УДК 531.36

© 2001 г. Л. Хатвани

О ДЕЙСТВИИ ДЕМПФИРОВАНИЯ НА СВОЙСТВА УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЙ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Предлагается обзор недавних результатов автора по различным свойствам устойчивости и устойчивости по части переменных для демпфированного осциллятора. Асимптотическая устойчивость по скоростям гарантирована для равновесия лагранжевых систем под действием трения с неограниченными коэффициентами демпфирования. Случаи скалярных уравнений

$$\ddot{x}+h(t)\dot{x}+x=0 \text{ и } \ddot{x}+h(t,x,\dot{x})\dot{x}+f(x)=0$$

рассмотрены при действии "большого" демпфирования, "малого" демпфирования и в "общем" случае. Изучен эффект "прерывистого" трения.

1. Демпфированные осцилляторы. Рассмотрим голономную, склерономную механическую систему с r степенями свободы, которая находится под действием потенциальных, диссипативных и гироскопических сил. Как известно, движения описываются уравнениями Лагранжа

$$\frac{\partial}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}+Q \tag{1.1}$$

где использованы следующие обозначения: векторы-столбцы $q,\dot{q} \in \mathbb{R}^r$ состоят из обобщенных координат и скоростей соответственно (q^T – вектор-строка, полученная транспонированием $q \in \mathbb{R}^r$); потенциальная энергия Π: $q \mapsto \Pi(q) \in \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, причем $\Pi(0) = 0$; кинетическая энергия имеет вид $T = T(q,\dot{q})=(1/2)\dot{q}^T A(q)\dot{q}^T$, где симметричная матричная функция $A: q \mapsto A(q) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ непрерывно дифференцируема; непрерывная функция $Q: (q,\dot{q}) \to Q(q,\dot{q}) \in \mathbb{R}^r$ задает равнодействующую непотенциальных и диссипативных сил с полной диссипацией, т.е. существует функция $c \in \mathcal{K}$ (где $\mathcal{K}$ – класс строго возрастающих непрерывных функций w: $\mathbb{R}_+ := [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ с $w(0) = 0$), такая, что $Q^T(q,\dot{q})\dot{q} \leqslant -c(|\dot{q}|)$ для всех $q,\dot{q} \in \mathbb{R}^r$. Предположим, что $q = \dot{q} = 0$ – равновесие системы (1.1). Будем рассматривать свойства устойчивости этого равновесия.

Ранее [1] был рассмотрен специальный случай системы (1.1), который описывает движение материальной точки единичной массы в $\mathbb{R}^3$

$$\ddot{x}=\frac{\partial U}{\partial x}-f(v)\frac{\dot{x}}{v},\ \ddot{y}=\frac{\partial U}{\partial y}-f(v)\frac{\dot{y}}{v},\ \ddot{z}=\frac{\partial U}{\partial z}-f(v)\frac{\dot{z}}{v} \tag{1.2}$$

$$v:=((\dot{x})^2+(\dot{y})^2+(\dot{z})^2)^{1/2},\ f(v)>0 \text{ при } v>0,\ f(0)=0$$

где $U = U(x, y, z)$ – потенциальная функция, v – величина скорости, $f = f(v)$ – коэффициент демпфирования, и были доказаны следующие две теоремы.

Теорема А [1]. Если потенциальная функция U имеет изолированный максимум в точке

$$x = y = z = 0 \tag{1.3}$$

то равновесие

$$x = y = z = \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0 \tag{1.4}$$

устойчиво.

Теорема Б [1]. Если потенциальная функция U имеет изолированный минимум в точке (1.3) и отношение $f(v)/v$ ограничено сверху вблизи $v = 0$, то равновесие (1.4) неустойчиво.

Фейер пишет [1]: "Если трение велико в том смысле, что функция $f(v)$ имеет порядок v^α $(0 < \alpha < 1)$ вблизи $v = 0$, то метод моего доказательства не работает. Мне приходится оставить открытым вопрос о том, может ли трение разрушить устойчивость в этом случае".

Эти теоремы были лишь первым этапом решения задачи обобщения теоремы Лагранжа – Дирихле и ее обращения для диссипативных систем (см. [2–10]). Так, при условиях теоремы А можно было бы ожидать большего, а именно: асимптотической устойчивости равновесия. Фейер лишь заметил, что "во время движения скорость v становится сколь угодно малой бесконечное число раз"; иными словами, $\liminf v(t) = 0$ при $t \to \infty$. В.В. Румянцев [4] доказал, что более точно $\lim v(t) = 0$ при $t \to \infty$ для более общей системы (1.1).

Теорема В [4]. Предположим, что $\Pi(q) \equiv 0$ в системе (1.1). Тогда равновесие $q = \dot{q} = 0$ асимптотически устойчиво по скоростям.

Можно ожидать наличие этого же свойства и в случае, когда потенциальные силы действуют, как в системе (1.2). Изучим задачу для системы (1.1) в случае, когда диссипативные силы могут также явно зависеть от времени t.

Теорема 1.1. [11] Если в системе (1.1) потенциальная энергия Π имеет строгий минимум при $q = 0$ и справедливы соотношения

$$Q = Q(q, \dot{q}, t) = B(q, t)\dot{q}, \quad \dot{q}^T B(q, t)\dot{q} \geqslant \dot{q}^T B(q)\dot{q}$$

с положительно-определенной матричной функцией $B(q)$ в окрестности равновесия $q = \dot{q} = 0$ для всех $t \geqslant 0$, то это равновесие устойчиво, асимптотически устойчиво по отношению к скоростям и, кроме того, система "асимптотически останавливается" [8].

Последнее означает, что для каждого движения, начинающегося из малой окрестности равновесия, имеют место соотношения

$$\lim \dot{q}(t) = 0, \quad \lim q(t) = q_* \in \mathbb{R}^r \text{ при } t \to \infty$$

Возникает вопрос: может ли система останавливаться асимптотически в точке $q_* \neq 0$, которая не является положением равновесия? Эта проблема рассматривается в следующем разделе. Заметим, что вопрос, оставленный Фейером открытым, таковым больше не является. Из теоремы Сальвадори ([10, теорема 5.2 в гл. III]) следует, что теорема Б верна для произвольной непрерывной функции f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Следовало бы отметить, что теорема Сальвадори основывается на теореме Барбашина – Красовского о неустойчивости [12].

2. Большое демпфирование. Ответ на вопрос, поставленный в конце предыдущего раздела, утвердительный. В самом деле, рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + (2 + e^t)\dot{x} + x = 0$$

Функция $x(t) = c(1 + e^{-t})$ является решением для каждого $c \in \mathbb{R}$ и $\lim x(t) = c$ при $t \to \infty$.

В этом состоит явление *передемпфирования*: коэффициент демпфирования возрастает настолько быстро, что точка не может вернуться в равновесие, так как трение может уравновесить большую потенциальную силу, несмотря на тот факт, что скорость стремится к нулю. Спрашивается, сохранится ли это явление, когда коэффициент демпфирования стремится к бесконечности при $t \to \infty$? Ответ отрицателен. Можно показать, что уравнение

$$\ddot{x} + t\dot{x} + x = 0$$

имеет общее решение

$$x(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\left\{c_1 + c_2\int_0^t \exp\frac{s^2}{2}ds\right\}$$

и, следовательно, все решения стремятся к нулю при $t \to \infty$. Поэтому возникает следующая задача: какие условия надо наложить на матрицу $B(q, t)$ коэффициентов демпфирования, чтобы можно было гарантировать, что $q_* = 0$ для всех решений, или, иными словами, что система асимптотически остановится лишь в положении равновесия.

Чтобы исследовать эту задачу, нужно начать с "правила живых сил":

$$\dot{q}^T(t)A(q(t))\dot{q}(t) + \Pi(q(t)) = -\int_{t_0}^t \dot{q}^T(s)B(q(s), s)\dot{q}(s)ds + \text{const}$$

и добиться того, чтобы правая часть этого равенства стремилась к нулю при $t \to \infty$. Трудность состоит в необходимости оценить интеграл в правой части, зная лишь функцию $(q, t) \mapsto B(q,t)$, при неизвестных движениях $t \mapsto (q(t), \dot{q}(t))$.

Рассмотрим простейший случай линейной системы с одной степенью свободы

$$\ddot{x} + h(t)\dot{x} + x = 0, \quad h(t) \geqslant 0 \tag{2.1}$$

В этом случае асимптотическая устойчивость равновесия

$$x = \dot{x} = 0 \tag{2.2}$$

системы (2.1) эквивалентна условиям

$$\lim x(t) = \lim \dot{x}(t) = 0 \text{ при } t \to \infty \text{ для всех решений} \tag{2.3}$$

Из основ теории устойчивости известно, что если $h(t) \equiv h_0 = \text{const}$, $h_0 > 0$, то нулевое решение системы (2.1) асимптотически (экспоненциально) устойчиво. Это обстоятельство обобщается следующим образом.

Теорема Г [13]. Предположим, что имеются постоянные $\underline{h}$, $\overline{h}$, такие, что

$$0 < \underline{h} \leqslant h(t) \leqslant \overline{h} < \infty \text{ для всех } t \geqslant 0 \tag{2.4}$$

Тогда имеют место условия (2.3).

Согласно условию (2.4), различаем три случая:

1) большое демпфирование: $0 < \underline{h} \leqslant h(t) (t \geqslant 0)$,

2) малое демпфирование: $0 \leqslant h(t) \leqslant \overline{h} < \infty \ (t \geqslant 0)$,

3) общий случай: $0 \leqslant h(t) < \infty \ (t \geqslant 0)$.

В случае большого демпфирования необходимо исключить передемпфирование. Дадим необходимые и достаточные условия выполнения соотношения (2.3), используя интегральную функцию

$$H(t) = \int_0^t h(s)ds \quad (t \geqslant 0)$$

Теорема 2.1. [14] Предположим, что $h(t) \geqslant \underline{h} > 0$ для всех $t \geqslant 0$ и c – фиксированное положительное число. Тогда равновесие (2.2) системы (2.1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда

$$\sum \equiv \sum_{n=1}^{\infty} [H^{-1}(nc) - H^{-1}((n-1)c)]^2 = \infty \tag{2.5}$$

где H^{-1} – функция, обратная H.

Преимущество условия (2.5) состоит в том, что она не только необходимое и достаточное, а также в том, что его можно легко проверить. Действительно,

$$\sum \equiv \sum_{n=1}^{\infty} [(2n)^{1/2} - (2(n-1))^{1/2}]^2 \geqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty, \text{ если } h(t) = t$$

$$\sum \equiv \sum_{n=1}^{\infty} [(3n)^{1/3} - (3(n-1))^{1/3}]^2 \leqslant 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} < \infty, \text{ если } h(t) = t^2$$

т.е. равновесие асимптотически устойчиво для $h(t) = t$ и не является асимптотически устойчивым для $h(t) = t^2$.

Из теоремы 2.1 можно вывести, что условие

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{h} = \infty \tag{2.6}$$

необходимо для асимптотической устойчивости. Выше было указано, что это условие не является достаточным. Однако, используя теорему 2.1, достаточные условия можно получить в терминах функции h.

Следствие [14]. Предположим, что $h(t) > 0$ для всех $t \geqslant 0$ и выполнено условие (2.6). Если функция h дифференцируема и величина $(1/h)'$ ограничена сверху или снизу, то равновесие (2.2) уравнения (2.1) асимптотически устойчиво.

Все предыдущие условия, накладываемые на возрастание h и гарантирующие асимптотическую устойчивость, могут быть легко выведены из теоремы 2.1 (см. [14]).

Заметим, что теорема 2.1 решает задачу лишь для скалярного линейного уравнения (2.1). Важно найти условие, соответствующее условию (2.5) для линейных систем и для уравнений Лагранжа (1.1).

3. Малое демпфирование. Случай малого демпфирования представляется более сложным. Здесь более нет необходимых и достаточных условий, передемпфирование не возникает, неосциллирующие решения стремятся к нулю, так что представляют интерес только осциллирующие решения. Из правила живых сил следует, что условие $H(\infty) = \infty$ является необходимым для выполнения условия (2.3). Было доказано [15], что это условие также достаточно для монотонной функции h. Однако на практике демпфирование часто оказывается прерывистым, поэтому немонотонный случай представляет особый интерес. Следующая теорема дает решение задачи для коэффициента h, равного "в среднем" положительной постоянной.

Теорема Д [16]. Предположим, что $0 \leqslant h(t) \leqslant \overline{h} = \text{const}$ для всех $t \geqslant 0$ и имеются постоянные $B > 0$, T, такие, что

$$H(t) \geqslant Bt, \ t \geqslant T$$

Тогда нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво.

Спрашивается, насколько неулучшаемо это условие? Следующая теорема дает на этот вопрос отрицательный ответ и приводит к неулучшаемому результату для степенных функций h.

Теорема 3.1. [17] 1°. Если

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-2/3} H(t) > 0 \tag{3.1}$$

то равновесие (2.2) системы (2.1) асимптотически устойчиво.

2°. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует функция h, такая, что

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-2/3+\varepsilon} H(t) > 0$$

но, тем не менее нулевое решение системы (2.1) не является асимптотически устойчивым.

Правило живых сил показывает, что действие трения может быть измерено интегралом от коэффициента демпфирования h. С этой точки зрения условие (3.1) предпочтительнее, чем $h(t) \geqslant \underline{h}$ в теореме Г Левина – Ноэла, но оно требует дальнейшего улучшения по следующей причине. Предположим, что коэффициент h удовлетворяет условию (3.1), так что выполнено условие (2.3). Модифицируем h согласно следующему определению:

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} h(t), & 0 \leqslant t < \tilde{t} \\ 0, & \tilde{t} \leqslant t \leqslant \tilde{t} + 2k\pi \\ h(t - 2k\pi), & t > \tilde{t} + 2k\pi \end{cases}$$

где величина $\tilde{t} > 0$ зафиксирована произвольным образом, k – произвольное натуральное число. Поскольку система (2.1) описывает на интервале $[\tilde{t}, \tilde{t} + 2k\pi]$ гармонический осциллятор с 2π-периодическими движениями, то равновесие (2.2) остается асимптотически устойчивым для произвольных $\tilde{t}$, k. Более того, приведенная модификация может быть реализована и для произвольного набора значений времени $\tilde{t}'$. Это означает, что можно добиться того, чтобы равновесие оставалось асимптотически устойчивым, однако условие (3.1) более не имело места. Другими словами, условие (3.1) далеко от необходимого условия, оно должно быть улучшено для прерывистого демпфирования.

Определение. Демпфирование называется *прерывистым*, если имеется последовательность $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ непересекающихся интервалов, такая, что информация о трении вне этих интервалов отсутствует.

Первая теорема о прерывистом демпфировании представляла собой обобщение теоремы Г Левина – Ноэла

Теорема Е [18]. Предположим, что $0 < \underline{h} \leqslant h(t) \leqslant \bar{h} < \infty$ при $t \in \cup_{k=1}^{\infty} I_k$. Если

$$\sum |I_k|^3 = \infty \tag{3.2}$$

где $|I_k|$ – длина интервала I_k (всюду далее суммирование ведется от $k = 1$ до бесконечности), то равновесие (2.2) системы (2.1) асимптотически устойчиво. Более того, показатель степени три в условии (3.2) неулучшаем.

В этой теореме условие $h(t) \geqslant \underline{h} > 0$ не согласовано с принципом, согласно которому демпфирующий эффект может быть измерен интегралом от функции $h(t)$. По этой причине теорема Г может быть выведена из теоремы Е, а теорема Д – нет. Теперь сформулируем теорему, которая влечет за собой обе теоремы Г и Д.

Теорема 3.2 [17]. Если существует последовательность $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ непересекающихся интервалов и постоянная $\bar{h} < \infty$, такие, что

$$0 \leqslant h(t) \leqslant \bar{h} < \infty \ t \geqslant 0, \ \sum J_k^{(3)} / (1 + |I_k|^2) = \infty \tag{3.3}$$

$$\left(J_k^{(3)} = \left(\int_{I_k} h(t)dt \right)^3 \right)$$

то равновесие (2.2) уравнения (2.1) асимптотически устойчиво, т.е. выполняется соотношение (3.1).

Следствие. Если имеет место условие (3.3), величина $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена и $\sum J_k^3 = \infty$, то выполнены соотношения (2.3). Показатель степени три в этом утверждении не улучшаем.

Заметим, что утверждение 1° в теореме 3.1 может быть выведено из теоремы 3.2. Для этого достаточно доказать, что соотношение (3.1) влечет за собой существование последовательно $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ и величины $\gamma > 0$, таких, что

$$J_k^3/(1+|I_k|^2)^3 \geqslant \gamma, \quad k=1,2,\ldots \tag{3.4}$$

поскольку тогда второе условие (3.3), очевидно, выполнено.

Если условие (3.1) выполнено, то имеется $\delta > 0$, такое, что для каждого T можно найти $t_* > T$, для которого

$$t_*^{-2/3}H(t_*) \geqslant \delta$$

Пусть $\gamma = (\delta/4)^3$ и выберем число a. Ищем $b \geqslant a + 1$, такое, что соотношение (3.4) выполняется с этим значением γ и для этого интервала $I_k = (a, b)$. Если b настолько велико, что

$$b^{-2/3}H(a) < \delta/2, \quad b^{-2/3}H(b) \geqslant \delta$$

то

$$(1+(b-a)^2)^{-1/3}(H(b)-H(a)) \geqslant \delta/2 - \delta/4 = \delta/4 = \gamma^{1/3}$$

что означает выполнение неравенства (3.4).

4. Общий случай. Чтобы продвинуться в изучении уравнений Лагранжа (1.1), рассмотрим нелинейное уравнение

$$\ddot{x} + h(t,x,\dot{x})\dot{x} + f(x) = 0, \quad h: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+, \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{4.1}$$

где функция h задана, функция f непрерывна и $f(x)x > 0$, если $x \neq 0$. Предположим, что для коэффициента демпфирования h выполнены неравенства

$$a(t) \leqslant h(t,x,y) \leqslant b(t) \qquad (x^2 + y^2 \leqslant \Delta,\ t \geqslant 0)$$

с некоторыми непрерывными функциями a, b: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Справедливо следующее обобщение теоремы 3.2.

Теорема 4.1. Если существует последовательность $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ непересекающихся интервалов, такая, что

$$\sum \left(\int_{I_k} a\,dt\right)^3 (1+|I_k|^2)^{-1} \left(\sup_{I_k} b\right)^{-2} \left(1+\min\left\{\sup_{I_k} a;\ \int_{I_k} a\,dt\right\}\right)^{-2} = \infty \tag{4.2}$$

то равновесие (2.2) системы (4.1) асимптотически устойчиво.

Возникает вопрос, насколько неулучшаемо условие (4.2). Как уже говорилось выше, необходимых и достаточных условий не существует даже для случая малого демпфирования, кроме одного специального случая линейного уравнения (2.1), когда коэффициент h – ступенчатая функция:

$$h(t) = \begin{cases} h_k > 0, & t \in I_k,\ k = 1,2,\ldots \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{4.3}$$

где $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ – заданная последовательность вещественных чисел и $I_k = [\alpha_k, \beta_k]$, $\alpha_k < \beta_k < \alpha_{k+1}$ $(k = 1,2,\ldots)$ – заданная последовательность интервалов. Уравнение (2.1) с этим коэффициентом интегрируемо: оно может быть решено на интервалах $[\alpha_k, \beta_k]$ и $[\beta_k, \alpha_{k+1}]$, и куски решений могут быть склеены непрерывным образом. Этим методом были получены [19] следующие необходимые и достаточные условия.

Теорема Ж [19]. Предположим, что последовательности $\{| I_k |\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{h_k \mid I_k |\}_{k=1}^{\infty}$ ограничены. Равновесие (2.2) уравнения (2.1) с коэффициентом (4.3) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда

$$\sum h_k \mid I_k |^3 = \infty \tag{4.4}$$

Сформулируем следствие теоремы 4.1 для ступенчатой функции h.

Следствие. Если

$$\frac{\sum h_k \mid I_k |^3}{(1+\mid I_k |^2)(1+\min\{h_k : h_k \mid I_k |\})^2} = \infty \tag{4.5}$$

то равновесие (2.2) уравнения

$$\ddot{x} + h(t)\dot{x} + f(x) = 0$$

с коэффициентом (4.3) асимптотически устойчиво.

Видно, что при выполнении условий ограниченности в теореме Ж условие (4.5) сведено к условию (4.4). Поскольку условие (4.4) – необходимое и достаточное, это означает, что условие (4.2) близко к неулучшаемому.

Опуская громоздкие доказательства отметим, что главная идея заключается в следующем. Как уже упоминалось выше, надо оценить интеграл

$$\int_0^{\infty} h(t)(\dot{x}(t))^2 dt$$

не зная решений. Вместо этого интеграла оцениваем

$$\int_0^{\infty} h(t)\xi^2(t)dt$$

где ξ – типичный элемент хорошо выбранного функционального пространства [20].

Общий случай лагранжевых систем (1.1) рассмотрен ранее [21, 22].

С 1971 по 1974 г. автор был аспирантом кафедры теоретической механики МГУ, где под научным руководством В.В. Румянцева приобрел основополагающие знания в области теоретической механики. Возглавляемую В.В. Румянцевым научную школу автор считает лучшей из школ в этой области.

Со времени обучения в аспирантуре автор занимается изучением диссипативных эффектов при нестационарных законах трения, которые дают начало сложным задачам математики и динамики. Автор познакомился с этим кругом задач в школе В.В. Румянцева, но, как стало известно позднее, их изучением занимались выдающиеся венгерские математики еще в XIX в. Цель настоящей работы – дать краткий обзор недавних результатов автора об осцилляторах с демпфированием, показав их отправную точку в венгерской и российской литературе.

Исследования автора были поддержаны Министерством образования Венгрии (FKEP 0420/1999) и Венгерским национальным фондом научных исследований (OTKA T/029188).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fejér L.* Über Stabilität und Labilität eines materiellen Punktes im wiederstrebenden Mittel // J. Reine und Angew. Mathe. 1906. V. 131. H. 4. P. 216–223.
2. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
3. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
4. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика, астрономия, физика, химия. 1957. Вып. 4. С. 9–16.
5. *Румянцев В.В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости по отношению к части переменных // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 138–143.
6. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
7. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 225–232.
8. *Тереки Й., Хатвани Л.* Об асимптотическом останавливании при наличии вязкого трения // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 20–26.
9. *Тереки Й., Хатвани Л.* Функции Ляпунова типа механической энергии // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 894–899.
10. *Rouche N., Habets P., Laloy M.* Stability Theory by Lyapunov's direct Method. Berlin, etc.: Springer, 1977. = *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости М.: Мир, 1980. 300 с.
11. *Hatvani L.* On partial asymptotic stability and instability. III (Energy-like Ljapunov functions) // Acta Sci. Math. 1985. V. 49. № 1–4. P. 157–167.
12. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
13. *Levin J., Nohel J.A.* Global asymptotic stability of nonlinear systems of differential equations and applications to reactor dynamics // Arch. Ration. mech. Anal.l 1960. V. 5. № 3. P. 194–211.
14. *Hatvani L., Krisztin T., Totik V.* A necessary and sufficient condition for the asymptotic stability of the damped oscillator // J. Different. Equat. 1995. V. 119. № 1. P. 209–223.
15. *Ballieu R.J., Peiffer K.* Attractivity of the origin for the equation $\ddot{x} + f(t,x,\dot{x})|\dot{x}|^{\alpha}\dot{x} + g(x) = 0$ // J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 65. № 2. P. 321–332.
16. *Сурков А.Г.* Об асимптотической устойчивости некоторых двумерных линейных систем // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 8. С. 1452–1454.
17. *Hatvani L.* Integral conditions on the asymptotic stability for the damped linear oscillator with small damping // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124. № 2. P. 415–422.
18. *Smith R.A.* Asymptotic stability of $x'' + a(t)x' + x = 0$ // Quart. J. Math. 1961. V. 12. № 46. P. 123–126.
19. *Elbert Á.* Stability of some difference equation // Advances in Difference Equations. Amsterdam: Gordon and Breach, 1997. P. 155–178.
20. *Hatvani L., Totik V.* Asymptotic stability of the equilibrium of the damped oscillator // Different. and Integral Equat. 1993. V. 6. № 4. P. 835–848.
21. *Pucci P., Serrin J.* Precise damping conditions for global asymptotic stability for nonlinear second order systems // Acta Math. 1993. V. 170. № 2. P. 275–307.
22. *Pucci P., Serrin J.* Asymptotic stability for ordinary differential systems with time dependent restoring potentials // Arch. Rat. Mech. Anal. 1995. V. 132. № 3. P. 207–232.

Сегед (Венгрия)
e-mail: hatvani@math.u-szeged.hu

Поступила в редакцию
12.I.2001