УДК 531.36

© 2001 г. Ф. Пфайффер

СИСТЕМЫ МНОГИХ ТЕЛ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

Дается краткий обзор теоретического и практического использования принципа дополнительности в задачах динамики систем с несколькими односторонними связями. При непосредственном рассмотрении таких систем с большим числом односторонних контактов возникает комбинаторная проблема очень большой размерности, разумное решение которой может быть получено только на основе этого принципа, согласно которому для одностороннего контакта либо реакция отлична от нуля, а соответствующие кинематические характеристики равны нулю, либо наоборот. Обсуждается связь проблемы дополнительности с задачами линейного программирования.

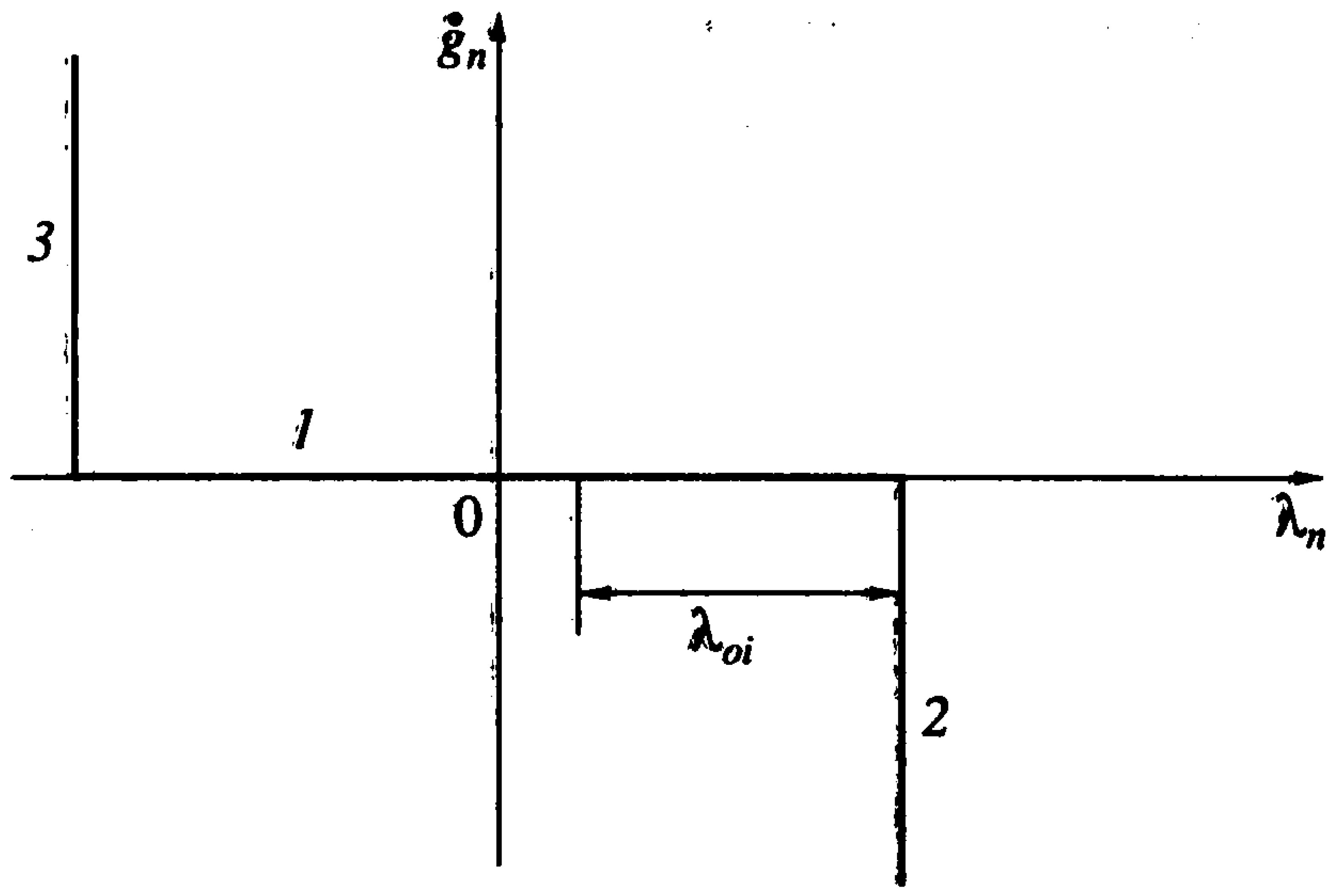
1. Контактные законы и дополнительность. Свойства дополнительности можно обнаружить во многих областях физики и математики, особенно в задачах оптимизации и исследования операций, и в экономике. Во всех этих случаях две величины или две группы величин исключают друг друга. В механике таким свойством обладают все односторонние контакты, в которых либо реакции отличны от нуля, а соответствующие кинематические характеристики равны нулю, либо наоборот. Произведения элементов этих двух групп всегда равны нулю. Данное правило позволяет исследовать системы с односторонними связями.

Основные идеи односторонней механики известны давно. Фурье описал [1] "принцип виртуальной скорости" не только для двусторонних, но и для односторонних связей. Он определил (без формул) условие отсутствия взаимопроникновения, рассматривая относительные кинематические характеристики в точке контакта, и установил принцип виртуальной работы, или виртуальной мощности, используемый в той же форме по сей день (см. [2]). Записав утверждение Фурье в современных математических обозначениях, получим множество неравенств, определяющих проблему дополнительности.

В начале XX в. Больцман в своих лекциях рассмотрел вопрос об односторонних связях, изложил принципы механики, например принцип виртуальной работы, в применении к односторонним контактам и вывел системы неравенств. Несколько позже Синьорини опубликовал статью по проблемам эластомеханики, в которой он представил условие отсутствия взаимопроникновения в форме линейной проблемы дополнительности, которая используется и сегодня.

Можно сказать, что отцом негладкой механики является Моро, который установил не только механические, но и математические основы этой новой науки, существенно расширяющей классическую механику [4, 5]. Панагиотопулос завершил построение новой теории, введя в рассмотрение неравенства, описывающие невыпуклые свойства [6]. Оба этих ученых использовали принцип дополнительности как важный и основной элемент теории. В качестве приложений рассматривались задачи эластомеханики.

С самого начала было ясно, что методы Моро и Панагиотопулуса можно перенести на механику систем твердых тел. После долгих и плодотворных обсуждений с Панагиотопулусом, безвременно ушедшим в 1998 г., сотрудники каферы прикладной механики Мюнхенского технического университета в течение десяти лет развивали



Фиг. 1

теорию систем твердых тел с односторонними контактами, ценность которой была доказана при решении многих теоретических и практических задач [7].

В принципе можно использовать две модели контакта. Первая из них – классическая, она описывает локальную жесткость и вязкое трение при помощи удобных формул, возможно более точно отражающих физику явления; примерами могут служить формулы Герца или конечноэлементные модели [8]. Второй подход связан не с углублением в локальные свойства, а с аппроксимацией контактных законов при помощи более глобальных и обычно более простых соотношений типа кулоновского закона трения или законов удара Ньютона и Пуассона [9]. Они включают некоторые параметры, подлежащие измерению, и описывают наиболее важные зависимости, справедливые для широкого круга приложений. Далее сосредоточимся именно на таком подходе, лучше приспособленном для решения задач динамики систем многих тел.

Вначале напомним формулировки упомянутых выше законов. Будем использовать закон Кулона в следующей форме:

$$\begin{aligned} &\left|\lambda_{T_i}\right| < \mu_{0i}\lambda_{N_i}, \quad \dot{g}_{T_i} = 0 \quad \text{(задержка)} \\ &\lambda_{T_i} = +\mu_{0i}\lambda_{N_i}, \quad \dot{g}_{T_i} \leqslant 0 \quad \text{(отрицательное скольжение)} \\ &\lambda_{T_i} = -\mu_{0i}\lambda_{N_i}, \quad \dot{g}_{T_i} \geqslant 0 \quad \text{(положительное скольжение)} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $\dot{g}_{T_i}$ – относительная скорость в i-м контакте, λ_{N_i}, λ_{T_i} – компоненты соответствующих реакций в нормальном и тангенциальном направлениях. Уравнения (1.1) можно интерпретировать как "закон двойного угла" (см. фиг. 1, где занумерованы участки графика, соответствующие задержке (1), отрицательному (2) и положительному (3) скольжению). Величину $\lambda_{0i} = \mu_{0i}\lambda_{N_i} - \left|\lambda_{T_i}\right|$ будем называть фрикционным насыщением.

Итак, рассматривается либо область внутри фрикционного конуса, где

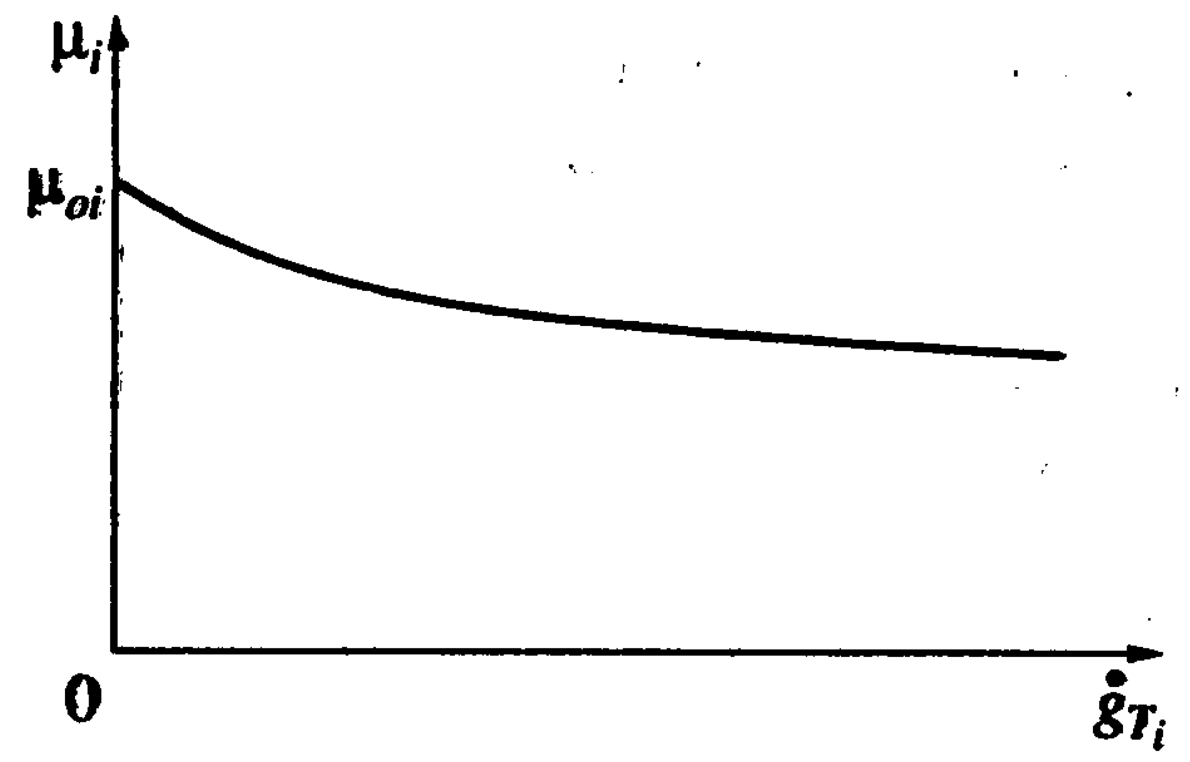
$$\left|\dot{g}_{T_i}\right| = 0, \quad -\mu_{0i}\lambda_{N_i} \leqslant \lambda_{T_i} \leqslant \mu_{0i}\lambda_{N_i}$$

либо его поверхности, где

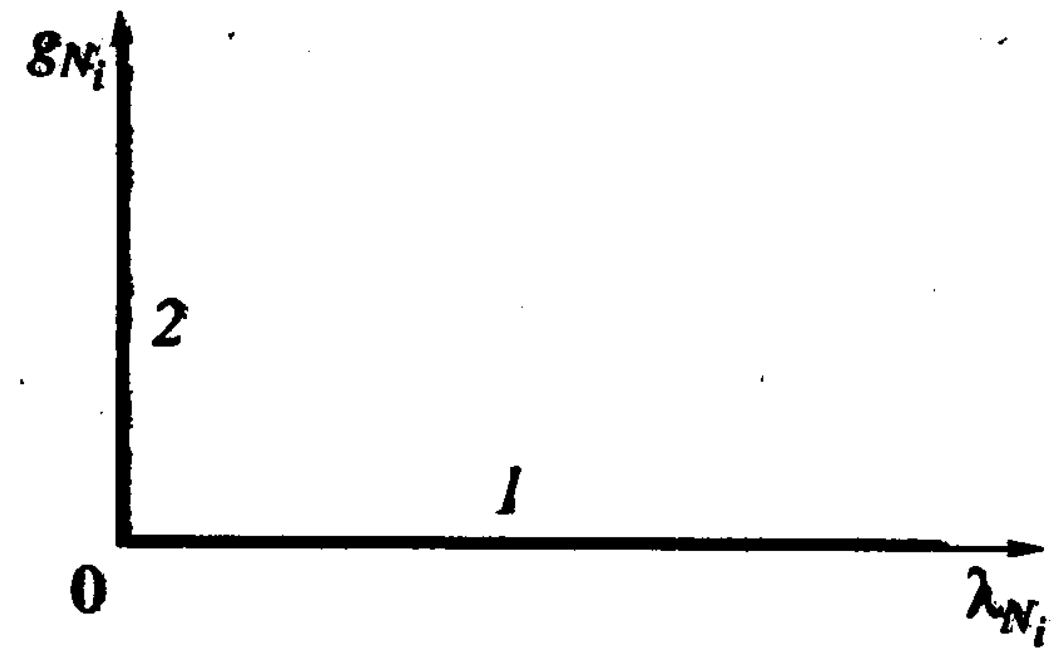
$$\left|\lambda_{T_i}\right| = \mu_{0i}\lambda_{N_i}$$

Коэффициент трения μ_{0i} определяется как предел (см. фиг. 2)

$$\mu_{0i} = \lim_{\dot{g}_{T_i} \to 0} \mu_i(\dot{g}_{T_i}) \tag{1.2}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Нормальную компоненту реакции λ_{N_i} также можно определить из закона контакта, который можно охарактеризовать как механизм прекращения контакта. Если обозначить относительное расстояние по нормали в i-м контакте как g_{N_i}, то связь этой величины с соответствующей компонентой реакции λ_{N_i} описывается классическим принципом дополнительности [1, 10]: либо $g_{N_i}=0$, $\lambda_{N_i}\geqslant 0$ (полупрямая 1 на фиг. 3), либо $g_{N_i}\geqslant 0$, $\lambda_{N_i}=0$ (полупрямая 2). При этом произведение $g_{N_i}\lambda_{N_i}$ всегда равно нулю.

Оба закона контакта (фиг. 1, 3) включают черты дополнительности, так как двойной угол на фиг. 1 можно разложить на две так называемых "односторонних примитивы" в форме простых углов. Можно сказать, что в случае фрикционных контактов либо относительная скорость $\dot{g}_{T_i}$ равна нулю, а фрикционное насыщение λ_{0i} отлично от нуля, либо, наоборот, при этом произведение $\dot{g}_{T_i}\lambda_{0i}$ всегда равно нулю.

Что касается законов удара, то в классической механике имеем две его модели: кинематический закон Ньютона и кинетический закон Пуассона. Закон Ньютона связывает нормальные скорости до и после удара соотношением

$$\dot{g}^{+}_{N_i}=-\varepsilon_i\dot{g}^{-}_{N_i} \tag{1.3}$$

где индексы минус и плюс отвечают началу и концу удара. Диссипация учитывается при помощи коэффициента восстановления ε_i.

Закон Пуассона устанавливает связь между импульсами $\Lambda=\int\lambda dt$ в форме

$$\Lambda^{+}_i=\varepsilon^{*}_i\Lambda^{-}_i \tag{1.4}$$

Физический смысл формулы (1.4) состоит в накоплении импульса в первой фазе удара и его частичном восстановлении во второй фазе. Поэтому ее можно применять для расчета как нормальной, так и тангенциальной составляющих импульса без противоречий с законами физики. В любом случае коэффициенты $\varepsilon_i,\varepsilon^{*}_i$ необходимо измерять для каждой конкретной пары материалов.

Приведем пример комбинаторной проблемы, связанной со многими контактами, и ее решения. Переменная непрерывная цепная трансмиссия передает вращение с одного конического диска переменного радиуса на другой [11]. Сама цепь состоит из элементов, содержащих качающиеся штифты, которые могут соприкасаться с дисками. Каждый штифт может двигаться вдоль диска в радиальном и касательном направлениях или не совершать относительного движения, что дает три возможности. Кроме того, наличие или отсутствие контакта дает еще две возможности. Если внутри одного из конических дисков находится десять элементов со штифтами, то общее число возможных контактных комбинаций равно 5^{10}. Очевидно, что перебор такого числа возможностей нереален. С другой стороны, использование принципа дополнительности позволяет построить решение задачи при разумном объеме вычислений [12].

2. Односторонняя динамика. Уравнения движения для систем многих тел с односторонними контактами получены ранее [7, 13], здесь ограничимся кратким изложением. Учитывая на первом шаге лишь все двусторонние контакты, запишем эти уравнения в виде

$$\mathbf{M}(\mathbf{q},t)\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^f, \;\; \mathbf{h} \in \mathbb{R}^f, \;\; \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{f,f}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{q}$ – обобщенные координаты, $\mathbf{M}$ – симметричная матрица, описывающая распределение масс, $\mathbf{h}$ – все действующие на систему силы. Наличие односторонних связей не увеличивает числа обобщенных координат. Если некоторые из этих связей включены, оставшееся число степеней свободы будет меньше f. Для описания контактной геометрии в пространственном случае используются методы дифференциальной геометрии, соответствующая параметризация проведена ранее [14, 15].

Определим зависящие от времени контактные множества, описывающие кинематическое состояние в каждой точке контакта. Множество I_A состоит из n_A индексов всех точек контакта. Элементами множества I_C являются n_C индексов, соответствующих тем односторонним контактам, для которых $g_{N_i} = 0$, а относительная скорость в нормальном направлении произвольна. В множество $I_N \subseteq I_C$ входит n_N индексов, описывающих потенциально активные нормальные связи, для которых выполнены необходимые условия непрерывного контакта ($g_{N_i} = 0$, $\dot{g}_{N_i} = 0$). Это множество включает, к примеру, все контакты со скольжением. Элементы множества $I_T \subset I_N$ – индексы потенциально активных тангенциальных связей, для которых $\dot{g}_{T_i} = 0$. Количество элементов в каждом из этих множеств может изменяться со временем вследствие возможностей прекращения контакта и перехода от задержки к скольжению.

На следующем шаге следует организовать учет переходов от контакта к разделению и от задержек к скольжениям и обратно. В нормальном направлении имеются следующие ситуации: для пассивного контакта $g_{N_i}(\mathbf{q},t) \geqslant 0$, $\lambda_{N_i} = 0$ (индикатор g_{N_i}), при переходе к контакту $g_{N_i}(\mathbf{q},t) = 0$, $\lambda_{N_i} \geqslant 0$, для активного контакта $g_{N_i}(\mathbf{q},t) = 0$, $\lambda_{N_i} > 0$ (индикатор λ_{N_i}, связь $\dot{g}_{N_i} = 0$), прекращение контакта $g_{N_i}(\mathbf{q},t) \geqslant 0$, $\lambda_{N_i} = 0$.

Кинематические величины $g_{N_i}, \dot{g}_{N_i}, \ddot{g}_{N_i}$ определяются конфигурацией системы. Реакции связей λ_{N_i} должны иметь сжимающий характер: изменение их знака приводит к прекращению контакта. Итак, имеем n_N условий дополнительности (на уровне ускорений)

$$\ddot{g}_N \geqslant 0, \;\; \lambda_N \geqslant 0, \;\; \ddot{g}_N^T \lambda_N = 0 \tag{2.2}$$

Они эквивалентны вариационному неравенству

$$-\ddot{g}_N^T(\lambda_N^* - \lambda_N) \leqslant 0, \;\; \lambda_N \in C_N, \;\; \forall \lambda_N^* \in C_N \tag{2.3}$$

Выпуклое множество $C_N = \left\{\lambda_N^* : \lambda_N^* \geqslant 0\right\}$ состоит из всех допустимых значений нормальной реакции. Условия (2.2) соответствуют фиг. 3.

Для касательного направления в точке контакта примем кулоновский закон трения. Этим не ограничиваем общности, поскольку дополнительность – характерная черта всех контактных явлений вне зависимости от конкретного физического закона контакта. Предположим далее, что на бесконечно малом интервале времени, в течение которого происходит переход от задержки к скольжению и наоборот, коэффициент статического трения равен коэффициенту трения скольжения, что выражается формулой (1.2). В случае $\dot{g}_{T_i} \neq 0$ можно применять любой закон трения (см. фиг. 2). Имеем для кулоновского закона следующие два случая:

$$
\begin{aligned}
&\left|\lambda_{T_i}\right| < \mu_{0i}\lambda_{N_i} \Rightarrow |\dot{g}_{T_i}| = 0, \quad i \in I_T \\
&\left|\lambda_{T_i}\right| = \mu_{0i}\lambda_{N_i} \Rightarrow |\dot{g}_{T_i}| > 0, \quad i \in I_N \setminus I_T
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Первая из формул (2.4) соответствует задержке и выражает тот факт, что для нулевой скорости скольжения вектор реакции лежит внутри конуса трения. Вторая формула соответствует скольжению и означает, что вектор реакции лежит на поверхности конуса трения. При этом надо иметь в виду, что векторы относительной скорости в точке контакта могут заполнять некоторую прямую или всю касательную плоскость в зависимости от того, является контакт плоским или пространственным.

Подводя итог, перечислим возможные случаи для контакта в касательном направлении: пассивный контакт, $i \in I_N \setminus I_T$ (индикатор $|\dot{g}_{T_i}| = 0$); переход от скольжения к задержке; активный контакт, или задержка, $i \in I_T$ (индикатор $\left|\mu_{0i}\lambda_{N_i}\right| - \left|\lambda_{T_i}\right| \geqslant 0$, связь $\dot{g}_{T_i} = 0$); переход от задержки к скольжению.

С вычислительной точки зрения необходимо следить за переменой знака индикатора. Для перехода от задержки к скольжению необходимо изучить возможное развитие относительного тангенциального ускорения при начале скольжения.

Запишем соотношения (2.4) в более подробной форме на уровне ускорений

$$
\begin{aligned}
&\left|\lambda_{T_i}\right| < \mu_{0i}\lambda_{N_i}, \quad \ddot{g}_{T_i} = 0 \quad i \in I_T \quad \text{(задержка)} \\
&\lambda_{T_i} = +\mu_{0i}\lambda_{N_i}, \quad \dot{g}_{T_i} \leqslant 0 \quad i \in I_N \setminus I_T \quad \text{(отрицательное скольжение)} \\
&\lambda_{T_i} = -\mu_{0i}\lambda_{N_i}, \quad \dot{g}_{T_i} \geqslant 0 \quad i \in I_N \setminus I_T \quad \text{(положительное скольжение)}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Эти соотношения соответствуют фиг. 1, которую можно разбить на два или четыре простых угла, изображенных на фиг. 3, при подходящем выборе переменных. В итоге получим [16]

$$
\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{y} \geqslant 0, \quad \mathbf{x} \geqslant 0, \quad \mathbf{y}^T\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{y}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n^*} \tag{2.6}
$$

Здесь $n* = n_N + 4n_T$ или $n* = n_N + 2n_T$ при разложении на четыре или на два элементарных угла соответственно. Величина $\mathbf{x}$ включает контактные силы и часть ускорений, получающихся в результате декомпозиции, а $\mathbf{y}$ включает относительные ускорения и фрикционные насыщения λ_{0i} (см. фиг. 1). Система (2.6) описывает линейную проблему дополнительности в случае плоских контактов. В случае пространственных контактов фрикционное насыщение содержит геометрическую сумму для двух возможных направлений силы трения, что приводит к нелинейности, не устранимой стандартными методами [17].

Подобно соотношениям (2.3) представим контактный закон (2.5) в виде вариационного неравенства

$$
\begin{aligned}
&\ddot{g}_{T_i}^T(\lambda_{T_i}^* - \lambda_{T_i}) \geqslant 0, \quad \lambda_{T_i} \in C_{T_i}, \quad \forall \lambda_{T_i}^* \in C_{T_i} \\
&C_{T_i} = \left\{\lambda_{T_i}^* : \left|\lambda_{T_i}^*\right| \leqslant \mu_{0i}\lambda_{N_i}, \ i \in I_T\right\}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Выпуклое множество C_{T_i} содержит все допустимые контактные силы $\lambda^*_{T_i}$ в тангенциальном направлении.

Для вывода уравнений движения необходимо объединить уравнения (2.1) с односторонними ограничениями (2.2), (2.6). На первом шаге включим реакции связей в уравнение (2.1), имея в виду, что в системе с дополнительными односторонними связями число степеней свободы переменно. Во избежание трудностей с введением многих различных множеств обобщенных координат, зафиксируем по одному такому множеству для каждой из комбинаций $I_A \setminus I_C$, $I_A \setminus I_N$ и $I_A \setminus I_T$, а активные односторонние связи будем учитывать, добавляя их реакции в уравнения движения в виде множителей Лагранжа. В итоге получим

$$\begin{gathered}
\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h} - (\mathbf{W} + \mathbf{N}_G)\boldsymbol{\lambda} = 0, \quad \ddot{\mathbf{g}} = \mathbf{W}^T\ddot{\mathbf{q}} + \overline{\mathbf{w}} \\
\ddot{\mathbf{g}} = \begin{Vmatrix} \ddot{\mathbf{g}}_N \\ \ddot{\mathbf{g}}_T \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{Vmatrix} \boldsymbol{\lambda}_N \\ \boldsymbol{\lambda}_T \end{Vmatrix}, \quad \overline{\mathbf{w}} = \begin{Vmatrix} \overline{\mathbf{w}}_N \\ \overline{\mathbf{w}}_T \end{Vmatrix} \\
\mathbf{W} = (\mathbf{W}_N, \mathbf{W}_T), \quad \mathbf{N}_G = (\mathbf{H}_R, 0)
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Индексы N, T отвечают нормальному и тангенциальному направлениям (плоский случай), $\mathbf{W}$ – матрица односторонних связей, $\mathbf{N}_G$ учитывает контакты с трением скольжения. В случае, когда переходов не происходит и контактная конфигурация не изменяется, относительные ускорения $\ddot{\mathbf{g}}$ равны нулю. В этом случае систему (2.8) можно разрешить относительно $\ddot{\mathbf{g}}, \boldsymbol{\lambda}$.

Объединим теперь уравнения движения (2.8) с вариационными неравенствами (2.3), (2.7). Полученная таким образом система неразрешима. Преобразовав все вариационные неравенства в равенства, получаем нелинейную систему уравнений, представляющую линейную или нелинейную проблему дополнительности в зависимости от типа контактов, которые могут быть плоскими или пространственными. Линейную проблему дополнительности можно решить методами линейного программирования, например методом Лемке, а нелинейные проблемы требуют применения итерационных процедур [17].

На базе представленного выше подхода и известных результатов [5] была разработана новая теория удара с трением [14], проверенная затем на специальной ударной машине в процессе более чем 600 тестов [18]. Она была успешно применена к решению многих практических проблем (см. обзор [19]), одной из которых является гашение колебаний дымовой трубы, возникающих под действием ветра. Проведенный численный анализ [19] показал хорошее согласование с экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fourier J.B.* Mémoire sur la Statique, contenant la démonstration du principle des vitesses virtuelles et la theorie des moments // J. l'École Politechn. 1798. V. 2. P. 20–60.
2. *Dugas R.* A History of Mechanics. N.Y.: Dover, 1988. 662 p.
3. *Boltzmann L.* Vorlesungen uber die Prinzipe der Mechanik. Leipzig: Verlag Ambrosius Barth, 1922. Teile I. 241 S.; Teile II. 335 S.
4. *Moreau J.J.* Application of convex analysis to some problems of dry friction // Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics. London, 1979. V. 2. P. 263–280.
5. *Moreau J.J.* Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics // Nonsmooth Mechanics and Applications. CISM Courses and Lectures. Wien: Springer, 1988. V. 302. P. 1–82.
6. *Panagiotopoulos P.D.* Hemivariational Inequalities. Berlin; Heidelberg: Springer, 1993. 451 p.
7. *Glocker Ch., Pfeiffer F.* Multibody Dynamics with Unilateral Contacts. N.Y.: Wiley, 1996. 317 p.
8. *Johnson K.L.* Contact Mechanics. Cambridge: Univ. Press, 1985. 452 p.
9. *Brogliato B.* Nonsmooth Impact Mechanics. L.: Springe, 1996. 400 p.

10. *Signorini A.* Sopra alcune questoni di elastostatica // Atti Soc. Ital. per il progresso delle Sczienze, 1993.
11. *Srnik J.* Dynamik von CVT-Keilkettengetrieben // Fortschrittberiche VDI. Reihe 12/372. Dusseldorf: VDI-Verlag, 1999. 160 S.
12. *Murty K.G.* Linear complementarity, linear and nonlinear programming // Sigma Series in Applied Mathematics / Ed. D.J. White. Berlin: Heldermann Verlag, 1988. 629 p.
13. *Pfeiffer F.* Unilateral problems of dynamics // Archive of Appl. Mech. Springer, 1999. V. 69. № 8. P. 503–527.
14. *Glocker Ch.* Dynamik von Starrkorpersystemen mit Reibung und Stossen // Fortschrittberichte VDI. Reihe 18. Mechanik / Bruchmechanik. Dusseldorf: VDI-Verlag, 1995. 220 S.
15. *Meitinger Th.* Dynamik automatisierten Montagerprozesse // Fortschrittberichte VDI. Reihe 2/476. Dusseldorf: VDI-Verlag, 1998. 150 S.
16. *Rossman Th.* Eine Laufmaschine fur Rohre // Fortschrittberichte VDI. Reihe 8/732. Dusseldorf: VDI-Verlag, 1998. 184 S.
17. *Klarbring A.* Mathematical programming and augmented Lagrangian methods for frictional contact problems // A. Curnier. (Ed.) Proc. Contact Mechanics Intern. Symp. EPFL, Lausanne, Switzerland. PRUR, 1992. P. 409–422.
18. *Beitelschmidt M.* Reibstosse in Mehrkorpersystemen // Fortschrittberichte VDI. Reihe 11/275. Dusseldorf: VDI-Verlag, 1999. 156 S.
19. *Pfeiffer F., Stiegelmeyr A.* Damping towerlike structures by dry friction // Proc. DETC'97, ASME Design Eng. Techn. Conf., 1997.

Мюнхен (Германия)
e-mail: pfeiffer@lbm.mw.tu-muenchen.de

Поступила в редакцию
24.I.2001