[Cr_0 + J\Omega]mh(0)[h(0) + h''(0)]r_0 + 4[A + mh^2(0)]mgh''(0) > 0$$

Перманентные вращения: общий случай. Необходимое и достаточное условие устойчивости перманентных вращений можно записать в виде

$$\frac{1}{\Delta_0} [\bar{L}_1 \dot{\psi}_0^2 + \bar{L}_2 J\Omega \dot{\psi}_0 + C_1^0 (J\Omega)^2 + mgh''(\vartheta_0) \Delta_0] > 0 \quad (5.11)$$

$$\bar{L}_1 = L_1 \sin^2 \vartheta_0 + L_2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 + L_3 \cos^2 \vartheta_0$$

$$\bar{L}_2 = L_4 \sin \vartheta_0 + L_5 \cos \vartheta_0$$

Исследуем квадратичный трехчлен в левой части неравенства (5.11). Запишем его дискриминант в виде

$$d = a_*(J\Omega)^2 - 4mgh''(\vartheta_0) \Delta_0 \bar{L}_1, \quad a_* = \bar{L}_2^2 - 4\bar{L}_1 C_1^0$$

Принимая во внимание неравенства (5.6), (5.7), имеем следующие возможные случаи. Если параметры системы таковы, что $\bar{L}_1 > 0$, $a_* > 0$, то при любом значении Ω существуют действительные различные $\dot{\psi}_{01}$, $\dot{\psi}_{02}$, $(\dot{\psi}_0)_{1,2} = (-\bar{L}_2 J\Omega \mp \sqrt{d})/(2\bar{L}_1)$, такие, что перманентные вращения гиростата устойчивы при $\dot{\psi}_0 \in (-\infty, \dot{\psi}_{01}) \cup (\dot{\psi}_{02}, +\infty)$ и неустойчивы при $\dot{\psi}_0 \in (\dot{\psi}_{01}, \dot{\psi}_{02})$. Область неустойчивости тем уже, чем меньше величина Ω .

Если имеют место неравенства $\bar{L}_1 > 0$, $a_* < 0$, то при

$$\Omega^2 < \Omega_*^2, \quad \Omega_*^2 = 4|\bar{L}_1| mg |h''(\vartheta_0)| \Delta_0 / (|a_*| J^2)$$

перманентные вращения устойчивы при $\dot{\psi}_0 \in (-\infty, \dot{\psi}_{01}) \cup (\dot{\psi}_{02}, +\infty)$. Если же

$$\Omega^2 > \Omega_*^2$$

то перманентные вращения устойчивы при любом значении $\dot{\psi}_0$. Это означает, что увеличением абсолютной мгновенной угловой скорости Ω вращения ротора возможно стабилизировать перманентные вращения гиростата.

Когда справедливы неравенства $\bar{L}_1 < 0$, $a_* > 0$, то если

$$\Omega^2 > \Omega_*^2$$

перманентные вращения устойчивы при $\dot{\psi}_0 \in (\dot{\psi}_{01}, \dot{\psi}_{02})$. Если

$$\Omega^2 < \Omega_*^2$$

то перманентные вращения неустойчивы при любом значении $\dot{\psi}_0$. В этом случае с увеличением по модулю угловой скорости Ω расширяется область устойчивости перманентных вращений.

Пусть, наконец, $\bar{L}_1 < 0$, $a_* < 0$, тогда перманентные вращения неустойчивы при любых значениях Ω , $\dot{\psi}_0$.

Прямолинейное качение. Необходимое и достаточное условие устойчивости имеет вид

$$mgh''(\vartheta_0) + [\tilde{C}\dot{\phi}_0 + J\Omega] \left[\frac{C(C + m\eta_0^2 + m\eta'_0\zeta_0)}{\Delta_0} \dot{\phi}_0 + \frac{C + m\eta_0^2}{\Delta_0} J\Omega \right] > 0$$

Это условие с точностью до обозначений и с учетом исправленных здесь опечаток совпадает с полученным ранее результатом [4]. Для этого движения справедливо сформулированное выше утверждение.

Движение типа регулярной прецессии. Необходимое и достаточное условие устойчивости этого движения дается неравенством (5.1).

6. Гиростат с круговым основанием. Пусть корпус гиростата – симметричное тело, основание которого – круговой диск с острым краем, плоскость основания перпендикулярна оси симметрии тела, и пусть соприкосновение гиростата с опорной плоскостью происходит только в точках контура диска. Тогда [14]

$$\eta = -r = \text{const}, \quad \zeta = -a = \text{const} \quad (6.1)$$

Формулы (1.1), (1.2) дают

$$h = r \sin \vartheta + a \cos \vartheta, \quad h' = r \cos \vartheta - a \sin \vartheta \quad (6.2)$$

Моменты инерции становятся постоянными величинами

$$A_1 = A + m(r^2 + a^2), \quad B_1 = A + ma^2, \quad C_1 = C + mr^2, \quad E = mra$$

Уравнение для стационарных движений принимает вид

$$[B_1 \text{ctg} \vartheta_0 + E]q_0^2 - [(C_1 + E \text{ctg} \vartheta_0)r_0 + J\Omega]q_0 - mg(r \cos \vartheta_0 - a \sin \vartheta_0) = 0$$

Необходимое и достаточное условие устойчивости стационарного движения (4.1) получим из неравенства (5.1)

$$\hat{L}_1 q_0^2 + \hat{L}_2 q_0 r_0 + \frac{\hat{L}_3}{\Delta} r_0^2 + \hat{L}_4 J\Omega q_0 + \frac{\hat{L}_5}{\Delta} J\Omega r_0 + \frac{C_1}{\Delta} (J\Omega)^2 + mgh''(\vartheta_0) > 0$$

причем коэффициенты $\hat{L}_i$ получаются из L_i с учетом равенств (6.1)

$$\hat{L}_1 = 3E \operatorname{ctg} \vartheta_0 + 2B_1 \operatorname{ctg}^2 \vartheta_0 + mr^2 + \frac{B_1}{\sin^2 \vartheta_0} + \frac{CE}{\Delta} \tilde{B} \operatorname{ctg} \vartheta_0$$

$$\hat{L}_2 = -\frac{E}{\sin^2 \vartheta_0} - 2\frac{CC_1}{\Delta} \tilde{B} \operatorname{ctg} \vartheta_0 + \tilde{C} \operatorname{ctg} \vartheta_0$$

$$\hat{L}_3 = C\tilde{C}C_1, \quad \hat{L}_4 = -2 \operatorname{ctg} \vartheta_0 - \frac{C_1}{\Delta} \tilde{B} \operatorname{ctg} \vartheta_0 - \frac{CE}{\Delta}$$

$$\hat{L}_5 = (C + \tilde{C})C_1$$

Рассмотрим подробнее *прямолинейное качение* по плоскости [14] такого гиростата. Из условия (4.9) и второго равенства (6.2) находим

$$a = r \operatorname{ctg} \vartheta_0 \quad (6.3)$$

Подставляя это соотношение во второе равенство (5.3), получаем, что $\tilde{C} = C_1 + ma^2$. Тогда необходимое и достаточное условие устойчивости прямолинейного качения выражается неравенством

$$\frac{\hat{L}_3}{\Delta} \dot{\varphi}_0^2 + \frac{\hat{L}_5}{\Delta} J\Omega \dot{\varphi}_0 + \frac{C_1}{\Delta} (J\Omega)^2 + mgh''(\vartheta_0) > 0 \quad (6.4)$$

Коэффициенты $\hat{L}_3 > 0$, $\hat{L}_5 > 0$.

Замечаем, что

$$h''(\vartheta_0) = -r \sin \vartheta_0 - a \cos \vartheta_0 = -h(\vartheta_0) < 0$$

Следовательно, дискриминант квадратичной функции, стоящей в левой части неравенства (6.4),

$$d = [C_1 m(r^2 + a^2)]^2 (J\Omega)^2 - 4\hat{L}_3 mgh''(\vartheta_0)\Delta > 0$$

при любом значении Ω . Причем чем больше по величине Ω , тем больше величина дискриминанта. Таким образом, качение по плоскости тяжелого гиростата с круговым основанием устойчиво, если угловая скорость качения находится в пределах

$$\dot{\varphi}_0 \in (-\infty, \dot{\varphi}_{01}) \cup (\dot{\varphi}_{02}, +\infty)$$

$$(\dot{\varphi}_0)_{1,2} = (-\hat{L}_5 J\Omega \mp \sqrt{d}) / (2\hat{L}_3)$$

и неустойчиво при $\dot{\varphi}_0 \in (\dot{\varphi}_{01}, \dot{\varphi}_{02})$. Область неустойчивости тем уже, чем меньше величина Ω .

Необходимое и достаточное условие устойчивости качения по плоскости тела с круговым основанием (в отсутствие ротора) ([14], с. 204) имеет вид

$$\frac{\hat{L}_3}{\Delta} \dot{\varphi}_0^2 + mgh''(\vartheta_0) > 0$$

Граница области устойчивости в этом случае определяется равенством

$$(\dot{\varphi}_0)_{1,2} = \mp \sqrt{mg|h''(\vartheta_0)|\Delta / \hat{L}_3}$$

Таким образом, область устойчивости расширяется, если корпус гиростата и ротор вращаются в одном направлении, и сужается, если вращения корпуса и ротора происходят в противоположных направлениях.

7. Диск с ротором. Частным случаем гиростата с круговым основанием является тяжелый однородный круглый диск массы m и радиуса r . Ось ζ направим

ортогонально плоскости диска. Пусть с диском связан без трения ротор, ось которого перпендикулярна к плоскости диска. Центр масс G всей системы, вообще говоря, не лежит в плоскости диска. В общем случае для этого гиростата справедливы результаты разд. 6.

Пусть имеет место условие [1]

$$C_1 r_0 + J\Omega = 0 \quad (7.1)$$

Уравнение, которому при этом должны удовлетворять ϑ_0, q_0 , имеет вид

$$[B_1 \operatorname{ctg} \vartheta_0 + E]q_0^2 + \frac{E}{C_1} J\Omega q_0 \operatorname{ctg} \vartheta_0 - mg(r \cos \vartheta_0 - a \sin \vartheta_0) = 0$$

Необходимое и достаточное условие устойчивости стационарных движений гиростата при условии (7.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{D^2 W}{D\vartheta^2} = & \frac{q_0^2}{\Delta} [\tilde{B} \operatorname{ctg} \vartheta_0 (3\Delta \operatorname{ctg} \vartheta_0 + C_1 E) + B_1 \Delta + mr^2 (\Delta - \tilde{B} E \operatorname{ctg} \vartheta_0)] + \\ & + \frac{J\Omega q_0}{\Delta} \left[E^2 \operatorname{ctg} \vartheta_0 + \frac{E}{C_1} \Delta (2 \operatorname{ctg} \vartheta_0 + 1) - mr^2 (B_1 + \tilde{B}) \operatorname{ctg} \vartheta_0 \right] - \\ & - \frac{Emr^2}{C_1 \Delta} (J\Omega)^2 \operatorname{ctg} \vartheta_0 - mg(r \sin \vartheta_0 + a \cos \vartheta_0) > 0 \end{aligned}$$

Пусть при условии (7.1) гиростат совершает качение по прямой. Получим

$$\left. \frac{D^2 W}{D\vartheta^2} \right|_{\dot{\varphi}=\varphi_0, \dot{\psi}=0} = -\frac{mgr}{\sin \vartheta_0} - \frac{m^2 r^4}{C_1 \Delta} (J\Omega)^2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta_0 < 0 \quad (7.2)$$

т.е. качение гиростата по прямой при условии (7.1) неустойчиво.

Исследуем устойчивость равновесия гиростата, которое возможно, если $h' = 0$, т.е. плоскость диска наклонена к опорной плоскости под углом $\vartheta_0 = \operatorname{arcsctg} (a/r)$. Тогда, принимая во внимание соотношение $a = r \operatorname{ctg} \vartheta_0$, находим необходимое и достаточное условие устойчивости равновесия гиростата

$$\Omega^2 > \frac{mgr}{\sin \vartheta_0} \frac{\Delta}{C_1 J^2} \quad (7.3)$$

Если центр масс системы диск – ротор лежит в плоскости диска и совпадает с его геометрическим центром, то

$$\eta = -r, \quad \zeta = 0 \quad (7.4)$$

Тогда СД гиростата представляют собой равномерное качение вдоль прямой, при котором плоскость диска вертикальна, или равновесие гиростата, возможное при $\vartheta_0 = \pi/2$. Равномерное верчение гиростата вокруг вертикально расположенного диаметра диска возможно, только если $J\Omega = 0$, т.е. в отсутствие ротора.

Необходимое и достаточное условие устойчивости равномерного качения такого гиростата имеет вид [2]

$$[C\dot{\varphi}_0 + J\Omega]^2 + mr^2 [C\dot{\varphi}_0 + J\Omega]\dot{\varphi}_0 - Amgr > 0$$

Условия устойчивости качения и верчения соответственно диска без ротора определяются равенствами [17, 18, 13]

$$C[C + mr^2]\dot{\varphi}_0^2 - Amgr > 0, \quad [A + mr^2]\dot{\varphi}_0^2 - mgr > 0$$

Необходимое и достаточное условие равновесия гиростата (7.4) имеет вид

$$D^2 W / D\vartheta^2 = -Amgr + (J\Omega)^2 > 0 \quad (7.5)$$

Если ротор не вращается или отсутствует, то

$$D^2 W / D\vartheta^2 = -mgr < 0 \quad (7.6)$$

т.е. положение равновесия неустойчиво.

Таким образом, из неравенств (7.3), (7.5) и (7.6) следует, что вращающийся ротор стабилизирует равновесие гиростата.

Для качения гиростата (7.4) по прямой при условии (7.1) получаем

$$D^2 W / D\vartheta^2 = -mgr < 0$$

т.е. имеет место неустойчивость.

Автор благодарит В.В. Румянцеву за полезные замечания в процессе выполнения работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы "Ведущие научные школы" (00-15-96150).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С.А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Чаплыгин С.А. Исследования по динамике неголономных систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. С. 9–27.
2. Миндлин И.М. Об устойчивости диска, несущего гироскоп // Инж. журн. 1964. Т. 4. Вып. 1. С. 101–104.
3. Миндлин И.М. Об устойчивости движения тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Инж. журн. 1964. Т. 4. Вып. 2. С. 225–230.
4. Миндлин И.М., Пожарицкий Г.К. Об устойчивости стационарных движений тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 742–745.
5. Карапетян А.В. Об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 801–807.
6. Карапетян А.В. О перманентных вращениях тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 5. С. 808–814.
7. Карапетян А.В., Румянцев В.В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНТИ, 1983. Т. 6. С. 5–132.
8. Карапетян А.В. О специфике применения теории Рауса к системам с дифференциальными связями // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 17–22.
9. Карапетян А.В. Семейства перманентных вращений трехосного эллипсоида на шероховатой горизонтальной плоскости и их ветвление // Актуальные проблемы классической и небесной механики. М.: ТОО "Эльф", 1998. С. 46–51.
10. Румянцев В.В. Об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 11–21.
11. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.
12. Salvadori L., Visentin F. Stability problems for a class of nonholonomic mechanical systems // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. 1996. V. 2. № 4. P. 461–476.
13. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 165 с.
14. Levi-Civita T., Amaldi U. Lezioni di Meccanica Razionale. Bologna: Zanichelli, 1927. = Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. Т. 2. Ч. 2. 555 с.
15. Фиников С.П. Курс дифференциальной геометрии. М.: Гостехиздат, 1952. 343 с.
16. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
17. Дувакин А.П. Об устойчивости движений диска // Инж. журн. 1965. Т. 5. Вып. 1. С. 3–9.
18. Неймарк Ю.И., Фужаев Н.А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.XII.2000