

УДК 531.36:534.1

© 2001 г. А.А. Буров, С.Я. Степанов

О КОЛЕБАНИЯХ МАЯТНИКА НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

Рассматривается модельная задача о движении в центральном поле сил маятника, точка подвеса которого скользит вдоль круговой направляющей с центром в притягивающем центре. Определяются установившиеся движения и условия их устойчивости. Результаты прилагаются к исследованию движений орбитального крана.

Для перемещения грузов в космическом пространстве с целью формирования протяженных орбитальных конфигураций [1] можно использовать устройства, аналогичные наземному подъемному крану, где груз, как маятник, подвешен на тросе, а точка подвеса движется по направляющей, закрепленной на спутнике. Предположим, что направляющая имеет форму окружности с центром в притягивающем центре и что спутник имеет неизменную ориентацию в орбитальной системе координат. В такой постановке можно получить оптимальное по быстродействию управление, аналогичное [2]. Для его построения требуется выполнить предварительное исследование колебаний маятника при движении точки подвеса с постоянной скоростью. Исследованию этих колебаний в точной постановке посвящена настоящая работа.

В случае, когда точка подвеса фиксирована в центре масс спутника, совершающего движение по круговой орбите с кеплеровой орбитальной угловой скоростью, задача о равновесиях маятника рассматривалась ранее [3]. При произвольном расположении точки подвеса в спутнике, движущемся по круговой кеплеровой орбите, задача изучалась в спутниковом приближении [4] (см. также [5]).

1. Постановка задачи и уравнения движения. Пусть точка P равномерно движется по окружности радиуса R вокруг притягивающего центра O . В точке P подвешена на невесомом нерастяжимом стержне длины l_* точка Q массы m , движущаяся в плоскости этой окружности. Введем связанную с точкой P систему координат Ox , равномерно вращающуюся с угловой скоростью θ' вокруг точки O (здесь и далее штрих означает производную по времени). В этой системе координат векторы OP и PQ имеют координаты $(0, R)$ и $(l_* \sin \varphi, -l_* \cos \varphi)$ (фиг. 1).

Пусть

$$s = \sin \varphi, \quad c = \cos \varphi, \quad r_*^2 = R^2 + l_*^2 - 2Rl_*c$$

Составляющие по осям x и y абсолютной скорости точки Q имеют вид

$$V_x = l_*c\varphi' + l_*'s - (R - l_*c)\theta', \quad V_y = l_*s\varphi' - l_*'c + l_*s\theta'$$

Кинетическая энергия материальной точки Q , силовая функция и функция Лагранжа имеют вид

$$T = \frac{1}{2}m(V_x^2 + V_y^2) = \frac{1}{2}m(l_*^2\varphi'^2 + l_*'^2 + l_*^2\theta'^2 + R^2\theta'^2) + m[l_*^2\varphi'\theta' - R(l_*c\varphi' + dl_*s + l_*c\theta')\varphi'] \quad (1.1)$$

$$U = -\frac{m\rho_*^3}{r_*}\theta'^2, \quad L_* = T + U = mR^2\theta'^2L \quad (1.2)$$

$$L = \frac{1}{2}(l_*^2\dot{\varphi}^2 + \dot{l}_*^2 + l_*^2 + 1) + l_*^2\dot{\varphi} - lc\dot{\varphi} - \dot{l}s - lc + \frac{\rho^3}{r}$$

Здесь $\rho^3 = fM/\theta'^2$ – куб радиуса кеплеровой орбиты, соответствующей угловой скорости θ' , точка сверху означает дифференцирование по θ и введены безразмерные величины

$$l = \frac{l_*}{R}, \quad r = \frac{r_*}{R}, \quad \rho = \frac{\rho_*}{R}$$

При $\dot{l} = 0$ система допускает интеграл Якоби, который с точностью до аддитивной постоянной имеет вид

$$H = \frac{1}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + W, \quad W = lc - \frac{\rho^3}{r}$$

Здесь W – измененная потенциальная энергия. Уравнения движения при этом вполне интегрируемы.

Для определения реакций в стержне напишем уравнение Лагранжа, соответствующее переменной l ,

$$\ddot{l} - l\dot{\phi}^2 - l - 2l\dot{\phi} + c + \frac{\rho^3}{r^3}(l - c) = Q_l \quad (1.3)$$

откуда при условии $l = \text{const}$ получаем натяжение в стержне

$$N = l\dot{\phi}^2 + l + 2l\dot{\phi} - c - \frac{\rho^3}{r^3}(l - c)$$

В случае, когда вместо стержня используется нерастяжимый трос, должно выполняться условие положительности натяжения $N \geq 0$.

На плоскости $(\phi, \dot{\phi})$ кривая нулевых реакций пересекает вертикальную ось $\dot{\phi} = 0$ в точках

$$\dot{\phi} = -1 \pm \left[l^{-1} \left(1 - \frac{\rho^3}{(1-l)^2} \right) \right]^{1/2}$$

вертикальную ось $\phi = \pi/2$ – в точках

$$\dot{\phi} = -1 \pm \left(\frac{\rho}{\sqrt{1+l^2}} \right)^{3/2}$$

и ось $\phi = \pi$ – в точках

$$\dot{\phi} = -1 \pm \left[l^{-1} \left(1 - \frac{\rho^3}{(1+l)^2} \right) \right]^{1/2}$$

Последние две точки сливаются, если

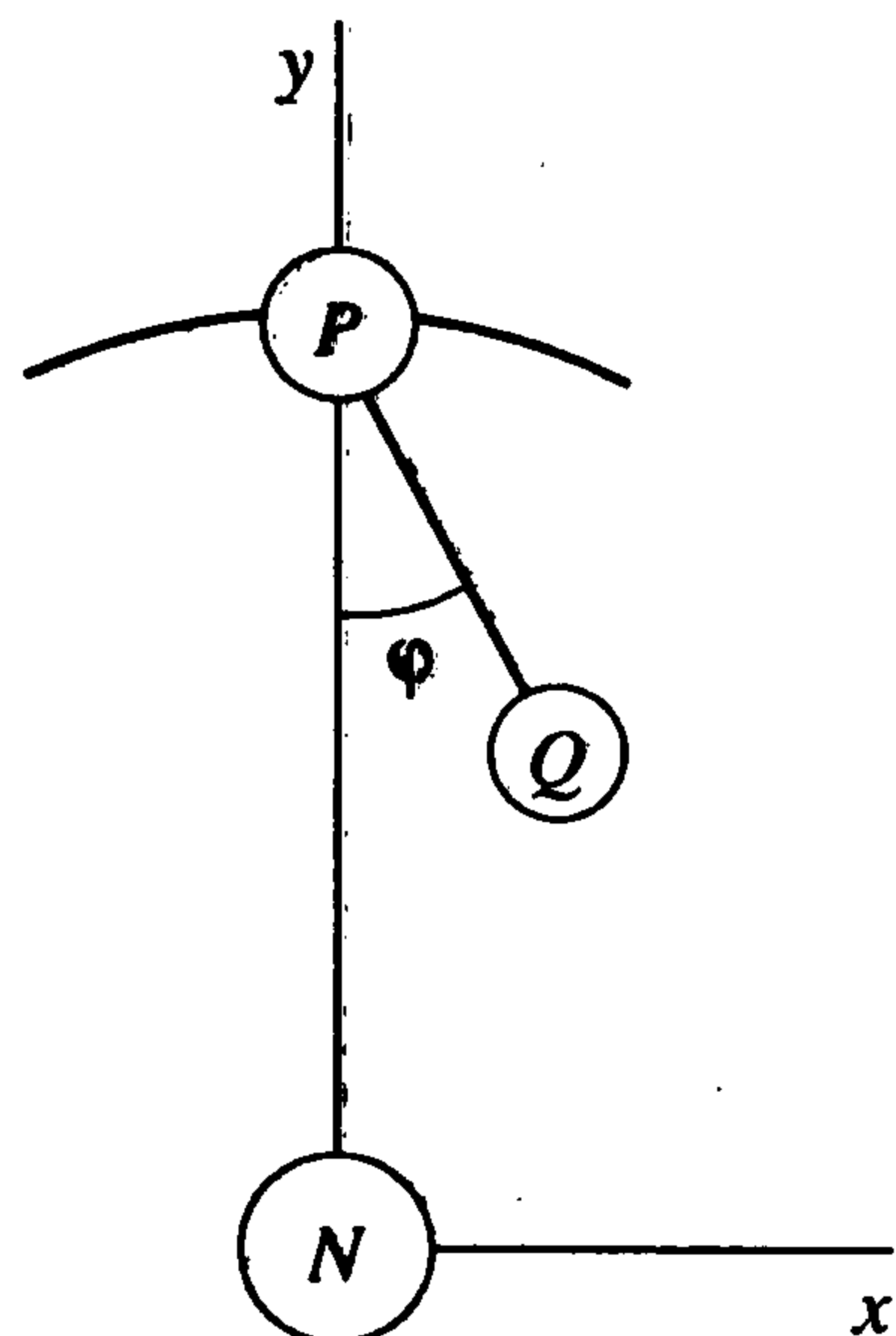
$$\frac{\rho^3}{(1+l)^2} = 1 \quad (1.4)$$

и исчезают, если

$$\frac{\rho^3}{(1+l)^2} < 1$$

При выполнении условия (1.4) две ветви кривой имеют общую точку на вертикали $\dot{\phi} = \pi$. С горизонтальной осью $\dot{\phi} = 0$ кривая $N = 0$ пересекается в точках, определяемых уравнением

$$(l - c) \left(1 - \frac{\rho^3}{r^3} \right) = 0$$



Фиг. 1

2. Установившиеся движения. По теореме Лагранжа равновесия маятника относительно равномерно вращающейся системы координат могут быть найдены как критические точки измененной потенциальной энергии

$$\frac{dW}{d\varphi} = ls \left(\frac{\rho^3}{r^3} - 1 \right) = 0 \quad (2.1)$$

Эти уравнения всегда допускают два решения

$$1) \varphi = 0, 2) \varphi = \pi$$

Им отвечают расположения маятника соответственно вдоль нисходящей и восходящей вертикалей, проходящих через точку P .

При $1 - l < \rho < 1 + l$ существуют два решения с $s \neq 0$ (решения вида 3). Для этих решений точка Q располагается в той или другой точке пересечения окружности с центром O радиуса ρ и окружности с центром P радиуса l . На этих решениях $N = 0$.

Отметим, что характер равновесий существенно зависит от расположения груза по отношению к окружности радиуса ρ (выше или ниже).

Оценим порядок величин, входящих в задачу. Из выражения для куба радиуса ρ имеем

$$V^2 = fM/\rho$$

где V – линейная орбитальная скорость. Варьируя соотношение и исключая из него постоянную fM , имеем

$$\delta\rho/\rho = -2\delta V/V$$

Пусть $\rho = 6 \cdot 10^6$ м, $V = 9 \cdot 10^3$ м/с, $\delta V = 0.1$ м/с. Тогда $\delta\rho \cong 133$ м. Таким образом, приращение линейной скорости на 0.1 м/с дает изменение ρ на величину, сопоставимую с длиной маятника.

3. Устойчивость относительных равновесий. Для исследования устойчивости относительных равновесий воспользуемся теоремой Лагранжа. Вторая производная измененного потенциала имеет вид

$$W'' = \left(\frac{\rho^3}{r^3} - 1 \right) lc - \frac{3\rho^3}{2r^5} l^2 s^2$$

На решениях 1, 2 и 3 эта производная имеет значения

$$W_1'' = \frac{\rho^3 - (1-l)^3}{(1-l)^3} l \geq 0 \text{ при } \rho \geq 1-l \text{ (и } l < 1)$$

$$W_2'' = -\frac{\rho^3 - (1+l)^3}{(1+l)^3} l \geq 0 \text{ при } \rho \leq 1+l$$

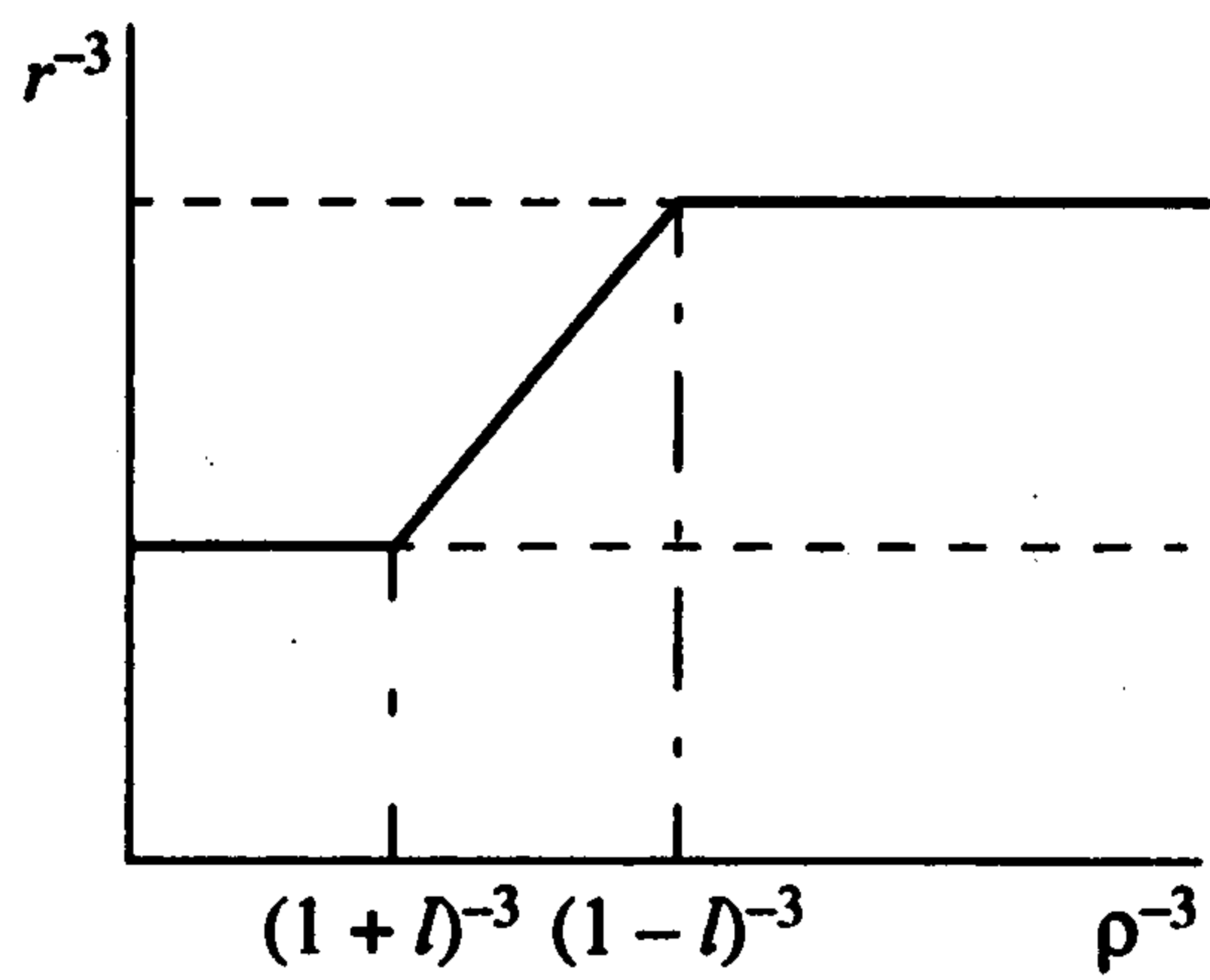
$$W_3'' = -\frac{3\rho^3}{2r^5} l^2 s^2 < 0 \text{ при } 1-l < \rho < 1+l$$

Бифуркационная диаграмма изображена на фиг. 2. Сплошным линиям соответствуют устойчивые решения, штриховым – неустойчивые.

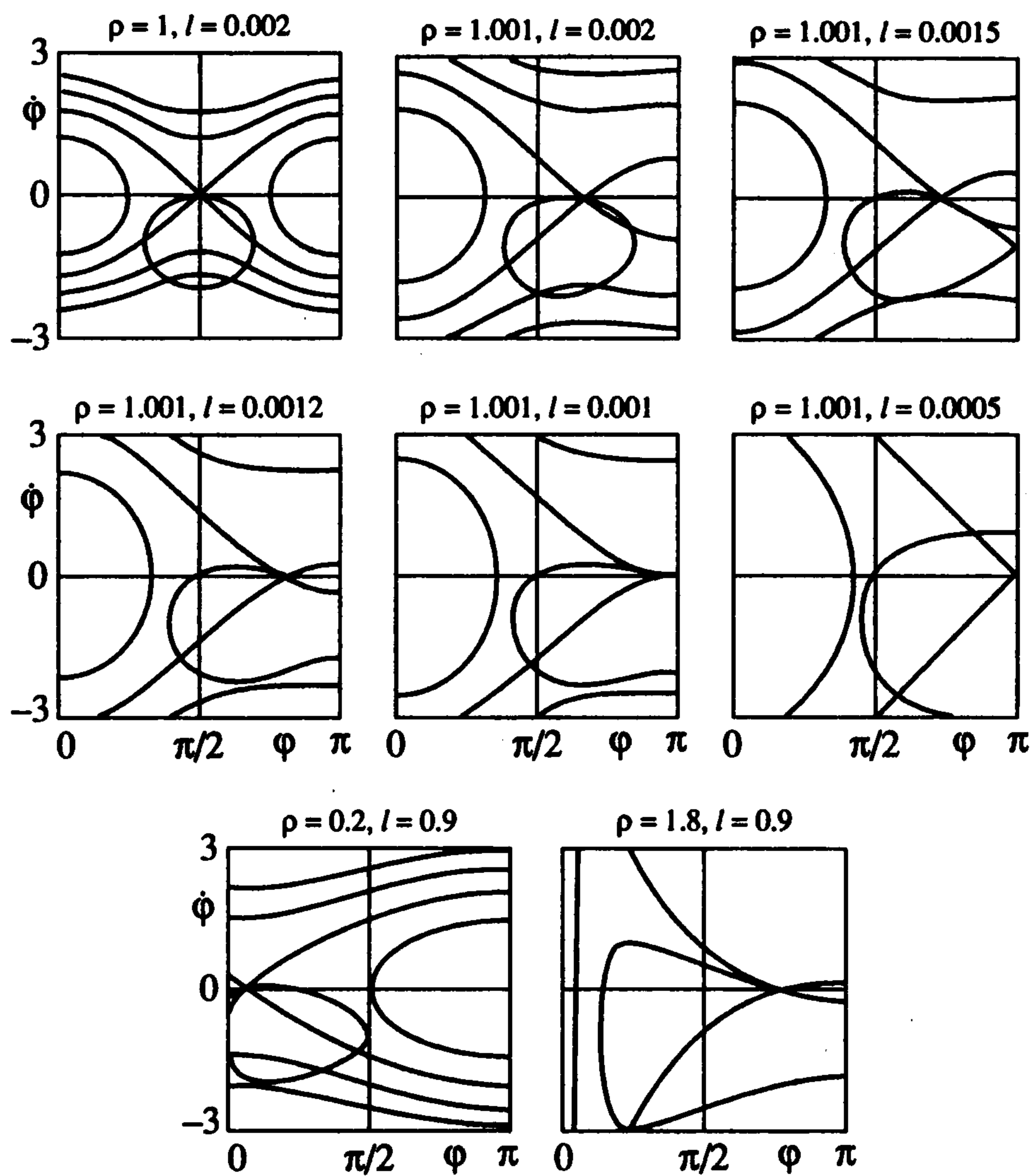
Если $\omega_{1\pm l}$ – кеплерова угловая скорость, соответствующая круговой кеплеровой орбите радиуса $1 \pm l$, то при $l < 1$ условия устойчивости могут быть представлены как

$$1) \omega_{1-l}^2 - 1 < 0, 2) \omega_{1+l}^2 - 1 > 0 \quad (3.1)$$

Решения вида 3 всегда неустойчивы при $1-l < \rho < 1+l$.



Фиг. 2



Фиг. 3

4. **Диаграмма движений маятника на фазовой плоскости.** Фазовый портрет системы при разных значениях параметров l и ρ показан на фиг. 3. При $\rho = 1$ имеем картину, качественно совпадающую с полученной ранее [6]. Эта и все последующие диаграммы могут быть продолжены влево и право путем симметричного отражения относительно вертикальных прямых $\varphi = \pi k$ ($k = 0, \pm 1, \dots$). Первая диаграмма симметрична относительно оси $\varphi = \pi/2$. Точки на оси $\dot{\varphi} = 0$ с координатами $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ соответствуют устойчивым относительным равновесиям, в то время как точка $\varphi \cong \pi/2$ соответствует неустойчивому относительному равновесию. Овал, проходящий через эту точку, отвечает нулевому значению натяжения стержня, внутри овала стержень сжат ($N < 0$), т.е. такие равновесия нельзя реализовать с помощью троса.

Рассмотрим теперь случай $\rho = 1 \pm \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Картина при этом становится несимметричной. Два устойчивых равновесия остаются на месте, в то время как неустойчивое равновесие смещается вдоль оси абсцисс. Овал, оставаясь проходящим через седловую точку и вблизи точки $\varphi = \pi/2$ на оси абсцисс, теряет свою симметрию (фиг. 3 при $\rho = 1.001$ и $l = 0.002$). Если теперь уменьшать значение l , то при некотором его значении области $N < 0$, расположенные в областях $[0, \pi] \times \dot{\varphi}$ и $[\pi, 2\pi] \times \dot{\varphi}$, сомкнутся и займут внутренность "восьмерки" (фиг. 3 при $\rho = 1.001$ и $l = 0.0015$). При дальнейшем уменьшении l "восьмерка" преобразуется в симметричную (с осью симметрии $\varphi = \pi$) кривую, диффеоморфную окружности, но все еще проходящую через седловую точку (фиг. 3 при $\rho = 1.001$ и $l = 0.0012$). Далее, устойчивое относительное равновесие с $\varphi = \pi$ становится неустойчивым, оказываясь на границе области сжатости стержня (фиг. 3 при $\rho = 1.001$ и $l = 0.001$). Наконец, при дальнейшем уменьшении l неустойчивое относительное равновесие оказывается внутри области $N < 0$ (фиг. 3 при $\rho = 1.001$ и $l = 0.0005$). Расчеты показывают, что при малых значениях l и ε , соответствующих реальным спутниковым системам, картины, построенные для $\rho = 1 + \varepsilon$ и $1 - \varepsilon$ с графической точностью, получаются одна из другой симметричным отображением относительно прямой $\varphi = \pi/2$. Если это не так, то указанная симметрия исчезает (фиг. 3 при $\rho = 0.2, 1.8$ и $l = 0.9$).

5. Интерпретация результатов. Пусть центр масс орбитальной станции движется по круговой кеплеровой орбите (безразмерная орбитальная угловая скорость равна единице) и ориентация станции неизменна относительно орбитальной системы координат. Пусть на орбитальной станции установлено крановое устройство, состоящее из круговой направляющей с центром в O радиуса R , из тележки P , способной скользить вдоль этой направляющей, и из груза Q . Локально эту направляющую можно рассматривать как прямолинейную. Орбитальная угловая скорость тележки $\dot{\theta} = 1 + \lambda$ состоит из переносной угловой скорости, равной единице, и относительной угловой скорости λ .

Устройство позволяет перемещать груз в плоскости орбиты, причем при движении с постоянной относительной скоростью груз может находиться либо ниже, либо выше точки подвеса, причем оба положения могут оказаться устойчивыми. В силу первого условия (3.1) нижнее положение устойчиво, если

$$\lambda < \omega_{R-l} - 1$$

Это условие накладывает ограничение на скорость движения тележки по направлению орбитального движения.

В силу второго условия (3.1) верхнее положение устойчиво, если

$$\lambda > \omega_{R+l} - 1$$

Это условие накладывает ограничение на скорость движения тележки в направлении, противоположном направлению орбитального движения.

Работа выполнена при поддержке Юбилейного фонда Высшей школы города Вены (Hochschule Jubiläumstiftung der Stadt Wien), Российским фондом фундаментальных исследований (99-01-00785, 00-15-96150, 01-01-02001), Федеральной целевой программы "Интеграция" и Бельгийского министерства иностранных дел.

ЛИТЕРАТУРА

1. *McQuade F., McInnes C.R.* Co-operative control for on-orbit assembly of large space structures using potential field methods // Departmental Report № 9818. Department of Aerospace Engineering Glasgow: University of Glasgow, Glasgow: 1998. 19 p.
2. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальное перемещение маятника // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 5. С. 806–816.
3. *Synge J.L.* On the behaviour, according to Newtonian theory, of a plumb line or pendulum attached to an artificial satellite // Proc. Roy. Irish Acad. 1959. V. 20. Ser. A. № 1. P. 1–6.
4. *Blitzer L.* Equilibrium and stability of a pendulum in an orbiting spaceship // Amer. J. Phys. 1979. V. 47. № 3. P. 241–246.
5. *Буров А.А., Троггер Х.* Об относительных равновесиях орбитального маятника, подвешенного на тросе // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 755–760.
6. *Beletsky V.V., Levin E.M.* Dynamics of space tether systems. Advances in the Astronaut. sci. V. 83. San Diego: Amer. Astronaut. Soc., 1993. 499 p.

Москва
e-mail: aburov@ccas.ru
stepsj@ccas.ru

Поступила в редакцию
17.VIII.2000