УДК 531.36:534.1

© 2001 г. А.Л. Куницын

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Исследуется устойчивость положений относительного равновесия (коллинеарных точек либрации) ограниченной круговой фотогравитационной задачи трех тел, в которой пассивно гравитирующая точка кроме ньютоновской силы тяготения со стороны основных тел (звезд) испытывает еще и силы светового давления от каждого из них [1]. Полученные ранее [2] условия устойчивости анализируются с новых позиций, позволяющих представить их более наглядно, что достигается введением для каждой фиксированной пары основных тел некоторого обобщенного параметра (который использовался ранее [3, 4] при рассмотрении треугольных точек либрации) и переходом из пространства параметров системы в ее конфигурационное пространство.

Вопрос о существовании и устойчивости точек либрации – положений относительного равновесия во вращающейся вместе с основными телами системе координат – фотогравитационной ограниченной задачи трех тел рассматривался в ряде работ (наиболее полный их обзор дан в [1]). В результате сравнительно недавних исследований, проведенных разными авторами, было установлено, что учет в рамках модели классической ограниченной задачи трех тел дополнительного потенциального силового поля световой репульсии приводит к возникновению целого семейства новых точек либрации, координаты которых определяются как параметрами гравитационно-репульсивного поля основных тел, так и "парусностью" находящихся в этом поле частиц, представляющей собой отношение характерной площади частицы к ее массе. Часть этого семейства – множество точек либрации, аналогичных двум треугольным точкам либрации классической ограниченной задачи трех тел, а другая часть составляет множество точек, расположенных на прямой, проходящей через основные тела (рассматриваемые как материальные точки), и аналогичных пяти коллинеарным точкам либрации классической задачи. Было показано [2], что устойчивыми могут быть не только треугольные точки либрации, но также и коллинеарные, которые в классической задаче всегда неустойчивы. Была дана [4] весьма простая геометрическая интерпретация условий устойчивости треугольных точек либрации, в том числе и для эллиптического случая задачи, когда эксцентриситет орбиты основных тел мал. Это удалось сделать как за счет перехода из пространства параметров системы в конфигурационное пространство, так и за счет введения обобщенного параметра, характеризующего (наряду с используемым в классической задаче массовым параметром, представляющим собой относительную массу одного из основных тел) мощность излучения каждой фиксированной пары основных тел. Указанные соображения позволяют существенно упростить и сделать физически более ясным анализ устойчивости и коллинеарных точек либрации ограниченной круговой фотогравитационной задачи трех тел.

Как известно [1], гравитационно-репульсивное силовое поле круговой фотогравитационной ограниченной задачи трех тел можно задать силовой функцией

$$W=(x^2+y^2)/2+Q_1(1-\mu)/R_1+Q_2\mu/R_2$$

$$Q_i=(F_i^g-F_i^p)/F_i^g, \quad R_i=(x-a_i)^2+y^2+z^2, \quad i=1,2 \qquad (1)$$

где x, y, z – безразмерные (за единицу длины принято расстояние между основными телами) прямоугольные барицентрические координаты пассивно гравитирующей частицы P в системе $Oxyz$, равномерно вращающейся вокруг оси Z с угловой скоростью, равной единице, μ и $1-\mu$ – относительные массы основных тел S_2 и S_1 (рассматриваемых как материальные точки), отнесенные к их общей массе, а $a_1 = -\mu$, $a_2 = 1-\mu$ – их безразмерные координаты; Q_i – коэффициенты редукции массы частицы P, характеризующие влияние репульсивного поля светового давления; где F_i^p и F_i^g – силы тяготения и светового давления соответственно. Эти коэффициенты можно также представить в виде

$$Q_i = 1 - q_i\sigma, \quad q_i = C_i/(fM_i), \quad \sigma = (1+\varepsilon)s/m \tag{2}$$

где f – гравитационная постоянная, M_i – масса тела S_i, C_i – постоянный коэффициент, характеризующий мощность его излучения, а σ – парусность частицы P (m и s – соответственно ее масса и характерная площадь поперечного сечения, ε – коэффициент отражения).

Как видим, влияние светового давления возрастает с уменьшением абсолютных размеров частицы и может быть сколь угодно велико даже для частиц с высокой плотностью. Очевидно также, что физически возможное значение коэффициента редукции не может превышать единицы ($Q_i = 1$, если световое давление со стороны тела S_i отсутствует).

Из соотношений (2) вытекает, что для всякой фиксированной пары тел S_1 и S_2 коэффициенты редукции частицы P при любой парусности должны удовлетворять соотношению

$$(1-Q_2)/(1-Q_1) = q_2/q_1 = k$$

Отсюда следует, что для всякой фиксированной пары тел S_1 и S_2 коэффициенты редукции не могут принимать произвольных значений, – факт, на который было обращено внимание [3, 4] при исследовании устойчивости треугольных точек либрации. Рассмотрение произвольных, не связанных друг с другом значений Q_1 и Q_2 (как это и делалось во всех предыдущих работах) означает одновременное рассмотрение не только произвольных частиц, но и разных тел S_1 и S_2, что мешает ясному физическому осмыслению получаемых результатов. Параметр k, равный отношению "удельных" мощностей излучения основных тел, следует рассматривать как дополнительную (к массовому параметру μ) характеристику гравитационно-репульсивного поля для фиксированной пары основных тел. Очевидно, k может принимать любые неотрицательные значения. При $k = 0$ будем иметь случай одного излучающего тела. При $k = 1$ "удельные" мощности излучения обоих тел одинаковы, откуда вытекает, что $Q_1 = Q_2$. Этот практически наиболее важный случай и будет рассмотрен в данной работе.

Условия равновесия, из которых можно определить координаты коллинеарных точек либрации, найдутся из требования обращения в нуль первой вариации силовой функции W, что при $y = z = 0$ приводит к уравнению (суммирование по индексу i производится от 1 до 2)

$$x - \sum a_i Q_i (x - a_i)/R_i^3 = 0 \tag{3}$$

Детальный анализ уравнения (3) показал [2, 3], что в зависимости от значений коэффициентов редукции возможно появление как внутренних (расположенных между телами S_1 и S_2), так и внешних (расположенных вне отрезка S_1S_2) коллинеарных точек либрации.

Условия устойчивости коллинеарных точек (выводимые из уравнений первого приближения) для всевозможных значений Q_1, Q_2 даются неравенствами [2]

$$8/9 \leqslant A \leqslant 1, \quad A = \Sigma a_i Q_i / R_i^3 \tag{4}$$

Как и в классической задаче, эти условия не дают вековой устойчивости, а являются лишь условиями гироскопической стабилизации. Однако поскольку рассматриваемая система принадлежит к классу гамильтоновых, эти условия означают полную устойчивость по Биркгофу, т.е. сохраняющуюся при учете в уравнениях возмущенного движения и нелинейных членов до сколь угодно высокого (конечного) порядка за исключением, быть может, множества значений параметров, соответствующих резонансам второго и третьего порядков. Заметим, однако, что невыполнение условий (4) означает строгую неустойчивость по Ляпунову.

Покажем, что внешние точки либрации неустойчивы при любых значениях Q_1 и Q_2. Рассмотрим точки либрации с координатами $x < a_1 = -\mu$. Учитывая также, что $x = a_1 - R_1$, подставим значение Q_1, определяемое условием равновесия (3), в выражение для A. Будем иметь

$$A = 1 + \mu(1 - Q_2 / R_2^3) / R_1$$

Условие устойчивости $A \leqslant 1$ приводит к неравенству $Q_2 \geqslant R_2^3$. Но поскольку в рассматриваемом случае $R_2 = 1 + R_1$, то окончательно получаем $Q_2 > 1$, что выходит за интервал физически допустимых значений Q_2. Так как сделанный вывод справедлив для любых значений μ, то неустойчвыми будут и внешние точки либрации, расположенные правее тела S_2.

Перейдем теперь к внутренним точкам, координаты которых удовлетворяют неравенствам $-\mu < x < 1 - \mu$. Рассмотрим вначале полностью симметричный случай, когда $Q_1 = Q_2 = Q$ и $\mu = {}^1/_2$. Условие равновесия (3) запишется теперь в виде

$$2x + Q(R_1^{-3} - R_2^{-3}) = 0 \tag{5}$$

откуда видно, что для рассматриваемых значений x, кроме $x = 0$, всегда будет $Q < 0$, а следовательно,

$$2A = Q(R_1^{-3} + R_2^{-3}) < 0$$

что не удовлетворяет условию устойчивости (4). Таким образом, в рассматриваемом случае устойчивой точкой либрации может быть только начало координат ($R_1 = R_2$).

Из уравнения (5) следует, что в этой точке либрации могут находиться частицы с любым значением Q; при этом только часть из них может быть устойчива. Действительно, при $R_1 = R_2 = {}^1/_2$ будем иметь $A = 8Q$, и условие устойчивости (4) дает

$$^1/_9 \leqslant Q \leqslant {}^1/_8 \tag{6}$$

т.е. в полностью симметричном случае в начале координат действительно может находиться бесчисленное множество частиц с различной парусностью, коэффициент редукции которых удовлетворяет условию устойчивости (6). Интересно отметить, что $Q = {}^1/_8$ является предельным минимальным значением для всех треугольных точек либрации, возможных в этом случае (как было показано ранее [4], все треугольные точки либрации в этом случае располагаются на оси y; их координаты удовлетворяют неравенствам $-\sqrt{3/2} < y < \sqrt{3/2}$, а Q пробегает все значения от ${}^1/_8$ до 1, когда $y = \pm\sqrt{3/2}$). При этом устойчивыми будут только те точки, для которых выполняется неравенство [4]

$$36\mu(1 - \mu)\sin^2(\psi_1 + \psi_2) \leqslant 1$$

где ψ_1 и ψ_2 – углы, образуемые векторами R_1 и R_2 с осью x. В рассматриваемом случае ($\mu = {}^1/_2$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi$) это условие дает

$$\sin^2\psi \leqslant \sin^2\psi^* = 1/2 - \sqrt{2/3}$$

т.е. устойчивыми будут все треугольные точки либрации, ординаты которых удовлетворяют условию $|y| \leqslant y^* = 0{,}085786\ldots$ Поскольку для треугольных точек либрации выполняются соотношения $R^3 = Q$ [4], то в рассматриваемом случае коэффициент редукции частиц, находящихся в этих точках, уменьшается от максимального значения, равного $1/(8\cos^3\psi^*)$ и соответствующего $y = y^*$, до $^1/_8$ в начале координат, где может находиться, кроме того, бесчисленное множество частиц, коэффициент редукции которых удовлетворяет неравенствам (6).

Рассмотрим теперь случай произвольных значений μ $(0 < \mu < {}^1/_2)$, сохраняя условие $k = 1$ $(Q_1 = Q_2 = Q)$. Условие равновесия (3) можно тогда записать в виде

$$Q[\mu / R_1^2 - (1-\mu)/R_2^2] + x = 0 \tag{7}$$

откуда при $R_1 = R_2$ $(x = {}^1/_2 - \mu)$ найдем $Q = {}^1/_8$, независимо от значения μ. Согласно неравенству (6), полученное значение Q (как и в случае $\mu = {}^1/_2$) лежит на границе области устойчивости. Однако в отличие от случая $\mu = {}^1/_2$ теперь в этой точке либрации может находиться только одна частица с соответствующей найденному значению Q парусностью.

Уравнение (7) удовлетворяется также значениями $x = Q = 0$ и, следовательно, теперь, согласно неравенству (6), начало координат всегда неустойчиво. Покажем, что неустойчивы и все точки, для которых $x < 0$. Поскольку для устойчивости необходимо, чтобы было $Q > 0$, то из уравнения (7) вытекает неравенство

$$\mu / R_1^2 - (1-\mu)/R_2^2 > 0 \tag{8}$$

из которого следует, что должно быть $\mu > (1 + \rho^2)^{-1}$, где $\rho = R_1/R_2$. Из последнего неравенства при $x < 0$ $(\rho < 1)$ вытекает, что $\mu > {}^1/_2$. Но последнее неравенство противоречит рассматриваемому интервалу изменения μ, и, таким образом, условия устойчивости в рассматриваемом интервале изменения x и μ выполняться не могут.

Неустойчивыми будут и все точки либрации при $x > 0$, для которых $\rho > 1$. Действительно, при положительных x и Q, как это следует из уравнения (7), неравенство (8) меняется на противоположное и может выполняться для всех $\mu < {}^1/_2$. Подставляя с учетом сказанного значение Q, даваемое уравнением (7), в выражение для A, из условия устойчивости $A < 1$, будем иметь

$$[(1-\mu)/R_1^3 + \mu/R_2^3]x \leqslant (1-\mu)/R_1^2 - \mu/R_2^2 \tag{9}$$

откуда вытекает, что $\rho < 1$.

Осталось, таким образом, рассмотреть интервал $\mu/(1-\mu) < \rho < 1$, где выполняется неравенство, противоположное (8), и где, согласно неравенству (9), $A \leqslant 1$. Подставляя значение Q из уравнения (7) в условие устойчивости (6) $A > {}^8/_9$, будем иметь

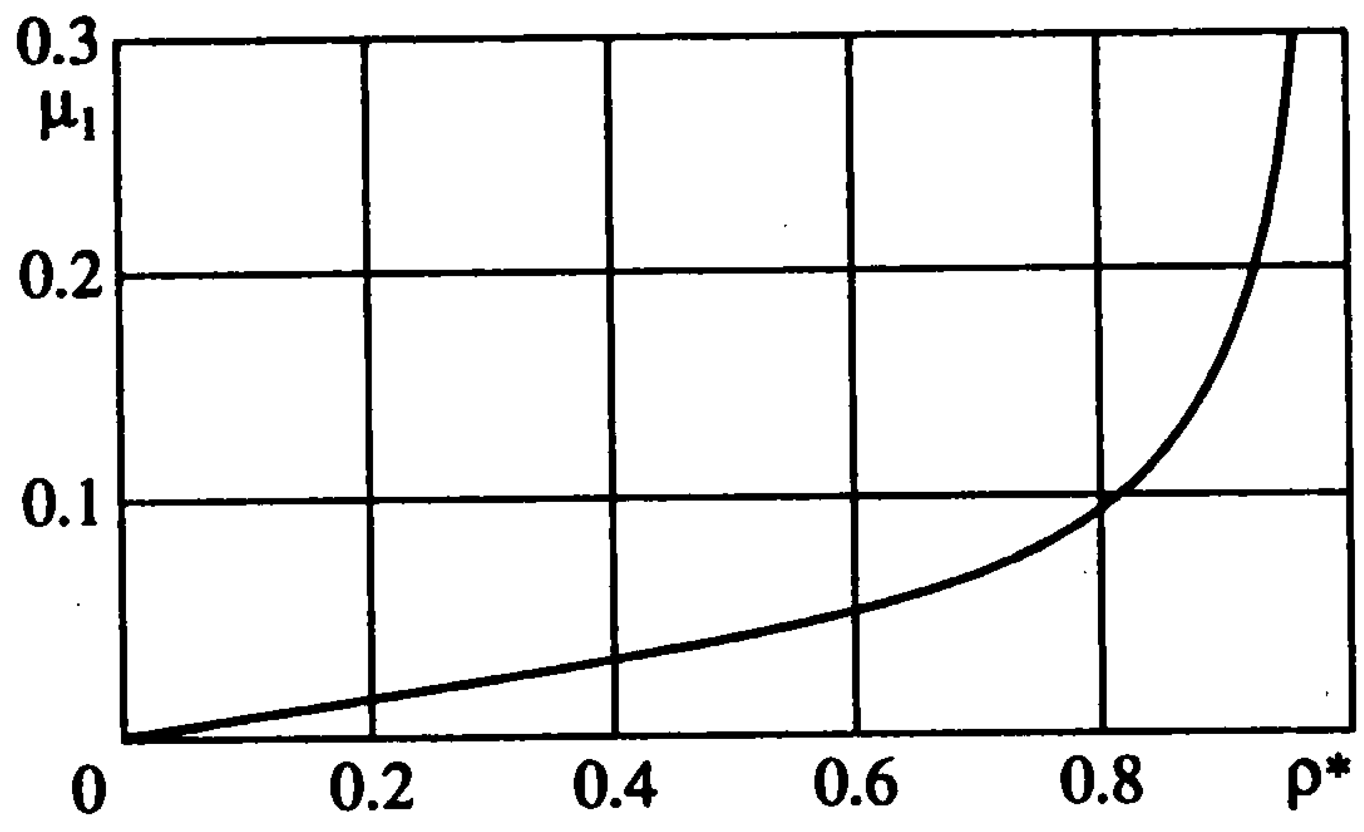
$$[(1-\mu)/R_1^3 + \mu/R_2^3]x > 8[(1-\mu)/R_1^2 - \mu/R_2^2]/9$$

Полученное неравенство можно привести к виду

$$f(\mu,\rho) = \mu^2 - [1 + b(1+\rho^2)]\mu + b \geqslant 0 \tag{10}$$

$$b = \rho(1+\rho)^{-1}(1-\rho^3)/9$$

Поскольку в рассматриваемом интервале $(\rho < 1)$ имеем $b > 0$, то многочлен $f(\mu, \rho)$ всегда имеет относительно μ два положительных корня $\mu_1(\rho)$ и $\mu_2(\rho) > \mu_1$ и неравенство (10) выполняется, если $0 < \mu \leqslant \mu_1(\rho)$ или $\mu \geqslant \mu_2(\rho)$. Можно показать, что для всех рассматриваемых значений ρ больший корень $\mu(\rho) > 1$, что выходит из рассматриваемого интервала изменения μ и, следовательно, для устойчивости должно выполняться только одно неравенство $\mu \leqslant \mu_1(\rho)$.



На фигуре изображена кривая $\mu_1(\rho)$, являющаяся границей области устойчивости, расположенной ниже этой кривой. Проведенный анализ позволяет заключить, что для всякого фиксированного значения $\mu < {}^1/_2$ устойчивые коллинеарные точки либрации могут быть только на отрезке $[\rho^*, 1]$ (стягивающемся в точку при $\mu \to {}^1/_2$), причем

$$\rho^* > \mu_1/(1-\mu_1)$$

где μ_1 – меньший корень многочлена (9) при $\rho = \rho^*$. Коэффициенты редукции частиц, находящихся в точках указанного отрезка, могут быть найдены с помощью уравнения (7).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации (ЕОО-11.0-28).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kunitsyn A.L., Polyakhova E.N.* The restricted photogravitational three-body problem: a modern state // Astron. and Astophys. Trans. 1995. V. 6. № 4. P. 283–293.
2. *Куницын А.Л., Турешбаев А.Т.* О коллинеарных точках либрации фотогравитационной задачи трех тел // Письма в "Астрон. журн." 1983. Т. 9. № 7. С. 432–435.
3. *Лукьянов Л.Г.* О семействе точек либрации в ограниченной фотогравитационной задаче трех тел // Астрон. журн. 1988. Т. 65. Вып. 2. С. 422–432.
4. *Куницын А.Л.* Об устойчивости треугольных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // ПММ. 2000. Т. 65. Вып. 5. С. 788–794.

Москва

Поступила в редакцию
13.III.2001