

УДК 531.01

© 2001 г. С.А. Зегжда, М.П. Юшков

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ПУАНКАРЕ – ЧЕТАЕВА – РУМЯНЦЕВА

Путем введения касательного пространства к многообразию всех возможных положений механической системы уравнения ее движения записываются в виде одного векторного уравнения, имеющего вид второго закона Ньютона. Из этого уравнения, записанного для идеальных нелинейных нестационарных неголономных связей первого порядка, получены уравнения Пуанкаре – Четаева – Румянцева, а также и другие основные типы уравнений движения.

Исследованию уравнений движения нелинейных неголономных систем посвящен цикл работ В.В. Румянцева [1–5], опирающийся на подход Пуанкаре – Четаева. Остановимся на возможной геометрической интерпретации такого подхода.

Пусть в обобщенных координатах q^σ движение свободной механической системы описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma, \quad T = \frac{M}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta, \quad q^0 = t, \quad \dot{q}^0 = 1 \quad (1)$$

где Q_σ – обобщенная сила, соответствующая координате q^σ , M – масса всей системы. Здесь и далее по дважды встречающимся индексам предполагается суммирование; индексы ρ, σ, τ и ϵ принимают значения $1, 2, \dots, s$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – значения $0, 1, 2, \dots, s$; κ, ν – значения $1, 2, \dots, k$; λ, μ – значения $1, 2, \dots, l$, где $l = s - k$.

Введем в рассмотрение многообразие всех тех положений изучаемой механической системы, которые она может иметь в данный момент времени t . Зафиксируем некоторую точку этого многообразия, задаваемую координатами q^σ . Пусть старые и новые координаты этой точки выражаются друг через друга формулами

$$q^\sigma = q^\sigma(t, q_*), \quad q_*^\rho = q_*^\rho(t, q)$$

или в дифференциальной форме

$$\delta q^\sigma = \frac{\partial q^\sigma}{\partial q_*^\rho} \delta q_*^\rho, \quad \delta q_*^\rho = \frac{\partial q_*^\rho}{\partial q^\sigma} \delta q^\sigma$$

Величины δq^σ и δq_*^ρ , связанные этими соотношениями, называются контравариантными компонентами касательного вектора δy , а все множество векторов δy – касательным пространством к введенному выше многообразию в данной точке [6]. Вектор δy целесообразно представить в виде

$$\delta y = \delta q^\sigma e_\sigma$$

и совокупность векторов e_σ рассматривать как базис касательного пространства в системе координат q^σ . Евклидову структуру в касательном пространстве введем, используя инвариантность положительно определенной квадратичной формы

$$(\delta y)^2 = g_{\sigma\tau} \delta q^\sigma \delta q^\tau = g_{\rho\epsilon}^* \delta q_*^\rho \delta q_*^\epsilon$$

Здесь $g_{\sigma\tau}$ и $g_{\rho\epsilon}^*$ – коэффициенты, входящие в выражение кинетической энергии соответственно в координатах q^σ и q_*^ρ .

Обобщенные силы Q_σ , входящие в систему уравнений (1), по определению представляют собой коэффициенты при вариациях координат δq^σ в выражении для возможной элементарной работы δA . Используя сквозную нумерацию $i = 1, 2, 3, \dots$ для обозначения как декартовых координат x_i точек приложения сил, так и для проекций X_i этих сил, сможем записать

$$\delta A = X_i \delta x_i$$

Учитывая, что

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q^\sigma} \delta q^\sigma = \frac{\partial x_i}{\partial q_*^\rho} \delta q_*^\rho$$

получаем

$$\delta A = Q_\sigma \delta q^\sigma = Q_\rho^* \delta q_*^\rho \quad (2)$$

где

$$Q_\sigma = X_i \frac{\partial x_i}{\partial q^\sigma}, \quad Q_\rho^* = X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_*^\rho} = Q_\sigma \frac{\partial q^\sigma}{\partial q_*^\rho}$$

Выражение (2) представляет собой линейную инвариантную дифференциальную форму от вектора δy . Ее коэффициенты Q_σ и Q_ρ^* при использовании соответственно координат q^σ и q_*^ρ являются компонентами ковектора Y [6].

Пользуясь евклидовой структурой касательного пространства, представим величину δA в виде скалярного произведения

$$\delta A = Y \cdot \delta y, \quad Y = Q_\sigma e^\sigma$$

Здесь e^σ – векторы взаимного базиса, задаваемые соотношениями

$$e^\sigma \cdot e_\tau = \delta_\tau^\sigma = \begin{cases} 0, & \sigma \neq \tau \\ 1, & \sigma = \tau \end{cases}$$

Отсюда и из выражений $g_{\sigma\tau} = e_\sigma \cdot e_\tau$ следует, что

$$e_\tau = g_{\sigma\tau} e^\sigma, \quad e^\sigma = g^{\sigma\tau} e_\tau$$

Коэффициенты $g^{\sigma\tau}$ являются элементами матрицы, обратной к матрице с элементами $g_{\sigma\tau}$

Введение ковектора Y по выражению для возможной элементарной работы δA позволяет рассматривать систему уравнений (1) как одно векторное равенство

$$MW = Y$$

Здесь

$$\begin{aligned} W &= W_\sigma e^\sigma = \frac{1}{M} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} \right) e^\sigma = (g_{\sigma\tau} \ddot{q}^\tau + \Gamma_{\sigma,\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta) e^\sigma = W^\sigma e_\sigma = \\ &= (\ddot{q}^\sigma + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta) e_\sigma \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = g^{\sigma\tau} \Gamma_{\tau,\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} \left(\frac{\partial g_{\tau\beta}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\tau} \right)$$

Перейдем к изучению несвободного движения. В соответствии с принципом освобожденности наложение связей приводит к появлению силы реакции $\mathbf{R}$, поэтому будем иметь

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R} \quad (4)$$

Рассмотрим нелинейные нестационарные неголономные связи первого порядка, заданные в виде

$$f_1^x(t, q, \dot{q}) = 0 \quad (5)$$

Дифференцируя эти связи по времени, получаем

$$f_2^x(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \equiv a_{2\sigma}^{l+x}(t, q, \dot{q})\ddot{q}^\sigma + a_{20}^{l+x}(t, q, \dot{q}) = 0, \quad l = s - k \quad (6)$$

Заметим, что в таком виде могут быть заданы и линейные неголономные связи второго порядка. Голономные связи приводят к соотношениям (6) после двукратного дифференцирования их по времени.

Введение касательного пространства и в нем вектора $\mathbf{W}$, задаваемого формулами (3), позволяет систему уравнений (6) записать в векторной форме

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{l+x} \cdot \mathbf{W} &= \chi_2^x(t, q, \dot{q}) \\ \mathbf{a}^{l+x} &= a_{2\sigma}^{l+x} \mathbf{e}^\sigma, \quad \chi_2^x = -a_{20}^{l+x} + a_{2\sigma}^{l+x} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \end{aligned} \quad (7)$$

Из этих выражений видно, что при наличии связей в s -мерном касательном пространстве целесообразно ввести в рассмотрение подпространство, базисом которого являются векторы $\mathbf{a}^{l+x}$ (K -пространство). Тогда все пространство можно представить в виде прямой суммы этого подпространства и его ортогонального дополнения с базисом $\mathbf{a}_\lambda$ (L -пространство), при этом

$$\mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{a}^{l+x} = 0$$

Отметим, что данное разбиение касательного пространства уравнениями связей соответствует фиксированным значениям переменных $t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma$.

Было показано [7], что составляющая $\mathbf{W}^K$ вектора $\mathbf{W}$, принадлежащая K -пространству, полностью определяется уравнениями связей (7), если

$$|h^{xv}| \neq 0 \quad (8)$$

где

$$h^{xv} = \mathbf{a}^{l+x} \cdot \mathbf{a}^{l+v}$$

Показано также, что в случае идеальных связей уравнение (4) принимает вид

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_x \mathbf{a}^{l+x} \quad (9)$$

Итак, векторное уравнение (9) выражает закон движения как голономных, так и неголономных систем, у которых при наличии идеальных связей обобщенные ускорения $\ddot{q}^\sigma$ удовлетворяют системе уравнений (6), а векторы $\mathbf{a}^{l+x}$ — условию (8). Существенно то, что это уравнение имеет векторную форму, инвариантную по отношению к выбору системы координат, в которой задаются уравнения связей и в которой описывается движение. Поэтому получим из него основные виды уравнений движения неголономных систем и тем самым покажем их эквивалентность.

Проектируя уравнение (9) на каким-либо образом построенную систему векторов $\mathbf{a}_\lambda$, образующих базис L -пространства, получим систему скалярных уравнений

$$M\mathbf{W} \cdot \mathbf{a}_\lambda = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{a}_\lambda \quad (10)$$

Дополнив уравнения (10) уравнениями (7), получим замкнутую систему уравнений, позволяющую найти закон движения в виде

$$W = F(t, q, \dot{q})$$

Приведение задачи к этому уравнению можно по выражению В.С. Новоселова ([8, с. 28]) рассматривать как "сведение задачи неголономной механики к условной задаче механики голономных систем".

Конкретная форма уравнений (10) зависит как от способа задания системы векторов a_λ , так и от того, в каком виде раскрываются скалярные произведения $MW \cdot a_\lambda$. Рассмотрим основные формы уравнений (10).

Интегрируемые дифференциальные связи и линейные неголономные связи первого порядка будем рассматривать как частные случаи связей, заданных уравнениями (5). По предположению, векторы $a^{l+\kappa}$ удовлетворяют условию (8), и поэтому из уравнений связей следует, что обобщенные скорости $\dot{q}^\sigma$ при заданных значениях переменных t и q^σ могут быть выражены через независимые переменные v_*^λ . В работах, [8–10] они называются кинематическими характеристиками, а в работах [1–5, 11–17], посвященных уравнениям Пуанкаре – Четаева, – параметрами Пуанкаре. Задаются переменные v_*^λ такими функциями:

$$v_*^\lambda = f_*^\lambda(t, q, \dot{q})$$

дополнив которые функциями

$$v_*^{l+\kappa} = f_*^{l+\kappa}(t, q, \dot{q}) = f_1^\kappa(t, q, \dot{q})$$

будем иметь

$$\dot{q}^\sigma = \dot{q}^\sigma(t, q, v_*) \quad (11)$$

Пусть хотя бы одно из выражений $f_*^\sigma dt$ не является полным дифференциалом или не может быть к нему сведено. При этом, как известно, переменные

$$\pi^\sigma = \int_{t_0}^t v_*^\sigma(t) dt$$

нельзя рассматривать как новую систему лагранжевых координат. Поэтому они называются квазикоординатами, а величины $\dot{\pi}^\sigma = v_*^\sigma$ – квазискоростями. При линейных связях обобщенные скорости и квазискорости (параметры Пуанкаре) связаны соотношениями

$$v_*^p = a_\sigma^p(t, q) \dot{q}^\sigma + a_0^p(t, q), \quad \dot{q}^\sigma = b_\tau^\sigma(t, q) v_*^\tau + b_0^\sigma(t, q)$$

или в краткой форме

$$v_*^\alpha = a_\beta^\alpha \dot{q}^\beta, \quad \dot{q}^\alpha = b_\beta^\alpha v_*^\beta, \quad q^0 = t, \quad \dot{q}^0 = v_*^0 = 1, \quad a_\beta^0 = b_\beta^0 = \delta_\beta^0 \quad (12)$$

Использование переменных v_*^p позволяет ввести векторы

$$a^\alpha = \frac{\partial v_*^p}{\partial \dot{q}^\sigma} e^\sigma, \quad a_\tau = \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\tau} e_\sigma$$

такие, что

$$a^p \cdot a_\tau = \delta_\tau^p \quad (13)$$

Система векторов $\mathbf{a}_\lambda$ образует при этом базис L -пространства, так как

$$\mathbf{a}^{l+\kappa} = \frac{\partial v_*^{l+\kappa}}{\partial \dot{q}^\sigma} \mathbf{e}^\sigma, \quad \mathbf{a}^{l+\kappa} \cdot \mathbf{a}_\lambda = 0$$

Учет уравнений связей за счет представления обобщенных скоростей в виде

$$\dot{q}^\sigma = F^\sigma(t, q, v_*^1, \dots, v_*^l)$$

по выражению В.В. Румянцева ([2, с. 3]) означает, что «произведена параметризация наложенных на систему... связей». При ее наличии известным становится базис L -пространства, он задается формулами

$$\mathbf{a}_\lambda = \frac{\partial F^\sigma}{\partial v_*^\lambda} \mathbf{e}_\sigma$$

Таким образом, разбиение касательного пространства уравнениями связей на подпространства K и L может быть осуществлено посредством их параметризации. При этом известным является базис L -пространства, который как раз и необходим для перехода к конкретной форме записи уравнений (10).

Если связи линейны, то их параметризация, как следует из выражений (12), такова:

$$\dot{q}^\sigma = b_\lambda^\sigma(t, q) v_*^\lambda + b_0^\sigma(t, q)$$

Следовательно, в этом случае имеем

$$\mathbf{a}_\lambda = b_\lambda^\sigma(t, q) \mathbf{e}_\sigma$$

Вектор MW , входящий в уравнения (10), может быть представлен в виде

$$MW = \frac{d(MV)}{dt}; \quad MV = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} \mathbf{e}^\sigma, \quad MV = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\rho} \mathbf{a}^\rho \quad (14)$$

Обобщенные скорости $\dot{q}^\sigma$ будем рассматривать как функции всех переменных v_*^ρ , и только в окончательных выражениях, учитывая уравнения связей, будем полагать $v_*^{l+\kappa} = 0$. При таком подходе будем иметь

$$MV = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\rho} \mathbf{a}^\rho = \frac{\partial T^*}{\partial v_*^\rho} \mathbf{a}^\rho \quad (15)$$

где $T^* = T^*(t, q, v_*)$ – функция переменных t, q^σ, v_*^σ , полученная при подстановке в выражение кинетической энергии $T = T(t, q, \dot{q})$ представлений (11).

Из соотношений (14), (15) следует, что

$$MW \cdot \mathbf{a}_\lambda = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_*^\lambda} + \frac{\partial T^*}{\partial v_*^\rho} \dot{\mathbf{a}}^\rho \cdot \mathbf{a}_\lambda$$

Учитывая выражения (13), получаем

$$\dot{\mathbf{a}}^\rho \cdot \mathbf{a}_\lambda = -\mathbf{a}^\rho \cdot \dot{\mathbf{a}}_\lambda$$

и, следовательно,

$$MW \cdot \mathbf{a}_\lambda = \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial v_*^\lambda} - MV \cdot \dot{\mathbf{a}}_\lambda \quad (16)$$

Так как

$$\dot{\mathbf{a}}_\lambda = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda} \right) \mathbf{e}_\sigma + \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda} \dot{\mathbf{e}}_\sigma, \quad \mathbf{e}_\sigma = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}^\sigma}, \quad \dot{\mathbf{e}}_\sigma = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q^\sigma}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial q^\tau} = \frac{\partial T}{\partial q^\tau} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial q^\tau}$$

то

$$M\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{a}}_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda} - \frac{\partial \dot{q}^\tau}{\partial v_*^\lambda} \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial q^\tau} \right) + \frac{\partial \dot{q}^\tau}{\partial v_*^\lambda} \frac{\partial T^*}{\partial q^\tau} \quad (17)$$

Из выражений (16) и (17) следует, что уравнения (10) могут быть представлены в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial v_*^\lambda} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} T_\lambda^\sigma = \tilde{Q}_\lambda \quad (18)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \pi^\lambda} = \frac{\partial \dot{q}^\tau}{\partial v_*^\lambda} \frac{\partial}{\partial q^\tau}, \quad T_\lambda^\sigma = \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda} - \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial \pi^\lambda}, \quad \tilde{Q}_\lambda = Q_\sigma \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda}$$

причем $\tilde{Q}_\lambda$ – обобщенные силы, соответствующие параметрам Пуанкаре (квази-скоростям) v_*^λ .

Уравнения (18) при учете того, что

$$\frac{\partial T^*}{\partial v_*^\rho} \frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot{q}^\sigma} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma}$$

можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial v_*^\lambda} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi^\lambda} + \frac{\partial T^*}{\partial v_*^\rho} W_\lambda^\rho = \tilde{Q}_\lambda; \quad W_\lambda^\rho = - \frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot{q}^\sigma} T_\lambda^\sigma \quad (19)$$

Уравнения (18) и (19), как следует из их вывода, могут быть применены и к голономным, и к неголономным системам, причем как с линейными, так и с нелинейными по скоростям идеальными связями. Для случая, когда время явно не входит ни в кинетическую энергию, ни в уравнения связей, уравнения (18) и (19) были в 1938 г. получены Гамелем [18], а для общего случая в 1957 г. – В.С. Новоселовым [9]. В 1998 г. В.В. Румянцев [4] получил эти уравнения в результате обобщения уравнений Пуанкаре и Четаева. Он установил ([5, с. 57]), что эти уравнения "... можно рассматривать как общие уравнения классической механики, включающие в себя как частные случаи все известные уравнения движения".

Как показали Гамель и В.В. Новоселов, коэффициенты W_λ^ρ могут быть преобразованы к виду

$$W_\lambda^\rho = \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial v_*^\rho}{\partial q^\sigma} \right) \quad (20)$$

В случае линейных однородных стационарных связей коэффициенты W_λ^ρ , как следует из выражений (12) и (20), таковы:

$$W_\lambda^\rho = c_{\lambda\mu}^\rho v_*^\mu, \quad c_{\lambda\mu}^\rho = \left(\frac{\partial a_\sigma^\rho}{\partial q^\tau} - \frac{\partial a_\tau^\rho}{\partial q^\sigma} \right) b_\lambda^\sigma b_\mu^\tau \quad (21)$$

Уравнения (19) в этом случае принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial v_*^\lambda} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi^\lambda} + c_{\lambda\mu}^\rho v_*^\mu \frac{\partial T^*}{\partial v_*^\rho} = \tilde{Q}_\lambda \quad (22)$$

Для случая $l = s$ эти уравнения, а также выражения для коэффициентов $c_{\sigma\tau}^\rho$, как отмечает В.С. Новоселов ([9, с. 55]), "... впервые были получены П.В. Воронцом в 1901 г. [19]; в 1904 г. эти результаты вновь получает Гамель [20]". Далее В.С. Новоселов пишет, что в 1901 г., несколько раньше работы Воронца, появилась заметка Пуанкаре [21], который получил уравнения, весьма близкие к уравнению (22). Уравнения Пуанкаре соответствуют случаю, когда в уравнениях (22) при $l = s$ коэффициенты $c_{\sigma\tau}^\rho$ постоянны, а силы выражаются через силовую функцию

$$\tilde{Q}_\tau = b_\tau^\sigma \frac{\partial U}{\partial q^\sigma}$$

Уравнения (22), таким образом, могут быть записаны в форме, предложенной Пуанкаре [13],

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial v_*^\tau} &= c_{\sigma\tau}^\rho v_*^\sigma \frac{\partial L^*}{\partial v_*^\rho} + X_\tau L^*; \quad L^*(q, v_*) = T^* + U, \\ X_\tau &= b_\tau^\sigma \frac{\partial}{\partial q^\sigma} \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $L^*(q, v_*)$ – функция Лагранжа, а X_τ – линейные дифференциальные операторы, образующие базис некоторой s -мерной алгебры Ли [13, с. 43] с коммутатором

$$[X_\sigma, X_\tau] = X_\sigma X_\tau - X_\tau X_\sigma = c_{\sigma\tau}^\rho X_\rho \quad (24)$$

где $c_{\sigma\tau}^\rho$ – структурные постоянные алгебры Ли. Было отмечено [13], что произвольно выбранная система s операторов, действующих в s -мерном пространстве, для которой выполнено лишь условие $\det [b_\tau^\sigma(q)] \neq 0$, алгебру Ли не образует, так как при этом в равенствах (24) коэффициенты $c_{\sigma\tau}^\rho$ будут функциями q^σ .

Использование касательного пространства и в нем векторов a^ρ , a_τ позволяет последнее выражение в (23) и равенства (24) записать соответственно в виде

$$X_\tau = a_\tau \cdot \nabla$$

$$[X_\sigma, X_\tau] = a_\sigma \cdot \nabla (a_\tau \cdot \nabla) - a_\tau \cdot \nabla (a_\sigma \cdot \nabla) = c_{\sigma\tau}^\rho a_\rho \cdot \nabla = c_{\sigma\tau}^\rho X_\rho$$

Из этого представления операторов X_τ и их коммутатора следует, что они образуют замкнутую систему операторов [4] и при переменных коэффициентах $c_{\sigma\tau}^\rho$.

Введем в рассмотрение контравариантные компоненты вектора δu относительно базиса $\{a_\tau\}$, обозначая их через $\delta' v_*^\rho$, т.е. полагая

$$\delta' v_*^\rho = \delta u \cdot a^\rho$$

В этом случае будем иметь

$$\delta u = \delta' v_*^\tau a_\tau = \delta' v_*^\tau b_\tau^\sigma e_\sigma = \delta q^\sigma e_\sigma$$

и, следовательно,

$$\delta q^\sigma = b_\tau^\sigma \delta' v_*^\tau$$

Пусть $\mathbf{r}(t, q)$ – радиус-вектор произвольной точки механической системы. Тогда

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma} \delta q^\sigma = b_\tau^\sigma \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma} \delta' v_\tau^* = \delta' v_\tau^* x_\tau \mathbf{r} \quad (25)$$

Операторы x_τ позволяют, таким образом, возможные перемещения $\delta \mathbf{r}$, входящие в общее уравнение механики, представить в виде (25).

Пуанкаре сделал удивительное открытие. Он установил, что существуют механические системы, у которых касательное пространство обладает замечательным свойством. Вводимый в нем базис $\mathbf{a}_\tau = b_\tau^\sigma \mathbf{e}_\sigma$, соответствующий квазискоростям, задается такими функциями b_τ^σ от обобщенных координат, при которых в коммутаторе (24) коэффициенты $c_{\sigma\tau}^\rho$ постоянны. Как уже отмечалось, операторы x_τ при этом образуют базис алгебры Ли. Характерным примером механической системы с таким свойством касательного пространства служит абсолютно твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки. Параметрами Пуанкаре в этом случае являются, в частности, проекции вектора мгновенной угловой скорости на главные оси инерции. Уравнения Пуанкаре (23) становятся при этом динамическими уравнениями Эйлера (см., например, [2]).

Рассмотрим случай, когда линейные преобразования (12) неоднородны и нестационарны. Уравнения (19) при этом, как следует из выражений (20) и (21), при наличии как потенциальных, так и непотенциальных сил запишутся в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial v_\lambda^*} - \frac{\partial L^*}{\partial \pi^\lambda} = c_{\mu\lambda}^\rho v_\mu^* \frac{\partial L^*}{\partial v_\rho^*} + c_{0\lambda}^\rho \frac{\partial L^*}{\partial v_\rho^*} + \tilde{Q}_\lambda \quad (26)$$

Здесь

$$c_{\alpha\beta}^\rho = a_\gamma^\rho \left(\frac{\partial b_\beta^\gamma}{\partial q^\delta} b_\alpha^\delta - \frac{\partial b_\alpha^\gamma}{\partial q^\delta} b_\beta^\delta \right) = \left(\frac{\partial a_\gamma^\rho}{\partial q^\delta} - \frac{\partial a_\delta^\rho}{\partial q^\gamma} \right) b_\alpha^\gamma b_\beta^\delta$$

Два различных представления коэффициентов $c_{\alpha\beta}^\rho$ вытекают из того, что

$$a_\gamma^\rho b_\beta^\gamma = \delta_\beta^\rho$$

Уравнения (26) называются уравнениями неголономных систем в переменных Пуанкаре – Четаева [2, 13, 15], а также уравнениями движения неголономных систем в квазикоординатах [22, 23]. Четаев обобщил уравнения Пуанкаре (23) на случай, когда число лагранжевых координат больше числа независимых параметров Пуанкаре, т.е. получил, используя подход Пуанкаре, уравнения (22) для случая, когда в них коэффициенты $c_{\lambda\mu}^{l+\kappa} = 0$, а коэффициенты $c_{\lambda\mu}^\nu$ – постоянны. Он отметил, однако, что полученные им уравнения имеют смысл и для переменных коэффициентов $c_{\lambda\mu}^\nu$ [12].

Это обобщение уравнений Пуанкаре осуществлено в работах [1–5, 13–17].

В заключение рассмотрим две простейшие формы раскрытия скалярных произведений в уравнениях (10), предложенные Аппелем и Маджи.

Вводя функцию Аппеля

$$T_1 = MW^2 / 2$$

можем записать

$$MW = MW_\sigma \mathbf{e}^\sigma = \frac{\partial T_1}{\partial \ddot{q}^\sigma} \mathbf{e}^\sigma = \frac{\partial T_1^*}{\partial v_\sigma^*} \mathbf{a}^\sigma$$

Поэтому, используя уравнения (10), приходим к уравнениям Аппеля

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial v_*^\lambda} = \tilde{Q}_\lambda$$

Уравнения Маджи

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} - Q_\sigma \right) \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda} = 0$$

получим из уравнений (10), если воспользуемся выражением (3), а также тем, что

$$a_\lambda = \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda} e_\sigma$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В.В. Об уравнениях Пуанкаре – Четаева // Сб. тр. 5-й Всесоюз. конф. по аналит. механике, теории устойчивости и управлению движением. М.: ВЦ АН СССР, 1990. Ч. 2. С. 3–18.
2. Румянцев В.В. Об уравнениях Пуанкаре – Четаева // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 3–16.
3. Румянцев В.В. Общие уравнения аналитической динамики // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 917–928.
4. Румянцев В.В. К уравнениям Пуанкаре и Четаева // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 4. С. 531–538.
5. Румянцев В.В. Об общих уравнениях классической механики // Тез. докл. 2-го Всерос. совещ. семинара зав. кафедрами теорет. механики. М., 1999. С. 57.
6. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука. 1979. 760 с.
7. Зегжда С.А., Филиппов Н.Г., Юшков М.П. Уравнения динамики неголономных систем со связями высших порядков. I // Вестн. С.-Пб. ун-та. Сер. 1. 1998. Вып. 3. № 15. С. 75–81.
8. Новоселов В.С. Сведение задачи неголономной механики к условной задаче механики голономных систем // Учен. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. 1957. Вып. 31. № 217. С. 28–49.
9. Новоселов В.С. Применение нелинейных неголономных координат в аналитической механике // Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. 1957. Вып. 31. № 217. С. 50–83.
10. Новоселов В.С. Расширенные уравнения движения нелинейных неголономных систем // Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. 1957. Вып. 31. № 217. С. 84–89.
11. Четаев Н.Г. Об уравнениях Пуанкаре // ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 2. С. 253–262.
12. Четаев Н.Г. Теоретическая механика. М.: Наука, 1987. 368 с.
13. Мархашов Л.М. Об уравнениях Пуанкаре и Пуанкаре – Четаева // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 43–55.
14. Мархашов Л.М. Об одном обобщении канонической формы уравнений Пуанкаре // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 157–160.
15. Фам Гуен. Об уравнениях движения неголономных механических систем в переменных Пуанкаре – Четаева // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 253–259.
16. Фам Гуен. К уравнениям движения неголономных механических систем в переменных Пуанкаре – Четаева // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 5. С. 804–814.
17. Фам Гуен. Об одной форме уравнений движения механических систем // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 3. С. 397–402.
18. Hamel G. Nichtholonome Systeme höherer Art // Sitzb. Berliner Math. Gesellschaft. 1938. Bd. 37. S. 41–52.
19. Воронец П.В. Об одном преобразовании уравнений динамики. Киев: Тип. Имп. Ун-та Св. Владимира, 1901. 16 с.
20. Hamel G. Die Lagrange-Eulerischen Gleichungen der Mechanik // Z. Math. und Phys. 1904. Bd. 50. H. 1/2. S. 1–57.
21. Poincaré H. Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique // C. R. Acad. Sci. Paris. 1901. V. 132. P. 369–371.
22. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 520 с.
23. Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А. Введение в аналитическую механику. М.: Наука, 1991. 256 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
25.V.2000