

УДК 531.36

© 2001 г. В. Шилен

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОГРАММИРУЕМЫХ ДВИЖЕНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА

Проводится анализ энергетических затрат, необходимых для обеспечения заданного периодического движения одномерного линейного осциллятора. В связи с тем, что решение этой задачи при помощи активных приводов связано со значительным увеличением веса и дополнительным расходом энергии, предлагается использовать в качестве накопителя энергии пружины с линейными или нелинейными характеристиками. Получены результаты, касающиеся оптимального выбора жесткости линейной пружины или параметров ее нелинейности (для случая, когда требуемое движение происходит с кусочно-постоянным ускорением).

Известно, что принцип управления, основанный на методах обратной динамики, позволяет преодолеть трудности, обусловленные сильной нелинейностью, типичной для механических систем с большими перемещениями [1–7]. Вначале при помощи точной модели рассматриваемой системы все нелинейности компенсируются за счет управляющих воздействий, а управление оставшегося двойного интегратора обеспечивается при помощи линейной обратной связи. Привлекательность такого подхода обусловлена возможностью успешного применения разнообразных средств проектирования. Однако ранее в инженерных задачах управления методами обратной динамики отмечались лишь проблемы, связанные с информационными процессами, а требуемая энергия предполагалась доступной. Это допущение справедливо для большинства стационарных систем, но неверно для автономных роботов и шагающих машин¹. Были представлены [8] некоторые важные идеи по разработке силовых систем для шагающих машин и отмечено, что отсутствие способности к восстановлению мощности у большинства электрических и гидравлических датчиков повышает потребность в энергии. Кроме того, энергетические расходы порождают выделение большого количества теплоты, отвод которой от компонентов системы может быть затруднительным.

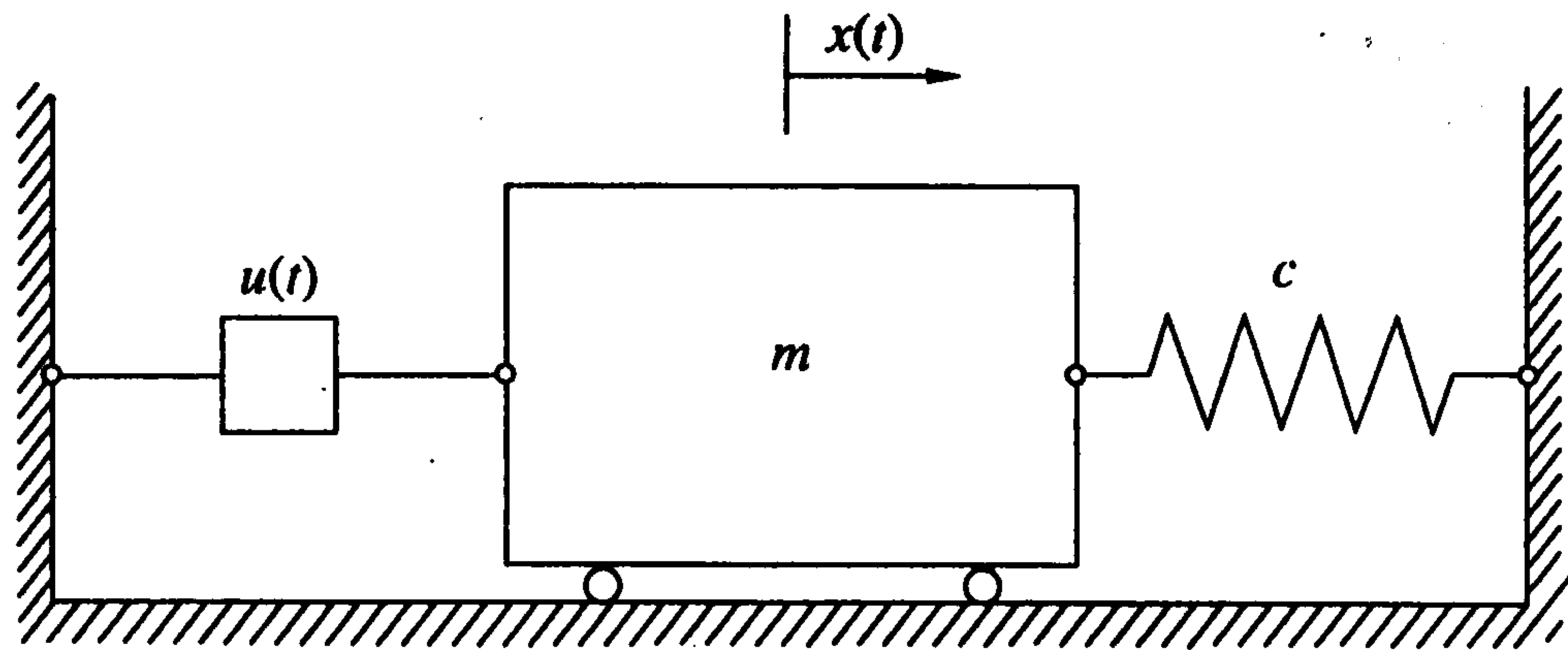
Теория механических систем со связями, анализ их устойчивости и вычислительные аспекты обсуждались, в частности, в [9–12]. Обзор динамики систем многих тел приведен в [13], а энергетические аспекты управляемых систем рассматривались в [14].

1. Гармонический осциллятор с активным управлением. Как известно, гармонический осциллятор характеризуется фиксированной частотой, не зависящей от начальных условий. В технологических процессах, однако, часто требуются такие движения, частотой которых можно управлять. Вследствие управляющих воздействий гармонический осциллятор уже не будет консервативным. В данном разделе изучается изменение энергии активно управляемого осциллятора, снабженного пассивной пружиной (фиг. 1). Такая система достаточно проста для непосредственных расчетов без помощи компьютера. Движение описывается уравнением

$$m\ddot{x}(t) + cx(t) = u(t) \quad (1.1)$$

где m – масса, c – жесткость пружины, $u(t)$ – воздействие датчика. Последний может быть вполне активным, т.е. обеспечивающим ускоряющие и тормозящие воздействия, или полуактивным, т.е. генерирующим лишь ускоряющие силы (толкатель), при

¹ HONDA Motor Co., Ltd.: Humanoid Robot – Specification. Май 2000. URL: <http://www.honda.co.jp/english/technology/robot/spec1.html>.



Фиг. 1

использовании для замедления некоторой дополнительной тормозной системы. Предполагается, что вполне активный датчик действует без вспомогательных передач, а тормозная система не требует энергетических затрат.

Пусть для некоторого технологического процесса требуется, чтобы осциллятор двигался с заданными амплитудой A и частотой ω

$$x(t) = -A \cos \omega t \quad (1.2)$$

Соотношение (1.2) можно рассматривать как реономную связь, наложенную систему. Исходя из принципа обратной динамики для уравнения (1.1), получим

$$u(t) = A(m\omega^2 - c) \cos \omega t \quad (1.3)$$

Требуемая мощность описывается формулой

$$P(t) = u(t)\dot{x}(t) = \frac{1}{2} A^2 (m\omega^2 - c) \omega \sin 2\omega t \quad (1.4)$$

Очевидно, что величина (1.4) обращается в нуль в случае, когда $c = m\omega^2$, т.е. коэффициент упругости пружины c подбирается по частоте ω предписанного движения. Во всех остальных случаях мощность периодически осциллирует с частотой 2ω . В частности, положительность (отрицательность) мощности означает, что датчик действует ускоряюще (замедляюще). Если $c < m\omega^2$ (пружина слабая), датчик в первой четверти цикла должен толкать массу вперед, а в случае $c > m\omega^2$ (пружина сильная), он должен в начале цикла тянуть ее назад.

Главный вопрос состоит в том, откуда и в каких количествах поступает энергия: в любом случае ее потребление связано с затратами.

Энергия, или (в более общей формулировке) работа, равна интегралу по времени от мощности

$$W(t) = \int_0^t P(\tau) d\tau \quad (1.5)$$

Отсюда при учете выражения (1.4) получим

$$W(t) = \frac{1}{4} A^2 (m\omega^2 - c) (1 - \cos 2\omega t) \quad (1.6)$$

Формула (1.6) справедлива лишь при условии, что энергия торможения сохраняется. Вполне активный датчик не способен сохранять энергию, поэтому энергию торможения следует запасать или, по крайней мере преобразовывать в тепло.

Интервалы положительной и отрицательной мощности нужно рассматривать по отдельности. С этой целью прежде всего необходимо найти такие моменты времени t_i ($i = 1, \dots, n$), для которых $P(t_i) = 0$. Для составляющих работы на интервалах $t \in [t_{i-1}, t_i]$ имеем выражения

$$\Delta W_i(t) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} P(\tau) d\tau \quad (1.7)$$

(считаем $t_0 = 0$). Общая работа определяется путем суммирования составляющих (1.7) по формулам, вид которых зависит от типа датчика. С этой целью определим функции

$$W_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < t_{i-1} \\ \Delta W_i(t), & \text{если } t_{i-1} < t < t_i \\ \Delta W_i(t_i), & \text{если } t > t_i \end{cases} \quad (1.8)$$

Суммарная работа выражается формулой (всюду далее суммирование ведется от $i = 1$ до $i = n$)

$$W(t) = \begin{cases} \sum |W_i(t)| & \text{для вполне активного датчика} \\ \frac{1}{2} \sum [1 + \text{sign } W_i(t)] |W_i(t)| & \text{для полуактивного датчика} \end{cases} \quad (1.9)$$

(для полуактивного датчика в общую работу входят лишь положительные компоненты, соответствующие интервалам ускорения).

Для гармонического осциллятора нули функции (1.4) определены формулой $t_i = [\pi/(2\omega)]i$, откуда по формуле (1.7) получаем

$$\Delta W_j(t) = (-1)^{j+1} A^2 (m\omega^2 - c) (1 - (-1)^{j+1} \cos 2\omega t) / 4 \quad (1.10)$$

Графики работ (1.8) представлены на фиг. 2 для двух интервалов в случае слабой пружины ($c < m\omega^2$). Очевидно, что W_3 – работа ускорения, а W_4 – работа торможения. Общая работа для датчиков различных типов вычисляется при помощи формулы (1.10), ее зависимость от времени иллюстрируется в случае системы без пружины ($c = 0$) фиг. 3. Здесь кривая 1 соответствует вполне активному датчику без пружины, кривая 2 – полуактивному датчику без пружины.

Для сравнительной оценки полученных результатов рассмотрим пассивную систему, где $c \neq 0$, $u(t) = 0$. Мощность, общая работа и кинетическая энергия системы имеют вид

$$\begin{aligned} P(t) &= -cx(t)\dot{x}(t) = \frac{1}{2} A^2 c \omega \sin 2\omega t, & W(t) &= \frac{1}{4} A^2 c (1 - \cos 2\omega t) \\ E(t) &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) = \frac{1}{2} A^2 m \omega^2 \sin^2 \omega t = W(t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

С другой стороны, в обозначениях (1.8) в рассматриваемом случае общая работа выражается формулой

$$W(t) = \sum W_i(t)$$

Вследствие консервативности системы энергия торможения полностью сохраняется и энергетические затраты отсутствуют. Зависимость $W(t)$ для пассивной системы также показана на фиг. 3 (кривая 3).

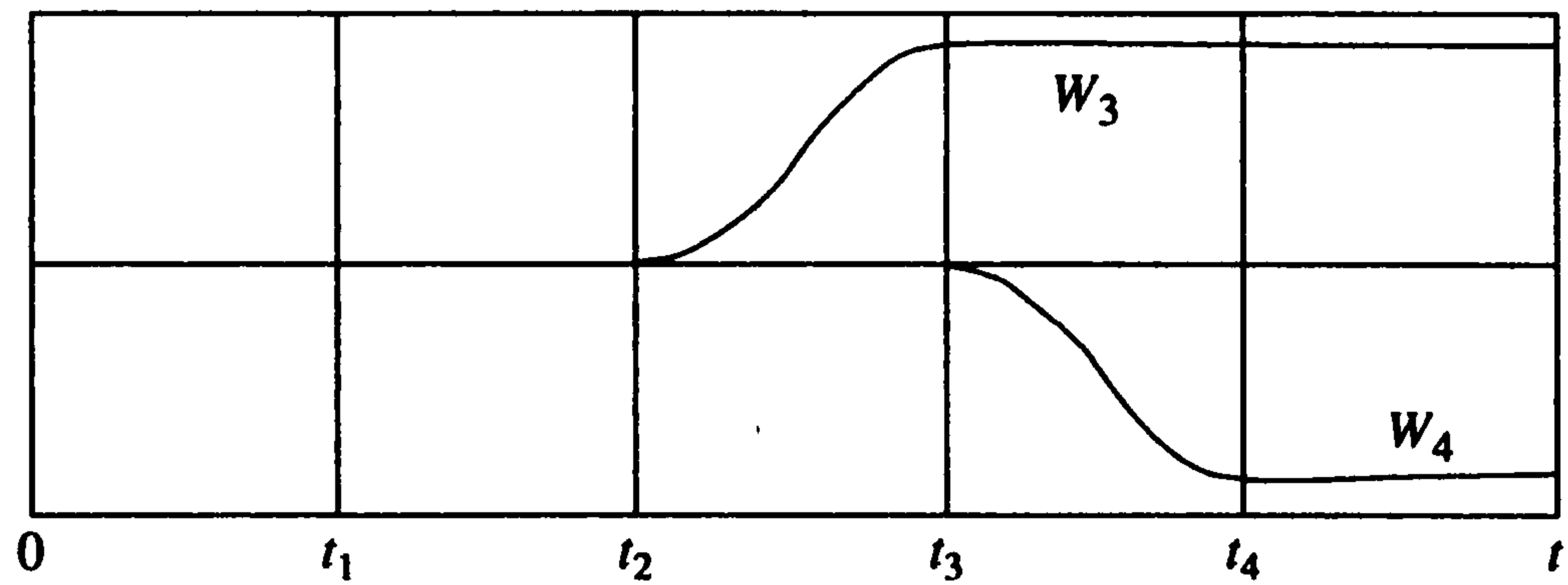
Энергия, потребляемая активно управляемым осциллятором, линейно растет со временем. Скорость этого роста можно определить, вычислив среднее значение мощности на четверти или половине цикла в зависимости от типа датчика.

Имеем для вполне активного датчика

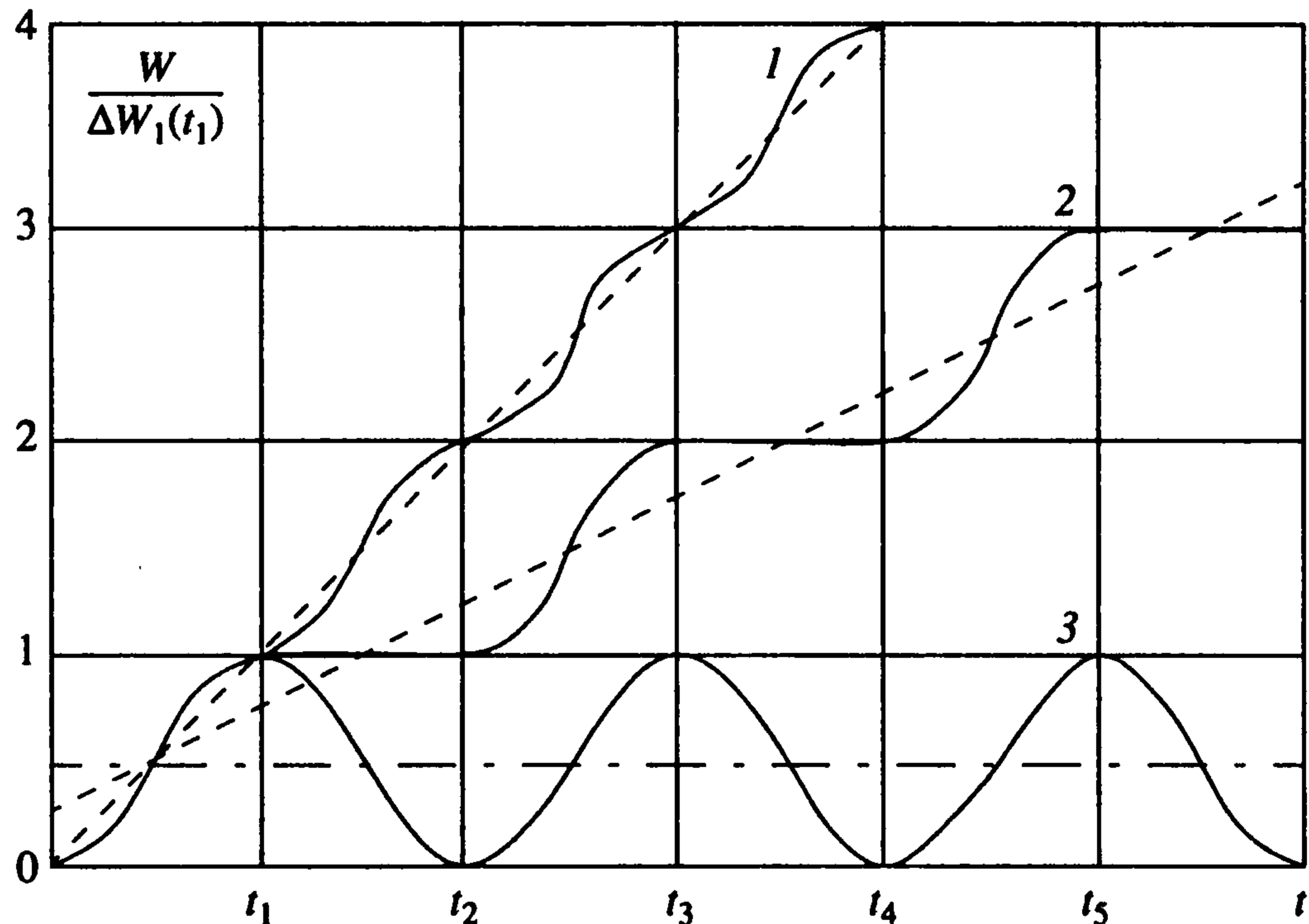
$$\bar{P}_1 = \frac{2\omega}{\pi} \frac{1}{2} A^2 \omega (m\omega^2 - c) \int_0^{\pi/(2\omega)} \sin 2\omega t dt = \frac{1}{\pi} A^2 \omega (m\omega^2 - c)$$

Для полуактивного датчика (усреднение на половине цикла)

$$\bar{P}_2 = \frac{1}{2\pi} A^2 \omega (m\omega^2 - c)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Потребление энергии описывается формулой

$$\bar{W}(t) = |\bar{P}| t$$

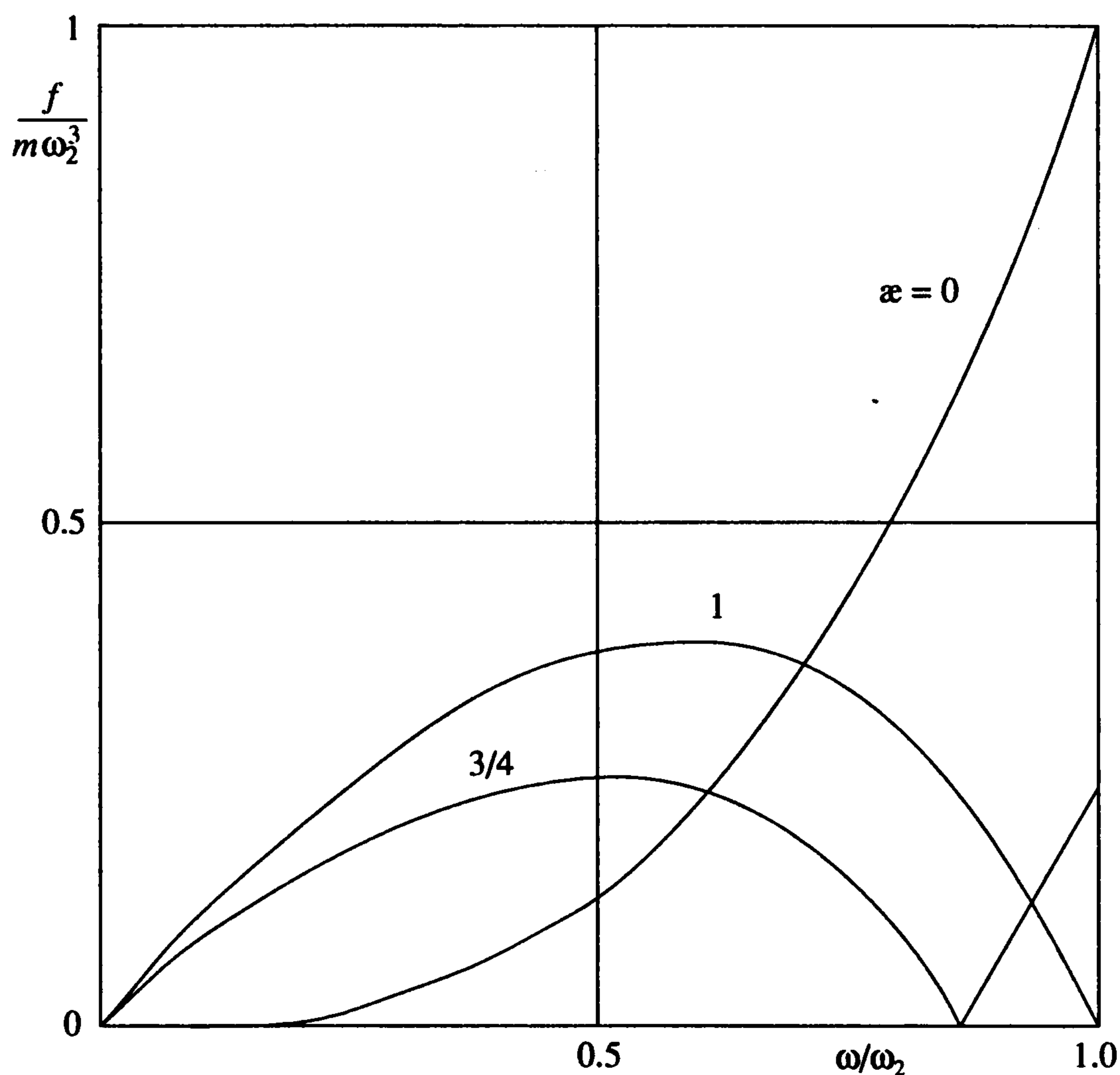
причем вполне активный датчик оказывается вдвое расточительней полуактивного (штрих-пунктирные прямые на фиг. 3). В действительности максимальная требуемая мощность и потребление энергии зависят от функции

$$f(\omega) = |\omega(m\omega^2 - c)| \quad (1.12)$$

которую обсудим более подробно. В технологических процессах всегда имеются пределы для максимальной и минимальной частот $\omega_2 > \omega_1 \geq 0$. Поэтому исследование функции $f(\omega)$ можно ограничить интервалом $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$. Цель состоит в уменьшении максимальной мощности и скорости роста потребления энергии на всем этом интервале за счет подбора коэффициента упругости пружины.

В отсутствие пружины ($c = 0$) получаем максимальное значение $f(\omega_2) = m\omega_2^3$, которое можно компенсировать, полагая $c = m\omega_2^2$. Тогда на низких частотах пружина будет слишком жесткой и датчик в первом интервале времени оказывает тормозящее действие. Тем не менее наибольшее значение функции f , которое достигается при $\omega = \omega_2 / \sqrt{3}$, будет значительно ниже:

$$f(\omega_2 / \sqrt{3}) = 2m\omega_2^3 / (3\sqrt{3})$$



Фиг. 4

что означает снижение затрат энергии на 62%. Ослабляя пружину, можно добиться дальнейшего снижения. Положим $c = \kappa m \omega_2^2$, $\kappa \in (0, 1)$. Функция (1.12) имеет единственную критическую точку $\omega^* = (\kappa/3)^{1/2} \omega_2$, при этом величина $f(\omega^*) = 2(\kappa/3)^{3/2} \omega_2^3$ монотонно возрастает вместе с κ . С другой стороны, граничное значение $f(\omega_2) = (1 - \kappa) \omega_2^3$ монотонно убывает с ростом κ . Поэтому наибольшее значение функции (1.12) будет минимальным в случае, когда $f(\omega^*) = f(\omega_2)$, т.е. при $\kappa = 3/4$ соответствующее максимальное значение равно

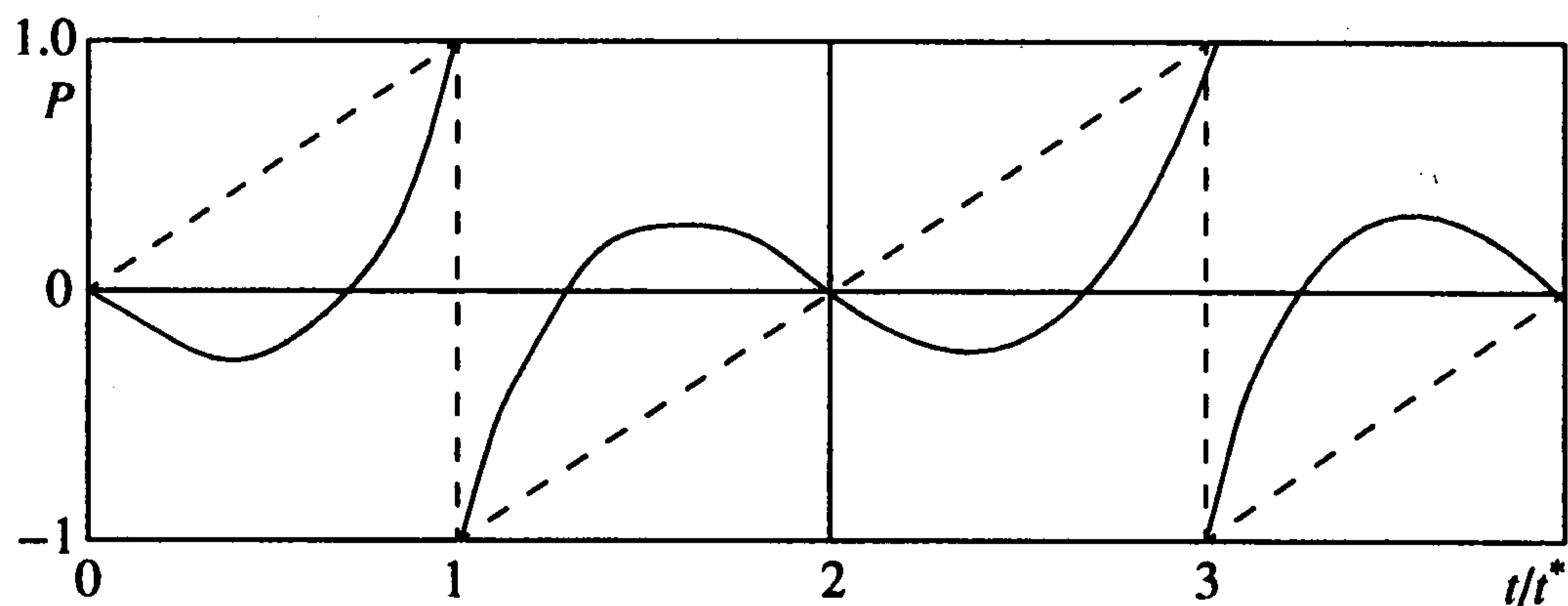
$$f(\omega_2/2) = m \omega_2^2 / 4$$

Таким образом, получено дальнейшее снижение затрат энергии на 13%, так что общее их снижение составляет 75%. Все три случая показаны на фиг. 4.

Следует отметить, что полученное оптимальное решение приводит не только к минимуму потребления энергии, но и к равномерному распределению мощности. В то время как потребление энергии связано с эксплуатационными затратами, мощность привода сказывается на стоимости оборудования.

Дополнительная информация о статистике использования диапазона частот дает возможность дальнейшего уточнения коэффициента жесткости пружины, но такое исследование выходит за рамки данной работы.

Случай узкого диапазон изменения частоты исследуется более просто. Допустим, что $\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega$, $\Delta\omega \ll \omega_0$, и выберем коэффициент жесткости c равным $m \omega_0^2$. Тогда функция (1.12) в окрестности значения ω_0 близка к линейной функции $f(\omega) = 2m \omega_0^2 |\Delta\omega|$, и максимальное потребление энергии линейно зависит от макси-



Фиг. 5

мальной вариации частоты. При этом затраты энергии и потребляемая мощность остаются малыми за счет сохранения большей части энергии в пружине. В данном случае наиболее важным параметром является номинальная частота ω_0 .

Подведем итог. В отличие от пассивного линейного осциллятора, активно управляемый линейный осциллятор допускает движение с произвольной частотой, но требует энергетических затрат. Упругая пружина является хорошим устройством для сохранения энергии и даже в случае, когда технологические требования предписывают широкий диапазон изменения частот, приводит к сокращению энергетических затрат и потребляемой мощности на 75%. Аналогичный результат получен в задаче об активно управляемом маятнике при проектировании силовых систем шагающих машин [9].

2. Осциллятор с произвольным заданным движением и линейной пружиной. Гармонические движения, рассмотренные выше, не всегда отвечают требованиям, предъявляемым к технологическим процессам. Могут быть заданы периодические движения произвольного вида, или оптимальные траектории, для которых требуется импульсное управление. Кроме того, период движения может изменяться в соответствии с требованиями к технологическому процессу.

Вновь рассмотрим простой механический осциллятор (1.1), изображенный на фиг. 1. Технологический процесс оптимален по времени и включает в интервалы равноускоренного и равнозамедленного движения. Тогда в первой четверти имеем

$$x(t) = -A + at^2 / 2, \quad 0 \leq t \leq t^*, \quad t^* = \sqrt{2A/a} = \pi / (2\omega) \quad (2.1)$$

где A – амплитуда, $a > 0$ – постоянное ускорение, ω – частота процесса. Параметры a и ω связаны равенством в последней формуле (2.1), поэтому достаточно выбрать один из них.

Из соотношений (2.1) по принципу задач обратной динамики для уравнения (1.1) получаем

$$u(t) = ma - cA + cat^2 / 2$$

Расходуемая на управление мощность описывается соотношением

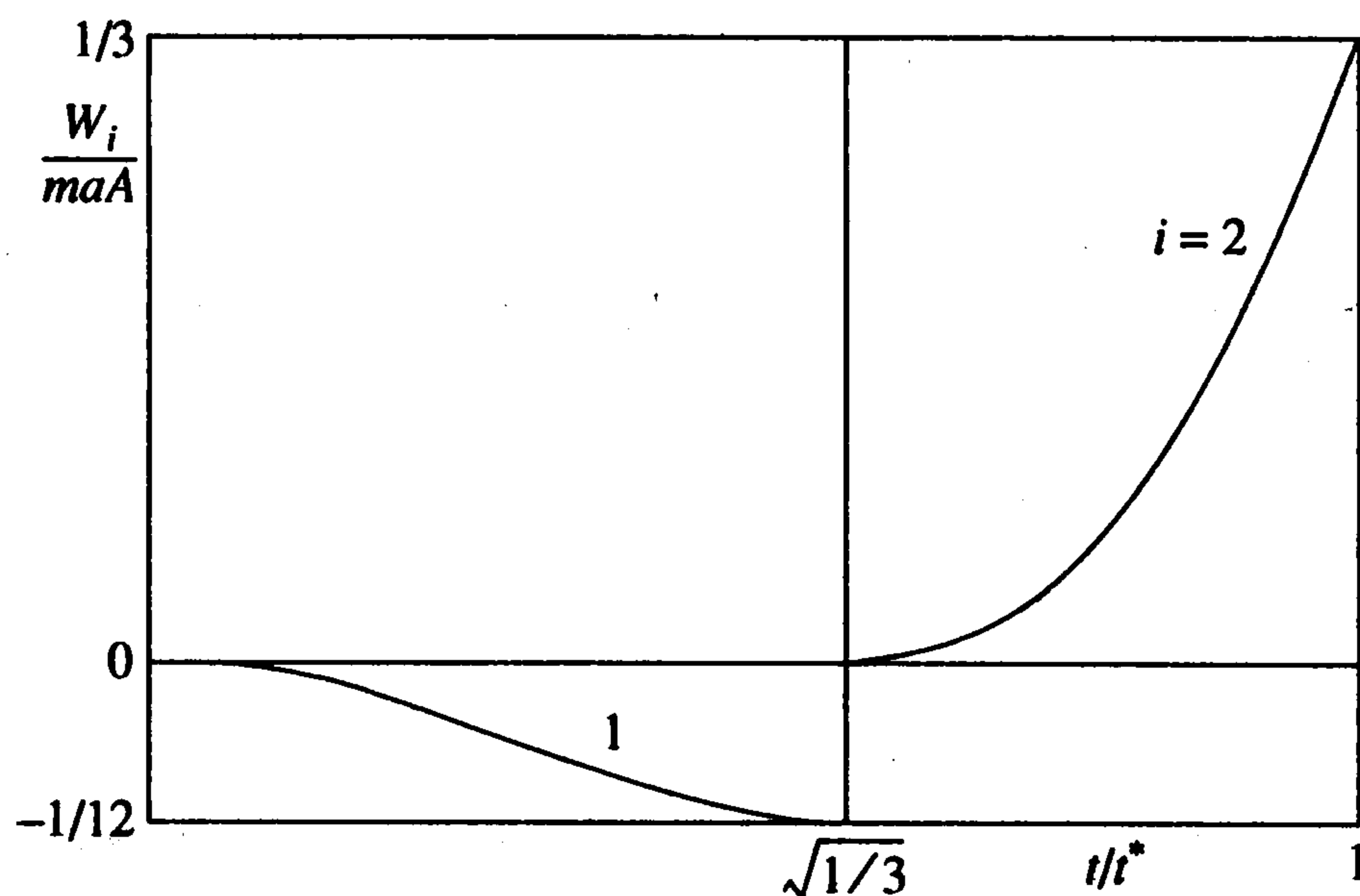
$$P(t) = u(t)\dot{x}(t) = (ma - cA)at + ca^2t^3 / 2 \quad (2.2)$$

Заметим, что мощность, требуемая в момент $t = t^*$, не зависит от c :

$$P^* = P(t^*) = ma\sqrt{2Aa}$$

Тем не менее как функция $P(t)$, так и работа зависят от свойств пружины.

На фиг. 5 представлены графики функции P/P^* для двух случаев: когда пружина отсутствует (штриховая линия) и когда она достаточно жесткая (сплошная линия) для полного цикла процесса. Во второй и третьей четвертях имеем $\ddot{x} < 0$, что означает замедленное движение.



Фиг. 6

Работа на первой четверти цикла вычисляется по формуле (1.5)

$$W(t) = (ma - cA)at^2/2 + ca^2t^4/8 \quad (2.3)$$

В отсутствие пружины $c = 0$ и величина (2.3) положительна, а ее значение в конце первой четверти цикла $t = t^*$ равно maA . На этом интервале времени мощность (2.2) также положительна, и элемент работы на первом интервале времени, определяемый формулой (1.7), имеет вид

$$\Delta W_1(t) = ma^2t^2/2, \quad 0 \leq t \leq t^*$$

В случае слабой пружины $c \leq ma/A$ первый интервал остается тем же, а работа уменьшается:

$$W(t^*) = maA - cA^2/2 \quad (2.4)$$

В частности, если $c = ma/A$, то работа уменьшается на 50%. Элемент работы для этого первого интервала $\Delta W_1(t)$ совпадает с величиной (2.3).

В случае жесткой пружины первая четверть цикла содержит интервалы положительной и отрицательной мощности (фиг. 5). Момент t_1 смены знака функции (2.2) определим, приравнявая ее нулю. Получим

$$t_1 = \sqrt{2(cA - ma)/(ca)} \quad (2.5)$$

Элемент работы на первом интервале определим из формулы (2.3)

$$\Delta W_1(t_1) = -(ma - cA)^2/(2c)$$

Элемент работы на втором интервале выразим при учете выражения (1.7) в виде

$$\Delta W_2(t) = W(t) - \Delta W_1(t)$$

откуда

$$\Delta W_2(t_2) = maA - cA^2/2 + (ma - cA)^2/(2c)$$

На фиг. 6 изображены графики функции $W_{1,2}(t)$, определенных формулой (1.8).

В соответствии с формулой (1.9) найдем выражение для полной работы в случае вполне активного датчика

$$\frac{W(t_2)}{maA} = -1 + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{cA}{ma}, \quad t_2 = t^* \quad (2.6)$$

Приравнивая нулю производную правой части формулы (2.6), найдем оптимальное значение $\gamma = \sqrt{2}$, при котором достигается дополнительная экономия энергии на 9%.

Заключительный шаг – проверка максимальной мощности, потребляемой на первом интервале. Как отмечалось выше, данная величина влияет на стоимость оборудования. Точку максимума t_M определим, приравнивая нулю производную от правой части формулы (2.2). Получим

$$t_M = t_1 / \sqrt{3}$$

что вследствие (2.5) близко к середине первого интервала. Следовательно, максимальная мощность в оптимальном случае $\gamma = \sqrt{2}$ имеет вид

$$P(t_M) = -2^{3/4} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{3} \right)^{3/2} ma\sqrt{2aA} = -0,086ma\sqrt{2Aa}$$

что намного меньше, нежели значение в формуле (2.3).

На второй четверти цикла $t^* \leq t \leq 2t^*$ выполняются следующие соотношения (их выполнение можно обеспечить за счет приложения управляющих импульсов):

$$x(t) = \sqrt{2Aa}(t-t^*) - a(t-t^*)^2 / 2$$

$$\dot{x}(t) = \sqrt{2Aa} - a(t-t^*), \quad \ddot{x}(t) = -a$$

$$u(t) = -ma + c\sqrt{2Aa}(t-t^*) - ca(t-t^*)^2 / 2$$

Вследствие симметрии движения на четвертях цикла оценки энергии и мощности остаются прежними. Поэтому соответствующие уравнения здесь не приводятся.

3. Случай нелинейной пружины. По сравнению со случаем гармонического движения, рассмотренным в разд. 1, экономия энергии за счет добавления линейной пружины в случае заданного движения общего вида уменьшается, как показано в предыдущем разделе. Однако ее можно увеличить за счет пружин с нелинейными характеристиками. Покажем это вновь на примере осциллятора (1.1) с заданным движением (2.1).

Будем искать нелинейную характеристику $n = n(x)$, рассматривая движение на первой четверти цикла. Управляющее воздействие датчика определяется формулой

$$u(t) = ma + cn(x)$$

где c – постоянная. Частными случаями являются линейная ($n(x) = x$), кубическая ($n(x) = \delta x + \epsilon x^3$) и обратная кубическая ($n(x) = \alpha x - \beta x^3$) характеристики. Для определения коэффициентов α , β , δ и ϵ наложим на $n(x)$ дополнительные требования.

Для обратной кубической характеристики положим

$$n(A) = \alpha A - \beta A^3 = A, \quad n'(A) = \alpha - 3\beta A^2 = 0$$

откуда находим $\alpha = 3/2$, $\beta = 1/2A^2$. Для кубической характеристики

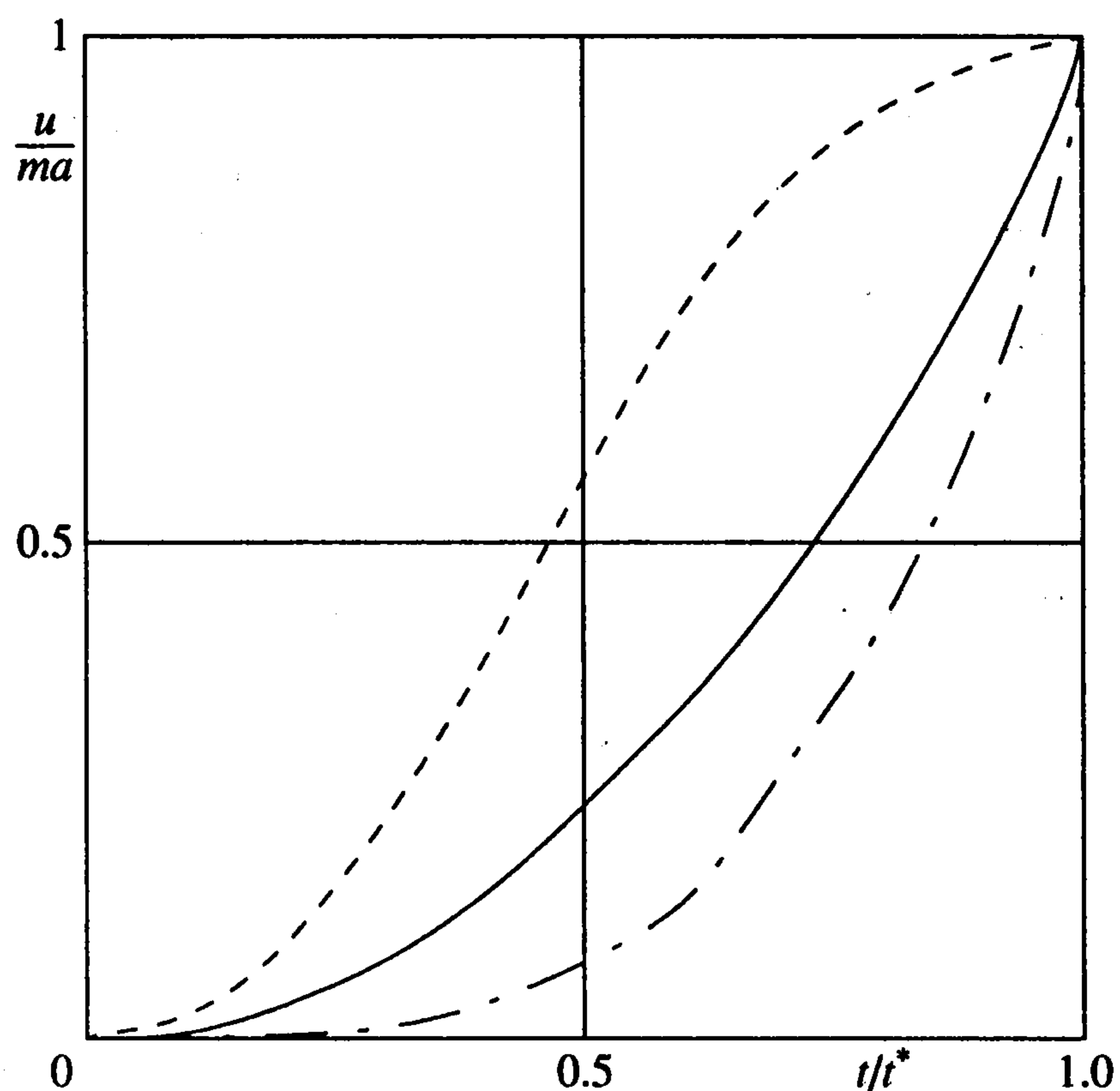
$$n(A) = \delta A + \epsilon A^3 = A, \quad n'(0) = \delta = 0$$

откуда $\delta = 0$, $\epsilon = 1/A^2$.

Полагая $c = ma/A$, получим в случаях кубической и обратной кубической зависимостей соответственно следующие выражения для усилия датчика:

$$u_1(t) = ma \left(\frac{3}{2} \frac{a}{A} t^2 - \frac{3}{4} \frac{a^2}{A^2} t^4 + \frac{1}{8} \frac{a^3}{A^3} t^6 \right) \quad (3.1)$$

$$u_2(t) = ma \left(\frac{3}{8} \frac{a^2}{A^2} t^4 - \frac{1}{16} \frac{a^3}{A^3} t^6 \right)$$



Фиг. 7

Графики функций (3.1) представлены на фиг. 7 (штрих-пунктирная и штриховая линии соответственно); здесь сплошная линия отвечает линейной характеристике. Очевидно, что сила датчика будет наименьшей в случае обратной кубической характеристики. То же самое можно сказать и о мощности, так как скорость в первой четверти цикла не меняет знака.

При сделанных предположениях найдем из формул (2.1), (3.1) мощность в первой четверти цикла для обратной кубической характеристики в виде

$$P(t) = ma \left(\frac{3}{8} \frac{a^3}{A^2} t^5 - \frac{1}{16} \frac{a^4}{A^3} t^7 \right) \quad (3.2)$$

Интегрируя выражение (3.2) на первом интервале, совпадающем с первой четвертью цикла, получим выражение для работы

$$W(t) = ma \left(\frac{3}{48} \frac{a^3}{A^2} t^6 - \frac{1}{144} \frac{a^4}{A^3} t^8 \right) \quad (3.3)$$

В конечной точке $t_1 = t^*$ формула (3.3) дает

$$W(t_1) = \frac{7}{18} maA \quad (3.4)$$

Сравнение величин (3.4) и (2.5) позволяет сделать вывод о дополнительной 11%-ной экономии, достигнутой за счет нелинейности пружины, что весьма примечательно.

Данное исследование было проведено в частном случае, когда $c = ma/A$ (наибольшее значение для слабой пружины), с целью демонстрации фундаментального явления преимущества нелинейной пружины. Данный подход можно применять и в комбинации с сильной линейной пружинной для достижения дальнейшей экономии. Однако этот предмет выходит за рамки данной работы.

4. Заключительные замечания. Реономные связи или предписанное движение, используемое для выработки управления на основе принципа обратной динамики, предъявляют высокие требования к мощности и энергии. Использование упругих пружин позволяет сохранить более половины энергии. Конструкционными параметрами, подлежащими подбору, являются жесткости линейных пружин и характеристики нелинейных пружин. Использование последних рекомендуется во всех случаях, когда движение не является гармоническим. Здесь был рассмотрен осциллятор с одной степенью свободы, однако аналогично можно исследовать и систему с произвольным числом тел. При этом вновь полезным оказывается понятие элемента работы, основанное на рассмотрении мощности каждого из датчиков системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fu K.S., Gonzalez R.C., Lee C.S.G.* Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence. N.Y.: McGraw-Hill, 1987. 580 p.
2. *Falb P.L., Wolovich W.A.* Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems // IEEE Trans. on Automat. Control. 1967. V. 12. № 6. P. 651–655.
3. *Asada H., Slotine J.-J.E.* Robot analysis and control. N. Y. etc.: Wiley, 1986. 266 p.
4. *Craig J.J.* Adaptive control of mechanical manipulators. Addison – Wesley: Reading, Mass, 1988. 136 p.
5. *Craig J.J.* Introduction to robotics: mechanics and control. Addison – Wesley: Reading, Mass, 1985. 400 p.
6. *Koivo A.J.* Fundamentals for control of robotic manipulator. N. Y. etc.: Wiley, 1989. 468 p.
7. *Spong M.W., Vidyasagar M.* Robot dynamics and control. N. Y. etc.: Wiley, 1989. 336 p.
8. *Waldron K.J.* Some thoughts on the design of power systems for legged vehicles // Adv. Multibody Systems and Mechatronics. Gerhard–Mercator–Universitaet Duisburg, 1999.
9. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения неголономных систем // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 260–271.
10. *Румянцев В.В.* О движении управляемых механических систем // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 5. С. 771–781.
11. *Румянцев В.В.* К динамике лагранжевых реономных систем со связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 540–550.
12. *Румянцев В.В.* Общие уравнения аналитической динамики // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 917–928.
13. *Schiehlen W.* Multibody system dynamics: roots and perspectives // Multibody System Dynamics. 1997. V. 1. № 2. P. 149–188.
14. *Schiehlen W.O.* Power aspects of inverse dynamics control systems // Institut B fur Mechanik, Institutsbericht IB-35. Stuttgart, 2000.

Штуттгарт (Германия)
e-mail: ws@mechb.uni-stuttgart.de

Поступила в редакцию
3.1.2001