

УДК 531.01

© 2001 г. К. Валле, Д. Думитриу

**О МНОЖИТЕЛЯХ ЛАГРАНЖА,
АССОЦИИРОВАННЫХ С МАТРИЦЕЙ ПОВОРОТА,
ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА
ВОКРУГ ЕГО ЦЕНТРА МАСС**

Вместо угловых параметров для описания движения твердого тела выбирается параметризация, основанная на применении состоящей из девяти компонент матрицы поворота. При этом уравнения движения механических систем связанных между собой многих тел оказываются линейными. Описание поворотов обеспечивается шестью множителями Лагранжа, сгруппированными в симметричную матрицу 3×3 , обозначенную Λ , компоненты которой связаны с объемными средними от внутренних связей в теле. Для твердого тела, совершающего вращение вокруг своего центра масс, доказываются следующие свойства: матрица, противоположная матрице множителей Лагранжа, положительна, и в каждый момент времени существует ортонормированный базис, в котором новые компоненты матрицы Λ постоянны, что дает шесть первых интегралов уравнений движения [1]. Доказывается, что три собственные значения матрицы Λ не меняются со временем и, кроме того, их можно вычислить в явном виде.

Для нахождения оптимальных траекторий систем связанных между собой многих тел в качестве первого шага осуществляется параметризация их конфигурации. После этого выписываются уравнения движения и задача оптимизации формулируется, например, в виде принципа максимума Понтрягина. Получаемая нелинейная система дифференциальных уравнений со смешанными (начальными и конечными) краевыми условиями в общем случае решается "методом стрельбы". Однако его реализация на начальном этапе очень деликатна, поскольку нет никакой численной информации о присоединенных переменных (множителях), вводимых в рамках принципа Понтрягина. Эти множители должны быть "угаданы" [1]. Кроме того, их механическая интерпретация, если, конечно, она существует, не всегда очевидна.

В связи с этим оказывается целесообразным избавиться от нелинейности уравнений динамики. Было предложено [2] отказаться от параметризации поворотов с помощью угловых переменных, которые выбираются более или менее хитроумным образом (как, например, углы Эйлера или параметры Денавит–Хартенберга). При этом в уравнениях движения сохраняются все девять компонент матрицы поворотов R (неособой матрицы 3×3). Однако эти девять компонент зависимы: они связаны шестью условиями, которые можно представить в виде матричного равенства $RR^T = R^T R = I$, которое нужно рассматривать как уравнение связи (I – единичная матрица, индекс T означает транспонирование). Эта связь учитывается путем введения шести множителей Лагранжа, сгруппированных в симметричную 3×3 -матрицу Λ .

С помощью такого подхода вращательное движение моделируется так же просто, как и поступательное. Классический результат состоит в том, что в уравнениях поступательного движения вторая производная по времени от умноженного на массу вектора перемещений рассматриваемого твердого тела появляется уже в первом слагаемом. В рамках предлагаемого подхода аналогичное свойство имеет место и при описании вращательного движения – вторая производная по времени от компонент матрицы поворотов, умноженной на матрицу инерции, также появляется уже в первом слагаемом уравнений движения. При этом вывод этих уравнений осуществляется непосредственно как для вращательного, так и для поступательного движения. Динамическая часть новых уравнений линейна, что дает большое преимущество с точки зрения численного исследования.

Ниже изучается ряд свойств матрицы множителей Лагранжа Λ . Анализируется простой случай движения твердого тела вокруг его центра масс, соответствующий движению твердого тела вокруг неподвижной точки, если эта точка совпадает с центром масс. Наконец, уточняются некоторые свойства матрицы Λ в случае осесимметричного тела, т.е. в задаче Эйлера – Лагранжа.

1. Предварительные свойства матрицы Λ . Движение твердого тела вокруг неподвижной точки определено матрицей его поворотов R . В частном случае, когда неподвижная точка совпадает с центром масс тела, была получена [1, 2] следующая система:

$$\ddot{R}K_0 = R\Lambda, \quad R^T R = I \quad (1.1)$$

K_0 – постоянная, симметричная, положительно определенная матрица инерции Пуансо твердого тела по отношению к его центру масс, зависящая от геометрии и распределения масс тела. Она связана с классической матрицей инерции J_0 следующим образом:

$$J_0 = \text{tr}(K_0)I - K_0 \quad \text{или} \quad K_0 = \text{tr}(J_0)I/2 - J_0 \quad (1.2)$$

Матрицы J_0 и K_0 симметричны.

Численное решение системы (1.1) позволило установить ряд ее интересных свойств, в том числе постоянство во времени и отрицательность собственных значений (СЗ) матрицы Λ . Удалось найти и доказательство этих свойств. Наконец, СЗ матрицы множителей Лагранжа были получены в явном виде.

Имеет место

Свойство 1. Матрица, противоположная матрице множителей Лагранжа ($-\Lambda$), положительна.

Доказательство. Нужно показать, что скалярное произведение $\langle -\Lambda V, V \rangle$ положительно для всякого вектора V . Это достаточно показать лишь в случае, когда V – собственный вектор матрицы Λ .

Дважды дифференцируя второе соотношение системы (1.1) и исключая из полученного выражения $\ddot{R}$ при помощи первого соотношения системы (1.1), получим

$$\Lambda K_0^{-1} + K_0^{-1} \Lambda = -2\dot{R}^T \dot{R} \quad (1.3)$$

В силу симметрии матриц K_0^{-1} и Λ для всякого вектора V справедливо равенство

$$\langle V, K_0^{-1} \Lambda V \rangle = -2\langle \dot{R}V, \dot{R}V \rangle \quad (1.4)$$

Если V – собственный вектор матрицы Λ , связанный с СЗ λ , то величина

$$\lambda = -\langle \dot{R}V, \dot{R}V \rangle / \langle V, K_0^{-1} V \rangle \quad (1.5)$$

отрицательна, так как матрица K_0^{-1} , как и матрица K_0 , положительна. Таким образом, так как все СЗ матрицы Λ отрицательны, противоположная матрица Λ положительна.

2. Постоянство собственных значений матрицы Λ . Численная проверка отрицательности СЗ матрицы множителей Лагранжа Λ показала, что эти СЗ не меняются со временем (здесь справедливость этого утверждения касается лишь задачи Эйлера – Лагранжа).

Чтобы доказать постоянство во времени СЗ матрицы Λ , надо лишь проверить, что производные $\dot{\lambda} = 0$. В силу соотношений (1.1)

$$R^T \ddot{R} K_0 = \Lambda \quad (2.1)$$

и *a priori* матрица Λ непостоянна. Дифференцирование характеристического уравнения матрицы Λ

$$\det(\Lambda - \lambda I) = \det(R^T \ddot{R} K_0 - \lambda I) = 0 \quad (2.2)$$

позволяет получить некоторые сведения о ее СЗ.

Как известно, дифференцирование определителя матрицы $A(t)$, зависящей от времени, дает ([3])

$$\frac{d}{dt} \det A = \operatorname{tr} \left[\operatorname{Adj}(A) \frac{dA}{dt} \right] \quad (2.3)$$

где $\operatorname{Adj}(A)$ означает матрицу алгебраических дополнений матрицы A . Последовательное дифференцирование характеристического многочлена (2.2) дает систему уравнения, из которого находим

$$\dot{\lambda} = \frac{\operatorname{tr} \left\{ [\operatorname{Adj}(R^T \ddot{R} K_0 - \lambda I)] \left[\frac{d}{dt} (R^T \ddot{R}) K_0 \right] \right\}}{\operatorname{tr} [\operatorname{Adj}(R^T \ddot{R} K_0 - \lambda I)]} \quad (2.4)$$

Завершить доказательство постоянства матрицы Λ этим путем не удалось, но выполненные численные эксперименты позволяют заключить, что числитель выражения (2.4) равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, т.е. $\dot{\lambda} = 0$.

Ниже постоянство по времени собственных значений матрицы Λ будет доказано прямым вычислением.

3. Выражение для матрицы Λ в виде функции вектора мгновенной угловой скорости. Обозначим через $j(u)$ линейное отображение, ставящее в соответствие каждому вектору u векторное произведение $u \times v$: $j(u)v = u \times v$. Всякая кососимметрическая матрица имеет вид $j(u)$. Например, если матрица R задает поворот, то ее производная удовлетворяет соотношению

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0$$

или, иными словами, матрица $\dot{R}R^T$ кососимметрическая. Таким образом, существует вектор Ω , называемый вектором мгновенной угловой скорости, такой, что

$$\dot{R} = j(\Omega)R$$

Но матрица $R^T \dot{R}$ также кососимметрическая, поэтому существует вектор ω , такой, что

$$\dot{R} = Rj(\omega) \quad (3.1)$$

Векторы Ω и ω связаны между собой: $\Omega = R\omega$. Для определения СЗ матрицы Λ воспользуемся выражением [1]

$$\Lambda = \{ [j(\omega)]^2 + j(\dot{\omega}) \} K_0 \quad (3.2)$$

Было показано [1, 2], что уравнение (1.1) эквивалентно классическому закону сохранения углового момента

$$J_0 \dot{\omega} + \omega \times (J_0 \omega) = 0 \quad \text{или} \quad \dot{\omega} = J_0^{-1} [(J_0 \omega) \times \omega] \quad (3.3)$$

Пусть $u \otimes v$ – тензорное произведение векторов u и v . Введем обозначения

$$\xi_0 = \omega \otimes \omega, \quad \xi_{ij} = J_0^i \xi_0 J_0^j, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\eta_0 = \langle \omega, \omega \rangle, \quad \eta_{ij} = J_0^i \eta_0 J_0^j, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\tau_0 = \frac{1}{\det J_0}, \quad \tau_1 = \frac{\text{tr } J_0}{2}, \quad \tau_2 = \frac{(\text{tr } J_0)^2 - \text{tr}(J_0^2)}{2} \quad (3.4)$$

Лемма 1. Закон сохранения углового момента допускает эквивалентное представление

$$j(\dot{\omega}) = \tau_0(\xi_{12} - \xi_{21}) \quad (3.5)$$

Доказательство. Пусть A – матрица, а u, v и w – три вектора. Обозначим через (u, v, w) смешанное произведение. Учитывая, что

$$(Au, Av, Aw) = (\det A)(u, v, w)$$

получим

$$A^T j(Au) A = (\det A) j(u)$$

Применяя эту формулу к матрице $A = J_0^{-1}$ и вектору $u = (J_0 \omega) \times \omega$, из второго соотношения (3.3) получаем

$$j(\dot{\omega}) = \tau_0^{-1} J_0 j[(J_0 \omega) \otimes \omega] J_0 \quad (3.6)$$

после чего формула двойного векторного произведения позволяет преобразовать выражение $j[(J_0 \omega) \otimes \omega]$. Применяя формулу двойного векторного произведения, имеем

$$j(v \times w) = w \otimes v - v \otimes w$$

Полагая $v = J_0 \omega$ и $w = \omega$, приводим выражение (3.6) к виду (3.5).

Свойство 2. Матрица Λ множителей Лагранжа может быть выражена как функция только лишь ω :

$$\Lambda = \tau_1(\xi_0 - \eta_0 I) + \eta_{01} - (\xi_{01} + \xi_{10}) + \tau_0 J_0 [\xi_{11} - \tau_1(\xi_{01} + \xi_{10}) + \tau_2 \xi_0] J_0 \quad (3.7)$$

Доказательство. Записывая формулу для двойного векторного произведения в виде

$$j(u)j(v) = v \otimes u - \langle u, v \rangle I$$

и полагая $u = v = \omega$, имеем

$$[j(\omega)]^2 = \xi_0 - \eta_0 I$$

Комбинируя этот результат с результатом леммы 1 и принимая во внимание второе выражение (1.2), формулу для Λ можно представить в виде

$$\Lambda = \tau_1(\xi_0 - \eta_0 I) + \tau_0(\xi_{12} - \xi_{21}) - \xi_{01} + \eta_{01} - \tau_0(\xi_{13} - \xi_{22}) \quad (3.8)$$

откуда следует формула (3.7).

Из этого выражения симметрия матрицы Λ неочевидна. Но в силу теоремы Гамильтона – Кэли матрица J_0 удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\tau_0^{-1} I - \tau_2 + 2\tau_1 J_0^2 - J_0^3 = 0$$

откуда можно выразить J_0^3 как функцию J_0 и J_0^2 , что позволяет преобразовать (3.8) к следующему симметричному виду:

$$\Lambda = \tau_1(\xi_0 - \eta_0 I) + \eta_{01} + \tau_0 \xi_{22} - \tau_0 \tau_1(\xi_{12} + \xi_{21}) - (\xi_{01} - \xi_{10}) + \tau_0 \tau_2 \xi_{11}$$

4. Постоянство собственных векторов матрицы Λ . Предыдущие результаты справедливы без какого-либо специального предположения о форме или распределении масс тела. Рассмотрим теперь задачу Эйлера – Лагранжа. Предположим, что тело симметрично относительно некоторой оси как по форме, так и с точки зрения инертных свойств. Обозначим: k – единичный вектор этой оси; C – момент инерции твердого тела относительно оси симметрии; A – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной вектору k . В этих обозначениях тензор инерции твердого тела вращения в неподвижной точке имеет вид

$$J_0 = AI + (C - A)k \otimes k \quad (4.1)$$

Поскольку $A - C/2$ – интеграл по всем точкам тела от произведения плотности тела и квадрата расстояния до плоскости, ортогональной k и проходящей через центр масс, то эта величина положительна.

Заметим, что J_0 – матрица инерции в начальный момент времени, вектор k постоянен. В момент t значение матрицы инерции равно

$$J = RJ_0R^T = AI + (C - A)(Rk) \otimes (Rk)$$

В силу того что матрица J_0 имеет специальный вид, обусловленный вращательной симметрией тела, не только J_0^3 выражается как функция J_0^2 и J_0 , но и J_0^2 , а затем и J_0^3 выражается как функция J_0 , в чем можно убедиться, используя следующий результат.

Лемма 2. Тензор инерции J_0 обладает следующими свойствами:

$$1) \tau_1 = A + C/2; \quad 2) 1/\tau_0 = A^2C; \quad 3) J_0^2 = (C + A)J_0 - ACI; \quad 4) \tau_2 = A(A + 2C)$$

Доказательство. Два первых свойства очевидны. В силу равенства $(k \otimes k)^2 = k \otimes k$ имеем

$$J_0^2 = A^2I + [(C - A)^2 + 2A(C - A)]k \otimes k$$

откуда в силу выражения (4.1) имеет место свойство 3. Свойство 4 выводится непосредственно из свойств 3 и 1.

Замечание. Свойство 3, выражающее J_0^2 через J_0 , связано с тем, что матрица J_0 имеет два равных СЗ.

Так как матрица J_0 имеет два разных СЗ, то интегрирование уравнений (3.3) осуществляется достаточно просто. При этом в силу полученных ранее результатов [1] вектор мгновенной угловой скорости имеет вид

$$\omega = E\Omega_0, \quad E = \exp[t(C/A - 1)\langle k, \Omega_0 \rangle j(k)] \quad (4.2)$$

где Ω_0 – начальное значение вектора мгновенной угловой скорости Ω .

Поскольку E – поворот вокруг вектора k , имеют место следующие простые свойства:

$$EJ_0E^T = J_0, \quad J_0E^T = E^TJ_0, \quad EJ_0 = J_0E \quad (4.3)$$

Они вытекают из равенств

$$j(k)J_0 = J_0j(k) = Aj(k)$$

вследствие перестановочности J_0 со всеми целыми степенями $j(k)$ и с экспонентой E .

Введем обозначения, аналогичные обозначениям (3.4),

$$\xi_0^* = \Omega_0 \otimes \Omega_0, \quad \eta_0^* = \langle \Omega_0, \Omega_0 \rangle \quad (4.4)$$

$$\xi_{ij}^* = J_0^i \xi_0^* J_0^j, \quad \eta_{ij}^* = J_0^i \eta_0^* J_0^j, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

Для упрощения выражения (3.8) понадобятся некоторые соотношения, связывающие величины (3.4) и (4.6). В силу соотношений (4.3) и (4.4) ясно, что

$$\xi_0 = E \xi_0^* E^T, \quad \eta_0 = \eta_0^*, \quad \xi_{ij} = E \xi_{ij}^* E^T, \quad i, j = 0, 1 \quad (4.5)$$

Имеет место

Свойство 3. Симметричная матрица $E^T \Lambda E$ постоянна во времени, и ее вид определяется правой частью равенства (3.7), если в последнем заменить выражения без звездочек соответствующими выражениями со звездочками, т.е. заменить ω на Ω_0 . Кроме того, шесть независимых компонент матрицы $E^T \Lambda E$ задают шесть первых интегралов уравнений движения.

Доказательство. Принимая во внимание соотношения (4.5) и заменяя ω выражением $E \Omega_0$ в соотношении (3.6) для Λ , получаем

$$\begin{aligned} \Lambda = & \tau_1 (E \xi_0^* E^T - \eta_0^* E E^T) + \eta_0^* E J_0 E^T - E (\eta_{01}^* + \eta_{10}^*) E^T + \\ & + \tau_0 E J_0 [\xi_{22}^* - \pi_1 (\xi_{01}^* + \xi_{10}^*) + \tau_2 \Omega_0 \otimes \Omega_0] J_0 E^T \end{aligned}$$

Поскольку E – поворот, находим требуемое равенство, и, таким образом, матрица $E^T \Lambda E$ постоянна во времени.

Теорема. Три собственных значения матрицы Λ постоянны во времени.

Доказательство. Так как E – поворот, то СЗ матрицы Λ – те же самые, что и для постоянной матрицы $E^T \Lambda E$. Таким образом, убедиться в постоянстве СЗ матрицы Λ можно прежде их явного вычисления.

5. Явное вычисление собственных значений матрицы Λ в случае осесимметричного твердого тела. Имеет место

Свойство 4. Вектор $k \times \Omega_0$ – собственный вектор матрицы $E^T \Lambda E$, соответствующий собственному значению $-C/2 \langle \Omega_0, \Omega_0 \rangle$. Так как E – поворот, то этот вектор – также собственный вектор матрицы Λ .

Доказательство. Вектор $k \times \Omega_0$ ортогонален двум векторам k и Ω_0 , так что

$$\xi_0^*(k \times \Omega_0) = 0 \quad (k \otimes k)(k \times \Omega_0) = 0, \quad J_0(k \times \Omega_0) = A(k \times \Omega_0)$$

При применении линейного отображения $E^T \Lambda E$ к вектору $k \times \Omega_0$ имеем

$$(E^T \Lambda E)(k \times \Omega_0) = \eta_0^* (-\tau_1 I + J_0)(k \times \Omega_0)$$

Анонсированный результат вытекает из равенства $A - \tau_1 = -C/2$.

Замечание. Поскольку матрица $E^T \Lambda E$ симметрична, два других собственных вектора ортогональны к вектору $k \times \Omega_0$, и, таким образом, их следует искать в плоскости, определенной векторами k и Ω_0 , или, что лучше, вектором k и ортогональным ему вектором $\Omega_0 - \langle k, \Omega_0 \rangle k$.

Заменяя в выражении для $E^T \Lambda E$ величину J_0 соотношением (4.1), имеем

$$\begin{aligned} E^T \Lambda E = & (A + C/2) \xi_0^* + \eta_0^* (J_0 - \pi_1 I) - (\xi_{01}^* + \xi_{10}^*) + A^{-2} C^{-1} \xi_{22}^* - \\ & - (A + C/2) A^{-2} C^{-1} (\xi_{12}^* + \xi_{21}^*) + (A + 2C) A^{-1} C^{-1} \xi_{11}^* \end{aligned}$$

Используя соотношения 1, 2 и 4 из леммы 2, можно перегруппировать слагаемые и записать это соотношение в виде

$$E^T \Lambda E = (A + 3C/2)\xi_0^* + \eta_0^*[J_0 - (A + C/2)I] - (1 + C/(2A))(\xi_{01}^* + \xi_{10}^*) + A^{-1}\xi_{11}^* \quad (5.1)$$

Пусть

$$\mu = \langle k, \Omega_0 \rangle, \quad \zeta_{01} = \Omega_0 \otimes k, \quad \zeta_{10} = k \otimes \Omega_0$$

Сформулируем следующий результат, который понадобится для упрощения выражения (5.1).

Лемма 3. Для матрицы инерции J_0 , имеющей два равных собственных значения, выполнены соотношения

- 1) $\xi_{01}^* + \xi_{10}^* = 2A\xi_0^* + (C - A)\mu(\zeta_{01} + \zeta_{10})$;
- 2) $\xi_{11}^* = A^2\xi_0^* + A(C - A)\mu(\zeta_{01} + \zeta_{10}) + (C - A)^2\mu^2 k \otimes k$

Доказательство. Исходя из равенства (4.1), получаем

$$\xi_{11}^* = A(\Omega_0 \otimes \Omega_0) + (C - A)\mu\zeta_{10} \quad (5.2)$$

Свойство 1 получается непосредственно из рассмотрения симметричной части (5.2).

Умножая равенство соотношения (5.2) справа на J_0 , находим соотношение

$$\xi_{11}^* = A\Omega_0 \otimes (J_0\Omega_0) + (C - A)\mu k \otimes (J_0\Omega_0)$$

из которого получается свойство 2.

Следующий результат

$$E^T \Lambda E = -C\eta_0^* I / 2 + C\xi_0^* / 2 - C/(2A)(C - A)\mu(\zeta_{01} + \zeta_{10}) + (C - A)[\eta_0^* + (C - A)A^{-1}\mu^2]k \otimes k \quad (5.3)$$

выводится непосредственно из равенства (5.1) с помощью соотношений 1 и 2 леммы 3.

Если твердое тело – однородный шар, то $A = C$ и вычисление матрицы Λ осуществляется непосредственно. Имеем

$$J_0 = CI, \quad \text{tr } J_0 = 3C, \quad K_0 = CI/2, \quad E = I; \quad \dot{\omega} = 0, \quad \omega = \Omega_0$$

Тогда

$$\Lambda = C[j(\Omega_0)]^2 / 2 = C(\xi_0^* - \eta_0^* I) / 2$$

Это выражение в точности совпадает с выражением (5.3) после подстановки $A = C$. Отсюда видно, что матрица

$$-\Lambda = Cj(\Omega_0)[j(\Omega_0)]^T / 2$$

положительна (но не определено-положительна).

Свойство 5. Пусть $r = [\eta_0^* - \mu^2]^{1/2}$ – длина вектора $\Omega_0 - \mu k$, а n – единичный вектор $r^{-1}(\Omega_0 - \mu k)$. Тогда матрица $E^T \Lambda E$ допускает следующее тензорное представление:

$$E^T \Lambda E = -C\eta_0^*(n \times k) \otimes (n \times k) / 2 - C\mu^2(n \otimes n) / 2 + + CA^{-1}(A - C/2)r\mu(n \otimes k + k \otimes n) + (A - C/2)r^2(k \otimes k) \quad (5.4)$$

Доказательство. В силу равенства

$$\Omega_0 = rn + \mu k$$

имеем последовательно

$$\zeta_{01} + \zeta_{10} = r(n \otimes k + k \otimes n) + 2\mu k \otimes k$$

$$\xi_0^* = r^2(n \otimes n) + r\mu(n \otimes k + k \otimes n) + \mu^2 k \otimes k$$

Подставляя предыдущие диады в равенство (5.3), получаем

$$E^T \Lambda E = -C\eta_0^* I / 2 + Cr^2(n \otimes n) / 2 + CA^{-1}(A - C/2)r\mu_0(n \otimes k + k \otimes n) + [(A - C/2)\mu^2 + (C - A)\eta_0^*]k \otimes k$$

Но единичная матрица I может быть представлена в виде

$$I = (n \times k) \otimes (n \times k) + n \otimes n + k \otimes k$$

откуда окончательно находим представление (5.4).

Найдем теперь СЗ матрицы Λ . Введем скаляры

$$c_1 = -(A - C/2)r^2 - C\mu^2 / 2, \quad c_2 = -C(A - C/2)(1 - C/A)^2 r^2 \mu^2 / 2$$

$$\Delta = c_1^2 + 4c_2$$

Три собственных значения матрицы Λ можно представить как

$$\lambda_1 = \frac{c_1 - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{c_1 + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_3 = -\frac{C}{2}\eta_0^2$$

В силу свойства 4 величина $-C\eta_0^* / 2$ – СЗ матриц $E^T \Lambda E$ и Λ . В силу соотношения (5.4) два других СЗ матрицы совпадают с СЗ матрицы

$$\begin{vmatrix} -C\mu^2 / 2 & CA^{-1}(A - C/2)r\mu \\ CA^{-1}(A - C/2)r\mu & -(A - C/2)r^2 \end{vmatrix} \quad (5.5)$$

Анонсированный результат справедлив, так как характеристический многочлен этой матрицы имеет вид

$$\lambda^2 - c_1 \lambda - c_2 = 0$$

Замечания. 1°. Так как величина $(A - C/2)$ положительна, свойство 1 можно проверить, ограничиваясь доказательством положительности матрицы, противоположной матрице (5.5).

2°. Дискриминант Δ характеристического многочлена положителен.

Имеем

$$\Delta = c_1^2 + 4c_2 = (A - C/2)^2 r^4 + (C/2)^2 \mu^4 + C(A - C/2)r^2 \mu^2 [1 - 2(1 - C/A)^2]$$

В силу равенства (4.2) величина

$$1 - 2(1 - C/A)^2 = -1 + 4CA^{-2}(A - C/2)$$

превосходит -1 , а дискриминант Δ превосходит положительную величину

$$[(A - C/2)r^2 - C\mu^2]^2$$

3°. Можно проверить, что три СЗ матрицы Λ отрицательны. Так как скаляр c_1 отрицателен, то надо показать, что величина λ_2 отрицательна. Имеем последовательность эквивалентностей

$$\lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} < -c_1 \Leftrightarrow \Delta^2 < c_1^2 \Leftrightarrow c_2 < 0$$

хотя отрицательность c можно вывести из положительности $(A - C/2)$.

6. Среднее по объему тензора связей Коши. Уравнения движения твердого тела (1.1) могут быть выведены из принципа виртуальных работ с учетом уравнений связи

$$R^T R = I$$

которые принимаются во внимание с помощью матрицы множителей Лагранжа Λ . С другой стороны, тело может быть рассмотрено как сплошная среда S . Тогда, используя принцип виртуальных работ для сплошной среды, можно получить [1] выражение для среднего по объему от тензора связей Коши σ и для матрицы Λ

$$\int_S \sigma dv = -R \Lambda R^T \quad (6.1)$$

где dv – элемент объема.

Простое выражение для конечного поворота

$$RE = \exp[tj(\Omega_0 + (C/A - 1)\mu k)]$$

и постоянство матрицы $E^T \Lambda E$ позволяют представить соотношение (6.1) в виде

$$-\int_S \sigma dv = RE(E^T \Lambda E)(RE)^T$$

Так как RE – поворот, то интеграл

$$\int_S (RE)^T \sigma (RE) dv$$

постоянен во времени.

Теорема и свойства 1 и 3 могут быть интерпретированы с точки зрения механики следующим образом: собственные значения осредненного по объему тензора связей Коши постоянны во времени и положительны.

7. Заключение. Примененный в работе подход к исследованию задачи осуществляется в рамках описания движения с помощью зависимых переменных [6]. Выбор переменных основан на параметризации движения твердого тела с помощью вектора поступательных перемещений и матрицы поворота. Вектор поступательных перемещений не стеснен никакими условиями, в то время как матрица стеснена условием, определяющим поворот. Это условие принимается во внимание с помощью симметричной матрицы Λ множителей Лагранжа. Основное преимущество данной формулировки состоит в простоте возникающей системы уравнений.

Численное исследование множителей Лагранжа, выполненное в рамках предлагаемого подхода, позволило установить интересные свойства уравнений движения: собственные значения матрицы Λ отрицательны и не меняются со временем, выражения для них удалось представить в виде явных формул. Более того, оказалось, что существует простая механическая интерпретация матрицы множителей Лагранжа в виде функции от компонент тензора связей Коши. С помощью найденных соотношений между матрицей Λ и средним по объему от тензора Коши предполагается применить критерий предела упругости Треска в качестве метода оптимизации формы.

Аналогичный подход, основанный на применении матриц типа Λ , позволит, вероятно, упростить исследование движения более сложных механических систем. Упрощение может состоять в существенной выгоде, связанной с линейностью системы.

Авторы благодарят Региональный совет Пуату-Шарент, Франция, за финансовую поддержку в виде региональной стипендии, предоставленной Д. Думитриу для написания диссертации по механике под научным руководством К. Валле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Isnard F.* Génération des équations du mouvement de systèmes polyarticulés avec prise en compte des rigidités par des multiplicateurs de Lagrange // Thèse de doctorat. Université de Poitiers, 1997. 236 p.
2. *Валле К., Амдуни А., Изнард Ф., Фортюн Д.* Уравнения движения твердого тела без параметризации вращений // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 30–36.
3. *Souriau J.-M.* Calcul linéaire. P.: Presses Univ. de France. V. 1. 1964. 280 p.; V. 2. 1965. 284 p.
4. *Isnard F., Dodds G., Vallée C.* Efficient multi-arm closed chain dynamics computation for visualisation // IEEE Intern. Conf. Intelligent Robots and Systems: IROS'97. Grenoble, France, 1997. V. 1. P. 30–35.
5. *Isnard F., Dodds G., Vallée C.* Dynamic positioning of closed chain robot mechanisms in virtual reality environments // IEEE Intern. Conf. on Intelligent Robots and Systems: IROS'98. Victoria, BC, Canada, 1998. V. 2. P. 1090–1095.
6. *Garcia de Jalón J., Bayo E.* Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems: The Real-Time Challenge. N.Y.: Springer, 1993. 440 p.

Шассенюиль, Франция

Поступила в редакцию
17.XI.2000

e-mail: claudio.vallee@13ma.univ-poitiers.fr;
dan.dumitriu@13ma.univ-poitiers.fr