УДК 531.38

© 2001 г. В.Н. Кошляков, В.Л. Макаров

К ТЕОРИИ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕКОНСЕРВАТИВНЫМИ СИЛАМИ

Развиваются и обобщаются полученные ранее результаты [1, 2] применительно к механическим системам, содержащим неконсервативные позиционные силы. Формулируются необходимые и достаточные условия перехода к некоторому матричному уравнению, использование которого позволяет преодолеть трудности, связанные с наличием в исходных уравнениях неконсервативных позиционных структур. Указанные условия выражаются непосредственно через матричные коэффициенты исходного уравнения. Рассматриваемая методика применяется к анализу точных уравнений четырехгироскопной вертикали (без использования уравнений прецессионной теории) в предположении ее установки на подвижном относительно Земли основании.

1. Постановка задачи. Рассматривается матричное уравнение вида

$$J\ddot{x} + (D + HG)\dot{x} + (\Pi + P)x = X(x,\ \dot{x}) \tag{1.1}$$

где $x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_m)$ – искомый вектор; $J = J^T$, $D = D^T$, $G = -G^T$, $\Pi = \Pi^T$, $P = -P^T$ (индекс T означает транспонирование) – постоянные матрицы размера $m \times m$; $X(x,\ \dot{x})$ – m-мерный вектор-столбец, содержащий компоненты векторов x и $\dot{x}$ в степенях выше первой; $H > 0$ – некоторый большой скалярный параметр. Матрицы J и D считаются положительно определенными, матрицы G и P – невырожденными.

Уравнение (1.1) описывает возмущенное движение механических систем, находящихся под действием диссипативных, гироскопических, потенциальных и неконсервативных позиционных сил. В системах с гироскопами под J следует понимать матрицу суммарных моментов инерции относительно соответствующих осей.

Ранее [1] была использована подстановка

$$x = L\xi \tag{1.2}$$

приводящая к уравнению

$$JL\ddot{\xi} + [2J\dot{L} + (D + HG)L]\dot{\xi} + [J\ddot{L} + (D + HG)\dot{L} + (\Pi + P)L]\xi = \Xi \tag{1.3}$$

где Ξ – вектор-столбец, содержащий компоненты ξ и $\dot{\xi}$ в степенях выше первой. Выполнение условия

$$D\dot{L} + PL = 0 \tag{1.4}$$

позволяет исключить матрицу P из уравнения (1.3). При учете условия (1.4) уравнение (1.3) с точностью до нелинейного вектора Ξ может быть приведено к виду [1]

$$\ddot{\xi} + Q\dot{\xi} + R\xi = 0 \tag{1.5}$$

где

$$Q = L^{-1}VL, \quad R = L^{-1}WL \tag{1.6}$$

$$V = J^{-1}(D + HG) + 2A, \quad W = A^2 + J^{-1}(\Pi + HGA), \quad A = D^{-1}P^T \tag{1.7}$$

Из представлений (1.6) следует, что матрицы V, Q и соответственно W, R связаны преобразованием подобия.

Обращаясь к уравнению (1.5) и выражениям (1.6) – (1.7), замечаем, что при выполнении соотношений

$$V = L^{-1}(t)VL(t), \quad W = L^{-1}(t)WL(t), \quad \forall t \geqslant 0 \tag{1.8}$$

или

$$L(t)V = VL(t), \quad L(t)W = WL(t) \tag{1.9}$$

т.е. когда матрицы $L(t)$, V и соответственно $L(t)$, W коммутируют, уравнение (1.5) существенно упрощается и имеет вид

$$\ddot{\xi} + V\dot{\xi} + W\xi = 0 \tag{1.10}$$

содержащий V и W в качестве постоянных матричных коэффициентов при $\dot{\xi}$ и ξ.

Умножая уравнение (1.10) слева на J, имеем

$$J\ddot{\xi} + V_1\dot{\xi} + W_1\xi = 0 \quad (V_1 = JV, \ W_1 = JW) \tag{1.11}$$

Если матрица W_1 получается симметрической (неконсервативные позиционные структуры отсутствуют), а матрица V_1 – зависящей от диссипативных и гироскопических сил, то к уравнению (1.11) допустимо прямое применение теорем Томсона – Тета – Четаева [3, 4].

Поэтому естественной является постановка вопроса о получении условий, выраженных посредством матриц, входящих в исходное уравнение (1.1), при которых соотношения (1.8) – (1.9) тождественно выполняются и приводят к уравнению (1.11).

2. Условия приводимости к уравнению (1.11). Обратимся к условию (1.4), которое может быть представлено в виде матричного уравнения

$$\dot{L} = AL \tag{2.1}$$

где A определяется согласно (1.7). Имеем отсюда

$$L = e^{At}L(0) \tag{2.2}$$

где матрица $L(0)$ соответствует начальному значению t.

При ограниченности $L(t)$ и $\dot{L}(t)$ на интервале $[0, \infty)$, а также при $|\det L(t)| \geqslant \delta > 0$ матрица L будет матрицей Ляпунова. Тогда преобразование (1.2) не изменяет свойств устойчивости линейной части уравнения (1.1).

Можно показать, что при сделанных предположениях относительно матриц D и P и при $L(0) = E$ (E – единичная матрица) решение задачи Коши для уравнения (2.1) будет матрицей Ляпунова. Действительно, поскольку матрица D – симметрическая и положительно определена, то существуют единственные, симметрические, положительно определенные матрицы $D^{1/2}$ и $D^{-1/2}$ [5]. Обозначим

$$L_1(t) = D^{1/2}L(t)D^{1/2}, \quad P_1 = -D^{-1/2}PD^{-1/2} \tag{2.3}$$

Тогда задача Коши для (2.1) примет вид

$$\dot{L}_1(t) = P_1L_1(t), \quad L_1(0) = D \tag{2.4}$$

При этом матрица P_1 остается кососимметрической. Имеем теперь при учете соотношений (2.3) и (2.4)

$$L(t) = D^{-1/2}\exp(P_1t)D^{1/2} \tag{2.5}$$

Из равенства (2.5) следуют оценки по норме матриц $L(t)$ и $\dot{L}(t)$:

$$\|L(t)\| \leq \left\|D^{-1/2}\right\| \, \|\exp(P_1 t)\| \, \left\|D^{1/2}\right\| = \left\|D^{-1/2}\right\| \, \left\|D^{1/2}\right\|,$$

$$\left\|\dot{L}(t)\right\| \leq \left\|D^{-1/2}\right\| \, \|P_1\| \, \|\exp(P_1 t)\| \, \left\|D^{1/2}\right\| = \left\|D^{-1/2}\right\| \, \|P_1\| \, \left\|D^{1/2}\right\|, \quad \forall t \geq 0 \tag{2.6}$$

При этом использовано тождество

$$\|\exp(P_1 t)\| \equiv 1 \tag{2.7}$$

В справедливости тождества (2.7) убеждаемся, воспользовавшись представлением евклидовой нормы $\|A\|$ вещественной матрицы $A = \left\|a_{ij}\right\|$ [6]:

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = [\mathrm{tr}(AA^T)]^{1/2} \tag{2.8}$$

где $\mathrm{tr}(AA^T)$ – след матрицы AA^T. Полагая в представлении (2.8) $A = \exp(P_1 t)$, приходим к тождеству (2.7), поскольку $P_1 = -P_1^T$.

Оценки (2.6) свидетельствуют об ограниченности $L(t)$ и $\dot{L}(t)$ на интервале $[0, \infty)$. Теперь из равенства (2.5) имеем

$$\det L(t) = \det D^{-1/2} \det[\exp(P_1 t)] \det D^{1/2} \equiv 1$$

так как, согласно тождеству Якоби [6],

$$\det[\exp(P_1 t)] = \exp(t \cdot \mathrm{tr}\, P_1) = 1$$

Итак, $L(t)$ – матрица Ляпунова.

Теорема. Пусть P, G – произвольные невырожденные кососимметрические матрицы; J, D, Π – произвольные симметрические матрицы, причем матрицы J, D положительно определены. Тогда для выполнения условий (1.8), (1.9) при любом $H > 0$ необходимо и достаточно, чтобы соблюдались условия

$$PJ^{-1}D = DJ^{-1}P, \quad PD^{-1}G = GD^{-1}P, \quad PD^{-1}\Pi = \Pi D^{-1}P \tag{2.9}$$

Доказательство. Указанная в формулировке теоремы структура матриц P, G, J, D, Π, равно как положительность параметра H, были оговорены в разд. 1. Допустим, что выполняются условия коммутативности (1.8) или, что то же, (1.9). Воспользовавшись представлением матричной экспоненты, имеем решение уравнения (2.2) в виде

$$L(t) = \sum_{l=0}^{\infty} (D^{-1}P^T)^l \frac{t^l}{l!} L(0) \tag{2.10}$$

справедливое для любого конечного t. При учете равенства (2.10) получаем из соотношений (1.9) равенства

$$D^{-1}PV - VD^{-1}P = 0, \quad D^{-1}PW - WD^{-1}P = 0$$

Используя формулы (1.7) и выделяя члены, содержащие множителем большой параметр H, записываем полученные равенства в виде

$$D^{-1}PJ^{-1}D - J^{-1}P + H(D^{-1}PJ^{-1}G - J^{-1}GD^{-1}P) = 0$$

$$D^{-1}PJ^{-1}\Pi - J^{-1}\Pi D^{-1}P - H(D^{-1}PJ^{-1}G - J^{-1}GD^{-1}P)D^{-1}P = 0 \tag{2.11}$$

Выражения (2.11) должны быть справедливы для любых $H > 0$. Это возможно только тогда, когда будут иметь место равенства

$$D^{-1}PJ^{-1}D = J^{-1}P,\quad D^{-1}PJ^{-1}G = J^{-1}GD^{-1}P,\quad D^{-1}PJ^{-1}\Pi = J^{-1}\Pi D^{-1}P \tag{2.12}$$

Теперь уже легко получаются условия (2.9). Умножая первое из равенств (2.12) слева на D, приходим к первому из условий (2.9). Далее, умножая первое из равенств (2.12) справа на D^{-1}, получаем $D^{-1}PJ^{-1} = J^{-1}PD^{-1}$. При учете полученного условия второе и третье из равенств (2.12) приводят соответственно ко второму и третьему условиям (2.9). Этим доказывается необходимость.

Пусть теперь выполняются условия (2.9). Используя формулы (1.7) и (2.12), убеждаемся в справедливости выражений

$$D^{-1}PV - VD^{-1}P = 0,\quad D^{-1}PW - WD^{-1}P = 0 \tag{2.13}$$

Поскольку, согласно равенству (2.10), матрица L однозначно связана с $D^{-1}P$, то коммутировать с V и W будет и матрица L. А тогда условия (2.13) приводят к условиям (1.9).

Этим доказывается достаточность и, следовательно, справедливость сформулированной теоремы.

Отметим, что условия (2.9) являются необходимыми и достаточными лишь для того, чтобы уравнения (1.5) приводилось к виду (1.11). Однако они ничего не утверждают относительно свойств матрицы W_1, основным из которых при исследовании устойчивости уравнения (1.11) является ее симметричность. Можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма. Для того чтобы матрица W_1 в уравнении (1.11) была симметрической, достаточно выполнения первых двух из условий (2.9).

Доказательство. Используя выражения (1.7) и первые два из условий (2.9), а также учитывая, что матрица Π по определению симметрическая, т.е. $\Pi = \Pi^T$, имеем

$$\begin{aligned} W_1 - W_1^T &= JW - (JW)^T = J(D^{-1}P)^2 - HGD^{-1}P - (PD^{-1})^2 J + HPD^{-1}G = \\ &= (JD^{-1}P)D^{-1}P - PD^{-1}(PD^{-1}J) + H(PD^{-1}G - GD^{-1}P) = \\ &= PD^{-1}JD^{-1}P - PD^{-1}JD^{-1}P = 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

что и требовалось доказать.

Условие (2.14) свидетельствует об отсутствии неконсервативных структур в составе матрицы W_1. Тем самым оно оправдывает законность применения соответствующей теоремы Томсона – Тета – Четаева.

При отсутствии сил с полной диссипацией и произвольных гироскопических сил, входящих в состав V_1, положительная определенность симметрической матрицы W_1 соответствует устойчивости (неасимптотической) тривиального решения уравнения (1.11) для указанных условий. А в этом случае добавление сил с полной диссипацией и произвольных гироскопических сил сообщает уравнению (1.11), согласно теореме Томсона – Тета – Четаева, свойство асимптотической устойчивости.

3. Четырехгироскопная вертикаль. В свете теории, изложенной в разд. 1, 2, ниже рассматривается более общий в сравнении с разобранным ранее [1] вариант четырехгироскопной вертикали, установленной на подвижном относительно Земли основании.

Система представляет собой установленную в кардановом подвесе платформу, стабилизируемую в горизонте посредством четырех одинаковых гироскопов с вертикальными осями их кожухов. Гироскопы попарно связаны антипараллелограммами, обеспечивающими разворот гироскопов в плоскости платформы на одинаковые углы в противоположные стороны. Каждая пара гироскопов соединена пружиной с внутренней рамкой карданова подвеса. Предполагается, что центр масс системы расположен ниже ее геометрического центра.

Управление платформой осуществляется специальной системой коррекции, вырабатывающей соответственные моменты относительно осей платформы и кожухов гироскопов. Подробное описание четырехгироскопной вертикали, а также ее теория, ограниченная рамками прецессионной постановки, изложены в монографии [7]. На основе полных уравнений (с учетом инерционных членов) прямым методом Ляпунова была исследована устойчивость одного из вариантов силового четырехроторного гирогоризонта для случая неподвижного основания [8].

Ниже рассматривается, применительно к полным уравнениям, случай подвижной точки опоры в предположении циркуляции основания с постоянной по величине линейной скоростью. Для этого случая уравнения движения рассматриваемой системы в обозначениях статьи [1] имеют вид [7] (незначительным влиянием суточного вращения Земли пренебрегаем)

$$
\begin{aligned}
&J_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + 2H\dot{x}_2 + 2H\omega x_3 + s_1x_2 + Plx_1 = -Pl\frac{v\omega}{g}\\
&J_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 - 2H\dot{x}_1 + 2H\omega x_4 + cx_2 - s_2x_1 = 0\\
&J_2\ddot{x}_3 + b_2\dot{x}_3 + 2H\dot{x}_4 + 2H\omega x_1 + cx_3 - s_2x_4 = 2H\frac{v}{R}\\
&J_3\ddot{x}_4 + b_3\dot{x}_4 - 2H\dot{x}_3 + 2H\omega x_2 - s_1x_3 + Plx_4 = 0
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где x_1, x_4 – углы отклонения платформы от плоскости горизонта; x_2, x_3 – углы отклонения каждой пары гироскопов относительно вертикальных осей их кожухов; H – собственный кинетический момент гироскопа; s_1, s_2 – положительные коэффициенты пропорциональности в моментах управляющей коррекции; b_1, b_3, b_2 – коэффициенты вязкого трения соответственно в осях платформы и гироскопов; c – коэффициент жесткости пружин, связывающих кожухи гироскопов с внутренней рамкой; Pl – маятниковый момент системы.

Уравнения (3.1) отнесены к опорному трехграннику $0\xi\eta\zeta$ с началом в центре подвеса, связанному с траекторией движения основания. В этом случае v и ω означают линейную скорость точки подвеса относительно Земли и угловую скорость циркуляции.

Положения равновесия системы (3.1), обозначаемые далее через $x_n^*(n = 1, \ldots, 4)$, соответствуют скоростным девиациям гировертикали и определяются уравнением

$$
Mx^* = F \tag{3.2}
$$

где

$$
x^* = \operatorname{col}(x_1^*, \ldots, x_4^*), \quad M = \begin{Vmatrix} M_1, & 2H\omega E \\ 2H\omega E & M_2 \end{Vmatrix}
$$

$$
M_1 = \begin{Vmatrix} Pl & s_1 \\ -s_2 & c \end{Vmatrix}, \quad M_2 = \begin{Vmatrix} c, & s_2 \\ -s_1 & Pl \end{Vmatrix}
$$

$$
F = \operatorname{col}\left(-Pl\frac{v\,\omega}{g},\ 0,\ 2H\frac{v}{R},\ 0\right)
$$

С помощью подстановки $x_s = x_s^* + y_s$, где x_s^* удовлетворяют уравнению (3.2), система (3.1) приводится к однородной системе уравнений относительно переменных y_s, являющейся частным случаем уравнения (1.1). Имеем

$$y = \mathrm{col}(y_1,\ \ldots,\ y_4),\quad J = \mathrm{diag}(J_1,\ J_2,\ J_2,\ J_3),\quad D = \mathrm{diag}(b_1,\ b_2,\ b_2,\ b_3)$$

$$HG = 2H\,\mathrm{diag}(S,\ S),\quad P = s\,\mathrm{diag}(S,\ S),\quad S = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{3.3}$$

$$\Pi = \begin{Vmatrix} T_1 & 2H\omega E \\ 2H\omega E & T_2 \end{Vmatrix},\quad T_1 = \begin{Vmatrix} Pl & m \\ m & c \end{Vmatrix},\quad T_2 = \begin{Vmatrix} c & -m \\ -m & Pl \end{Vmatrix}$$

$$s = \tfrac{1}{2}(s_1 + s_2),\quad m = \tfrac{1}{2}(s_1 - s_2)$$

Обращаясь теперь к условиям (2.9), убеждаемся, что первое из них для рассматриваемой задачи выполняется, если

$$b_s = \mu J_s,\quad s = 1,\ 2,\ 3 \tag{3.4}$$

где μ – некоторая постоянная.

Допустим, что действующие на рассматриваемую систему силы, моделируемые матрицей D в (3.3), обусловлены лишь малым сопротивлением среды. Тогда условия (3.4) согласуются с принятой ранее [1] концепцией Зоммерфельда – Гринхилла. В этом случае под $\mu > 0$ можно понимать малый скалярный множитель, зависящий от свойств среды.

Второе из условий (2.9) в данном случае выполняется. Из третьего при учете соотношений (3.4) приходим к равенствам

$$s_1 = s_2,\quad cJ_1 = PlJ_2,\quad J_1 = J_3 \tag{3.5}$$

Первое из равенств (3.5) предусматривает одинаковые характеристики коррекции применительно ко всем координатам x_s [8]. Второе равенство может быть удовлетворено выбором параметров системы и, в частности, для случая $c = Pl$ использовано ранее [7]. Второму из равенств (3.5) можно также удовлетворить, полагая $c = 0$, $Pl = 0$, что соответствует отсутствию пружин, связывающих кожухи гироскопов с внутренней рамкой подвеса, а также маятникового эффекта (система в этом случае полагается астатической). Применительно к распределению масс, приведенному в работе [8], имеем

$$J_1 = J_1' + 2(A' + A_k + B_k),\quad J_2 = 2(A' + A_k),\quad J_3 = J_3' + 2(A' + A_k + B_k) \tag{3.6}$$

где J_1', J_3' – экваториальные моменты инерции рамок относительно соответствующих осей; A_k, B_k – экваториальный и полярный моменты инерции кожуха; A' – экваториальный момент инерции ротора. Из выражений (3.6) следует, что третье из условий (3.5) выполняется, если $J_1' = J_3'$, т.е. при равенстве экваториальных моментов инерции внешней и внутренней рамок. С определенной степенью приближения равенство $J_1' = J_3'$ может быть достигнуто при кольцевых рамках подвеса.

Если массы роторов существенно превалируют над массами остальных элементов подвеса, то определяющими слагаемыми в правых частях выражений (3.6) будут члены, содержащие удвоенную величину экваториального момента инерции ротора. Если ограничиться учетом лишь этих членов, то можно вообще принять

$$J_1 = J_2 = J_3 = 2A'$$

чему соответствует в силу соотношений (3.4)

$$b_1 = b_2 = b_3 = b,\quad Pl = c$$

Останавливаясь для простоты на этом случае, воспользуемся уравнением (1.11) и формулами (1.7). Учитывая соотношения (3.4), будем иметь [1]

$$V_1 = D + h\,\mathrm{diag}(S,\ S),\quad W_1 = \left\| c_{jk} \right\|_1^4 (c_{jk} = c_{kj})$$
$$h = 2\mu^{-1}(H\mu - s),\quad c_{jj} = c + 2Hb^{-1}s - 2A'b^{-2}s^2 \tag{3.7}$$
$$c_{12} = c_{23} = c_{14} = c_{34} = 0,\quad c_{13} = c_{24} = 2H\omega$$

Диссипативные и гироскопические силы входят, согласно равенствам (3.7), в состав матрицы V_1. Поэтому при наличии таких сил положительная определенность матрицы W_1 сообщает тривиальному решению уравнения (1.11) свойство асимптотической устойчивости. Применение критерия Сильвестра к матрице W_1 в (3.7) приводит к условиям

$$b^2c + 2(bH - A's) > 0,\quad b^2c + 2bH(s - b\omega) - 2A's^2 > 0 \tag{3.8}$$

Неравенства (3.8) содержат частным случаем условия устойчивости рассматриваемой системы, ограниченные рамками прецессионной теории. Для получения этих условий в (3.8) следует пренебречь членами, содержащими множителем величину A'. Тогда первое из неравенств (3.8) при $b \neq 0$ всегда выполняется. Из второго имеем условие

$$bc + 2H(s - b\omega) > 0 \tag{3.9}$$

Если $c = 0$, то из неравенства (3.9) получается условие $s > b\omega$, совпадающее с известным необходимым условием устойчивости четырехроторного гирогоризонта с радиальной коррекцией [7].

Можно заметить, что при $c \neq 0$ условие (3.9) соблюдается и в случае $s \leqslant b\omega$, если $bc > 2H(b\omega - s)$. Таким образом, наличие упругой связи гироскопов с внутренней рамкой в сочетании с маятниковым моментом способствует в данном случае упрочнению устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кошляков В.Н.* О структурных преобразованиях неконсервативных систем // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 6. С. 933–941.
2. *Кошляков В.Н., Макаров В.Л.* Структурный анализ некоторого класса динамических систем // Укр. мат. журн. 2000. Т. 52. № 8. С. 1089–1096.
3. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
4. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
6. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
7. *Ройтенберг Я.Н.* Гироскопы. М.: Наука, 1975. 592 с.
8. *Агафонов С.А.* Об асимптотической устойчивости неконсервативных систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 3–8.

Киев

Поступила в редакцию
10.I.2001