УДК 531.36

© 2001 г. В.Н. Тхай

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ, БЛИЗКОЙ К АВТОНОМНОЙ ОБРАТИМОЙ СИСТЕМЕ

Исследуется задача о периодических движениях системы, содержащей малый параметр μ и совпадающей с автономной обратимой системой при нулевом значении этого параметра. Периодические движения автономной обратимой системы образуют семейство. Решается вопрос, какие из движений данного семейства являются порождающими, т.е. принадлежат семейству от μ периодических движений и отвечают значению $\mu = 0$. Рассматриваются как "обратимые" возмущения, сохраняющие свойство обратимости в возмущенной системе, так и возмущения общего вида. Изучаются как резонансный, так и нерезонансный случаи, случаи наличия дополнительного "внутреннего" резонанса (третьего или четвертого порядка). Подробно исследуются порождающие решения, принадлежащие ляпуновскому семейству порождающей обратимой системы, а также система, близкая к консервативной системе с одной степенью свободы. В каждой из исследуемых задач получены конструктивные условия существования периодического движения в возмущенной системе. В приложении изучается динамика волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса. При малых колебаниях точки подвеса найдены периодические движения, в частности, установлено существование псевдорегулярных прецессий волчка. Исследуемые случаи исключались из рассмотрения в предшествующих работах.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о периодических движениях в системе

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}^{\cdot} = \mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mu \mathbf{U}_1(\mu, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \\
&\mathbf{v}^{\cdot} = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mu \mathbf{V}_1(\mu, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t); \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^l, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad (l \geqslant n) \\
&\mathbf{U}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -\mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{V}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v})
\end{aligned} \tag{1.1}$$

с малым параметром μ. При $\mu = 0$ имеем порождающую или невозмущенную систему, которая предполагается обратимой и инвариантной относительно замены $(t, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ на $(-t, \mathbf{u}, -\mathbf{v})$. При малых $|\mu| \neq 0$ получим возмущенную систему, близкую к автономной обратимой системе. Возмущения $\mu\mathbf{U}_1$, $\mu\mathbf{V}_1$ полагаем 2π-периодическими по времени t.

Периодические движения автономной обратимой системы всегда принадлежат семейству [1]. Возникает вопрос, какие из движений этого семейства являются порождающими, т.е. принадлежат семейству от μ периодических движений и отвечают значению $\mu = 0$. Очевидно, ответ на этот вопрос зависит от вида действующих возмущений, а также от того, является ли ситуация резонансной или нерезонансной. При этом естественно предполагать возмущения принадлежащими классу обратимых возмущений, сохраняющих инвариантность возмущенной системы относительно замены $(t, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ на $(-t, \mathbf{u}, -\mathbf{v})$, или рассматривать возмущения более общего вида, когда при $\mu \neq 0$ система (1.1) перестает быть обратимой.

Данная постановка задачи естественна и возникает в многочисленных приложениях, в частности, в механике. В случае, когда обратимая система представляет собой консервативную систему с одной степенью свободы, в задаче известны [2, 3] достаточно полные результаты.

Ранее в аналогичной постановке решена [4] задача для системы, близкой к системе Ляпунова. К полученным в этой задаче результатам близки в идейном плане результаты, изложенные ниже в статье. Более того, автономная обратимая система, так же как и система Ляпунова, допускает [5–7] ляпуновское семейство периодических движений. Ниже это семейство подвергается тщательному анализу с целью выделения порождающих периодических движений.

Применимость полученных ниже результатов, очевидно, не ограничивается рамками анализа ляпуновского семейства обратимой системы или консервативной системы с одной степенью свободы. Основные модели, используемые в классической и небесной механике (задача Хилла, задача трех тел в различных модификациях, задача N тел, тяжелое твердое тело с неподвижной точкой, тяжелое твердое тело на абсолютно шероховатой плоскости, уравнения движения механической системы под действием позиционных сил, уравнения движения в квазикоординатах и др.) являются [8, 9] обратимыми и описываются автономными уравнениями. Также известны, ставшие каноническими, примеры нелокальных семейств периодических движений в этих задачах, такие, как эллиптические орбиты в задаче двух тел, семейство, содержащее прецессии Гриоли, в задаче о движении тяжелого динамически несимметричного твердого тела около неподвижной точки и т.д.

Наконец, укажем, что в работе используются и развиваются ранее полученные результаты [3, 7, 10, 11] по теории колебаний обратимых механических систем. Дано решение очередной задачи в рамках разработки полной теории.

2. Анализ порождающей системы. Предположим, что при $\mu = 0$ система (1.1) допускает $T = 2\pi$-периодическое движение. Тогда начальное значение $\mathbf{u}^\circ = \mathbf{u}^*$ и период $T = 2\pi$ удовлетворяет системе из n функциональных уравнений

$$v_s(\mathbf{u}^\circ, 0, T/2) = 0, \qquad s = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

($\mathbf{u}(\mathbf{u}^\circ, \mathbf{v}^\circ, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{u}^\circ, \mathbf{v}^\circ, t)$ – решение порождающей системы с начальной точкой ($\mathbf{u}^\circ, \mathbf{v}^\circ$) при $t = 0$). Эта система содержит $l + 1$ неизвестные $u_1^\circ, \ldots, u_l^\circ$, T. Поэтому система уравнений (2.1) вместе с решением $\mathbf{u}^\circ = \mathbf{u}^*$, $T = 2\pi$ имеет k-семейство решений ($k \geqslant l - n$), что приводит к существованию, вместе с 2π-периодическим движением, содержащего это движение k-семейства T-периодических движений

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{h}, t), \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{h}, t); \quad \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{h}, -t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{h}, t), \quad \boldsymbol{\psi}(\mathbf{h}, -t) = -\boldsymbol{\psi}(\mathbf{h}, t)$$

($h_1, \ldots, h_k$ – параметры семейства, компоненты вектора $\mathbf{h}$). Это семейство состоит из движений, симметричных относительно неподвижного множества $\mathbf{M} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ порождающей системы. Период $T(h_1, \ldots, h_k)$ в общей ситуации зависит также от параметров семейства, причем $T(h_1^*, \ldots, h_k^*) = 2\pi$.

Уравнения в вариациях имеют $k + 1$ решений вида

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(h_1, \ldots, h_k, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(h_1, \ldots, h_k, t)}{\partial t} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(h_1, \ldots, h_k, t)}{\partial h_j}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(h_1, \ldots, h_k, t)}{\partial h_j}, \quad j = 1, \ldots, k \tag{2.3}$$

причем при $h_j = h_j^*$, $j = 1, \ldots, k$, решение (2.2) является 2π-периодическим.

Функции

$$\boldsymbol{\varphi}(h_1, \ldots, h_k, T/(2\pi)t), \quad \boldsymbol{\psi}(h_1, \ldots, h_k, T/(2\pi)t)$$

имеют не зависящий от $h_1, \ldots, h_k$ период, равный 2π. Поэтому их производные по h_j также будут 2π-периодическими функциями. Вычислим эти производные, помечая нижней звездочкой подстановку значений параметров $h_j = h_j^*$ $(j = 1, \ldots, k)$

$$\mathbf{p}_j(t) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial h_j}\right)_* + \frac{t}{2\pi}\left(\frac{\partial T}{\partial h_j}\right)_*\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_*, \quad \mathbf{q}_j(t) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial h_j}\right)_* + \frac{t}{2\pi}\left(\frac{\partial T}{\partial h_j}\right)_*\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_*$$

$$j = 1, \ldots, k$$

Отсюда найдем величины

$$(\partial\varphi/\partial h_j)_*, \quad (\partial\psi/\partial h_j)_*, \quad j = 1, \ldots, k \tag{2.4}$$

которые будут соответственно четными и нечетными функциями t.

Функции (2.4) являются решениями системы уравнений в вариациях. При условии $dT(h_1^*, \ldots, h_k^*) \neq 0$ из этих функций составим систему из 2π – периодических по t решений

$$\mathbf{p}_j(t)\left(\frac{\partial T}{\partial h_1}\right)_* - \mathbf{p}_1(t)\left(\frac{\partial T}{dh_j}\right)_*, \quad \mathbf{q}_j(t)\left(\frac{\partial T}{\partial h_1}\right)_* - \mathbf{q}_1(t)\left(\frac{\partial T}{dh_j}\right)_*, \quad j = 2, \ldots, k \tag{2.5}$$

Решения (2.5) симметричны относительно неподвижного множества $\mathbf{M}_1 = \{\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{v} : \delta\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ системы уравнений в вариациях. Вместе с решением (2.2), симметричным относительно множества $\mathbf{M}_2 = \{\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{v} : \delta\mathbf{u} = \mathbf{0}\}$, функции (2.5) образуют систему из k 2π-периодических решений. Кроме того, уравнения в вариациях имеют одно растущее решение вида (2.4), симметричное относительно множества $\mathbf{M}_1$. Все это означает, что система в вариациях имеет $k + 1$ нулевых характеристических показателей с k группами решений, таких, что после приведения этой системы к системе с постоянными коэффициентами, уравнения, отвечающие нулевым показателям, примут вид

$$\xi_j^{\cdot} = 0 \ (j = 1, \ldots, k-1), \quad \eta_1^{\cdot} = 0, \quad \zeta_1^{\cdot} = \eta_1 \tag{2.6}$$

При этом на множестве $\mathbf{M}_1$ имеем $\zeta_1 = 0$. Кроме того, имеем $k \geqslant l - n + 1$, ибо уравнения в вариациях имеют, по крайней мере, l-n простых нулевых характеристических показателей [12].

Из вида уравнений (2.6) вытекает, что по нулевым характеристическим показателям имеем грубый случай [3, 10, 11] в задаче о продолжении симметричного периодического движения по параметру в классе "обратимых" возмущений.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Пусть порождающая автономная обратимая система, полученная из (1.1) при $\mu = 0$, допускает 2π-периодическое движение. Тогда это движение принадлежит k-семейству от параметров $h_1, \ldots, h_k$ T-периодических движений. Если период $T(h_1, \ldots, h_k)$ зависит от $h_1, \ldots, h_k$, $T(h_1^*, \ldots, h_k^*) = 2\pi$, $dT(h_1^*, \ldots, h_k^*) \neq 0$, то уравнения в вариациях имеют, по крайней мере, $k + 1$ нулевых характеристических показателей с k группами решений ($k \geqslant l - n + 1$), и эти показатели не препятствуют продолжению 2π-периодического движения по параметру μ, если возмущения принадлежат классу "обратимых" возмущений.

Следствия. 1°. Если уравнения в вариациях имеют k 2π-периодических решений, то при достаточно малом $|\mu| \neq 0$ обратимая система (1.1) имеет 2π-периодическое движение, обращающееся при $\mu = 0$ в 2π-периодическое движение порождающей системы.

Доказательство. При выполнении указанных условий обязательно приходим к подсистеме вида (2.6). Остальные уравнения не содержат нулевых характеристических показателей.

Имеем грубый в смысле продолжения периодического движения по параметру в классе "обратимых" возмущений случай [3, 10, 11].

2°. Если в системе (1.1) имеем $n = 1$, то условие $dT(\mathbf{h}^*) \neq 0$ гарантирует продолжение 2π-периодического движения порождающей системы по параметру μ в классе "обратимых" возмущений.

Доказательство. В этом случае уравнения в вариациях имеют только нулевые характеристические показатели, приводятся к виду (2.6) и гарантируют продолжение симметричного периодического движения по параметру.

Замечания. 1°. Условие $dT \neq 0$ является естественным для нелинейных колебаний. Этим свойством не обладают колебания линейной системы.

2°. Отметим, что система уравнений в вариациях может иметь и другие, дополнительные к указанным в теореме 2, нулевые характеристические показатели.

Пример 1. Все движения в задаче двух тел являются плоскими. В плоскости движение описывается обратимой автономной системой четвертого порядка ($l = n = 2$). Эта система допускает двухпараметрическое семейство симметричных периодических (эллиптических) орбит, причем $dT \neq 0$. Следовательно, $k = 2$, уравнения в вариациях обратимы, имеют не менее $k + 1 = 3$ нулевых характеристических показателей, всего таких показателей 4.

3°. В примере 1 находим одну из содержательных задач, в которой существует нелокальное семейство периодических движений обратимой системы.

3. Система, близкая к консервативной системе с одной степенью свободы. Рассмотрим уравнение

$$z^{\cdot\cdot} + f(z) = \mu F(\mu, z, z^{\cdot}, t) \tag{3.1}$$

где функция $F(\mu, z, z^{\cdot}, t)$ является 2π-периодической по t. Задача о существовании в (3.1) колебательного движения, переходящего при $\mu = 0$ в одно из колебаний порождающего уравнения, исследована [2, 3], также как и аналогичная задача для вращательных движений [3]. При этом отдельно изучен [3] случай обратимого уравнения (3.1), удовлетворяющего условиям

$$f(-z) = -f(z), \quad F(\mu, -z, z^{\cdot}, -t) = -F(\mu, z, z^{\cdot}, t).$$

Ниже рассмотрим обратимое уравнение (3.1), в котором

$$F(\mu, z, -z^{\cdot}, -t) = F(\mu, z, z^{\cdot}, t) \tag{3.2}$$

При $\mu = 0$ имеем консервативную систему с одной степенью свободы, исчерпывающий анализ которой проводится методом фазовой плоскости. Предположим, что эта система допускает семейство колебательных движений (фиг. 1), которое, очевидно, можно параметризовать постоянной x интеграла энергии

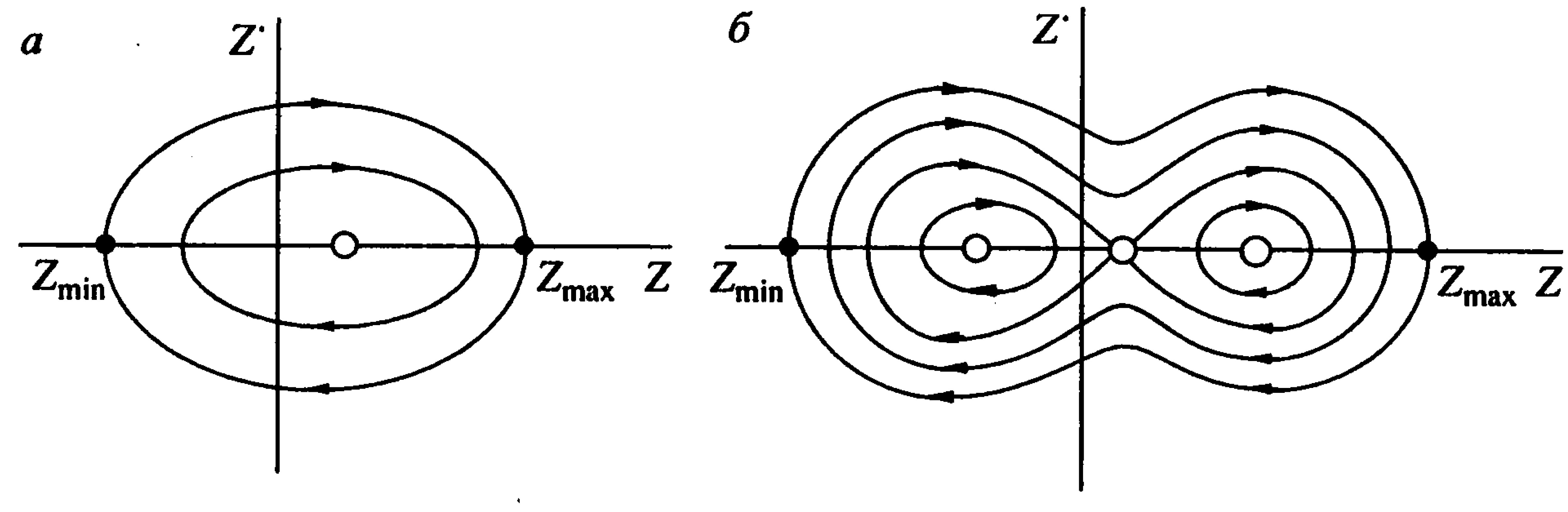
$$z^{\cdot 2} + V(z) = x(\text{const}), \qquad V(z) = 2\int f(z)dz$$

Период колебаний вычисляется по формуле

$$T(x) = 2\int\limits_{z_{\min}(x)}^{z_{\max}(x)} \frac{dz}{\sqrt{x - V(z)}}$$

где $z_{\min}(x)$, $z_{\max}(x)$ – соответственно меньший и больший корни уравнения $V(z) = x$.

Рассматриваемые колебания порождающего уравнения симметричны относительно оси абсцисс, а система (3.1), (3.2) обратима с неподвижным множеством $\{z, z^{\cdot} : z^{\cdot} = 0\}$. Поэтому из следствия 2° теоремы 1 выводим следующую теорему.



Фиг. 1

Теорема 2. Симметричное, $2\pi k$-периодическое ($k \in \mathbb{N}$) колебательное движение консервативной системы с одной степенью свободы, для которого

$$T(x^*) = 2\pi k / m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad dT(x^*) \neq 0$$

продолжается по параметру μ в системе (3.1), (3.2).

Пример 2. Плоские колебания и вращения динамического симметричного спутника на эллиптической орбите под действием гравитационных сил и светового давлений описываются обратимым уравнением [13]

$$z'' - \frac{2e\sin\nu}{1+e\cos\nu} z' = \frac{c(1+e)^2}{(1+e\cos\nu)^4} \sin z \,|\sin z|$$

(z – угол между осью динамической симметрии и неподвижной прямой в плоскости орбиты, e – эксцентрисистет орбиты, ν – истинная аномалия, c – параметр, характеризующий световое давление). При $e = 0$ (круговая орбита) имеем гладкую консервативную систему с одной степенью свободы

$$z'' = c\sin z \,|\sin z|$$

При $c > 0$ положения равновесия $\pm\pi$ устойчивы и окружены периодическими движениями, при $c < 0$ таким равновесием является начало координат. Период указанных колебаний зависит от постоянной x интеграла энергии, причем для равновесия $\pm\pi$ имеем $dT \neq 0$ [13]. Следовательно (теорема 2), все $2\pi k$-периодические колебания спутника "сохраняются" на слабоэллиптической ($e \ll 0$) орбите.

Отметим, что данный результат сформулирован ранее [13]. Однако при этом использовалась теорема [3], доставляющая условия существования периодических движений, симметричных относительно оси z'. Такими являются движения около нулевого положения равновесия ($c < 0$). Периодические движения около равновесий $\pm\pi$ симметричны относительно оси z, и к ним необходимо применять теорему 2.

4. Ляпуновское семейство периодических движений. Рассмотрим, по-прежнему, обратимую систему (1.1), которую теперь удобно записать в виде

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}^\cdot = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{U}_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mu\mathbf{U}_1(\mu,\mathbf{u},\mathbf{v},t) \\ &\mathbf{v}^\cdot = \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{V}_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mu\mathbf{V}_1(\mu,\mathbf{u},\mathbf{v},t), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^l, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad (l \geqslant n) \end{aligned} \tag{4.1}$$

($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – постоянные матрицы, $\mathbf{U}_0$, $\mathbf{V}_0$ – нелинейные члены).

Пусть а) характеристическое уравнение линейной части системы (4.1) при $\mu = 0$ имеет пару $\pm i\omega$ чисто мнимых корней, б) среди других корней этого уравнения нет равных $\pm ik\omega (k \in \mathbb{N})$, в) $\operatorname{rank} B = n$. Тогда [7] система (4.1) при $\mu = 0$ имеет

$(l-n)$-параметрическое многообразие положений равновесия, принадлежащее неподвижному множеству $\mathbf{M} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ и содержащее нулевое равновесие, и к каждой точке этого многообразия примыкает однопараметрическое семейство ляпуновских периодических движений.

Выясним вопрос о существовании в системе (4.1) 2π-периодического движения при $\mu \neq 0$. Для этого воспользуемся возможностью привести систему (4.1), при выполнении условия в, к виду [7]

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}^{\cdot} &= \mathbf{Py} + \boldsymbol{\Xi}_0(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mu\boldsymbol{\Xi}_1(\mu, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\
\mathbf{x}^{\cdot} &= \mathbf{Jy} + \mathbf{X}_0(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mu\mathbf{X}_1(\mu, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\
\mathbf{y}^{\cdot} &= \mathbf{x} + \mathbf{Y}_0(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mu\mathbf{Y}_1(\mu, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{l-n}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n
\end{aligned} \tag{4.2}$$

($\mathbf{P}$ – постоянная матрица, $\mathbf{J}$ – постоянная жорданова матрица).

Нерезонансный случай. Предположим, что жорданова матрица $\mathbf{J}$ не содержит собственных значений, близких к числу $-p^2$, $p \in \mathbb{N}$. В этому случае выполним замену: $(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\varepsilon^\sigma\boldsymbol{\xi}, \varepsilon\mathbf{x}, \varepsilon\mathbf{y})$, $0 < \sigma < 1$. В результате получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}^{\cdot} &= \varepsilon^{1-\sigma}\mathbf{Py} + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\Xi}_0(\varepsilon^\sigma\boldsymbol{\xi}, \varepsilon\mathbf{x}, \varepsilon\mathbf{y}) + \varepsilon^{-1}\mu\boldsymbol{\Xi}_1(\mu, \varepsilon^\sigma\boldsymbol{\xi}, \varepsilon\mathbf{x}, \varepsilon\mathbf{y}, t) \\
\mathbf{x}^{\cdot} &= \mathbf{Jy} + \varepsilon^{-1}\mathbf{X}_0(\varepsilon^\sigma\boldsymbol{\xi}, \varepsilon\mathbf{x}, \varepsilon\mathbf{y}) + \varepsilon^{-1}\mu\mathbf{X}_1(\mu, \varepsilon^\sigma\boldsymbol{\xi}, \varepsilon\mathbf{x}, \varepsilon\mathbf{y}, t) \\
\mathbf{y}^{\cdot} &= \mathbf{x} + \varepsilon^{-1}\mathbf{Y}_0(\varepsilon^\sigma\boldsymbol{\xi}, \varepsilon\mathbf{x}, \varepsilon\mathbf{y}) + \varepsilon^{-1}\mu\mathbf{Y}_1(\mu, \varepsilon^\sigma\boldsymbol{\xi}, \varepsilon\mathbf{x}, \varepsilon\mathbf{y}, t)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Положим $\varepsilon = \mu^{1/3}$. Тогда при $\mu = 0$ имеем линейную порождающую систему, которая не имеет корней характеристического уравнения, равных $\pm ip$. Следовательно [10, 11], данный случай относится к грубому, и при достаточно малых $|\mu| \neq 0$ система (4.2) имеет единственное 2π-периодическое движение. В системе (4.3) "амплитуда" этих движений имеет порядок $\varepsilon^{-1}\mu$. Поэтому в системе (4.2) периодическое движение имеет "амплитуду" порядка μ.

Теорема 3. В нерезонансном случае система (4.1) при достаточно малом $|\mu| \neq 0$ допускает единственное 2π-периодическое движение, причем оно имеет "амплитуду" порядка μ.

Резонансный случай. Предположим, что

$$\omega = p + a\mu^\sigma, \quad \sigma \geqslant 2/3 \quad (a = \mathrm{const}) \tag{4.4}$$

В этом случае выделим в системе (4.2) переменные x_1, y_1, отвечающие чисто мнимым корням. Тогда на ляпуновском семействе все переменные, кроме $\boldsymbol{\xi}, x_1, y_1$, можно с рассматриваемой ниже точностью полагать равными нулю. Далее перейдем от переменных x_1, y_1 к комплексно-сопряженным переменным

$$z = x_1 + iy_1, \quad \bar{z} = x_1 - iy_1$$

и приведем систему в переменных $\boldsymbol{\xi}, z, \bar{z}$ к нормальной форме до членов третьего порядка включительно. Тогда

$$z^{\cdot} = iz[\omega + \omega_1(\boldsymbol{\xi}) + Az\bar{z}] + \ldots$$

(A – действительная постоянная) и частота Ω периодического движения вычисляется по формуле

$$\Omega = \omega + \omega_1(\boldsymbol{\xi}) + Az^\circ\bar{z}^\circ + \ldots, \quad \omega_1(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{l-n} C_j\xi_j + \sum_{j,k=1}^{l-n} C_{jk}\xi_j\xi_k$$

(C_j, C_{jk} – действительные постоянные, z° и $\bar{z}^\circ$ – начальные значения для z и $\bar{z}$

соответственно). Ляпуновское семейство примыкает к равновесию $\xi = \xi^*$, $z = \bar{z} = 0$. Предположим, что $\Omega(\xi^*, |z^\circ|) = p \in \mathbb{N}$. Тогда при фиксированном ξ^* имеем $d\Omega(\xi^*, |z^\circ|) \neq 0$, если только $A \neq 0$. Поэтому из теоремы 1 следует

Теорема 4. Если при $\mu = 0$ система (4.1) удовлетворяет приведенным выше требованиям *а*, *б*, *в* и, кроме того, выполнено условие резонансности (4.4), то в системе (4.1) при достаточно малом $|\mu| \neq 0$ почти всегда ($A \neq 0$) существует 2π-периодическое движение.

5. Система второго порядка. Резонансный случай. Из теоремы 3 следует, что в нерезонансном случае "амплитуда" периодического движения имеет порядок малого параметра μ. Выясним, какова "амплитуда" в резонансном случае. Для этого, не ограничивая общности, рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{aligned} x^\cdot &= -\omega y + X(x, y) + \mu X_1(\mu, x, y, t) \\ y^\cdot &= \omega x + Y(x, y) + \mu Y_1(\mu, x, y, t) \end{aligned} \tag{5.1}$$

В этом случае нулевое равновесие порождающей системы будет центром.

Выполним замену: $(x, y) \to (\varepsilon x, \varepsilon y)$. Тогда получим

$$\begin{aligned} x^\cdot &= -\omega y + \varepsilon^{-1} X(\varepsilon x, \varepsilon y) + \mu\varepsilon^{-1} X_1(\mu, \varepsilon x, \varepsilon y, t) \\ y^\cdot &= \omega x + \varepsilon^{-1} Y(\varepsilon x, \varepsilon y) + \mu\varepsilon^{-1} X_1(\mu, \varepsilon x, \varepsilon y, t) \end{aligned} \tag{5.2}$$

причем в общем случае имеем

$$X(\varepsilon x, \varepsilon y) = \varepsilon^3 X_0(\varepsilon, x, y), \quad Y(\varepsilon x, \varepsilon y) = \varepsilon^3 Y_0(\varepsilon, x, y)$$

Положим $\varepsilon = \mu^{1/3}$ и запишем систему (5.2) в полярных координатах r, θ ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$). Получим систему

$$\begin{aligned} r^\cdot &= \varepsilon^2[(X_0 + X_1)\cos\theta + (Y_0 + Y_1)\sin\theta] \\ \theta^\cdot &= p + \varepsilon^2 r^{-1}[-(X_0 + X_1)\sin\theta + (Y_0 + Y_1)\cos\theta + ar\varepsilon^{3\sigma-2}] \end{aligned} \tag{5.3}$$

в которой в силу обратимости порождающей системы, полученной из (5.1) при $\mu = 0$, выполняются условия

$$X_0(0, r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + Y_0(0, r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta \equiv 0$$

$$\theta(r, \theta) \equiv -X_0(0, r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta + Y_0(0, r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta = Ar^3 \quad (A = \text{const})$$

Система (5.3) зависит от параметра ε. При $\varepsilon = 0$ (5.3) допускает симметричное $2\pi/p$-периодическое движение вида

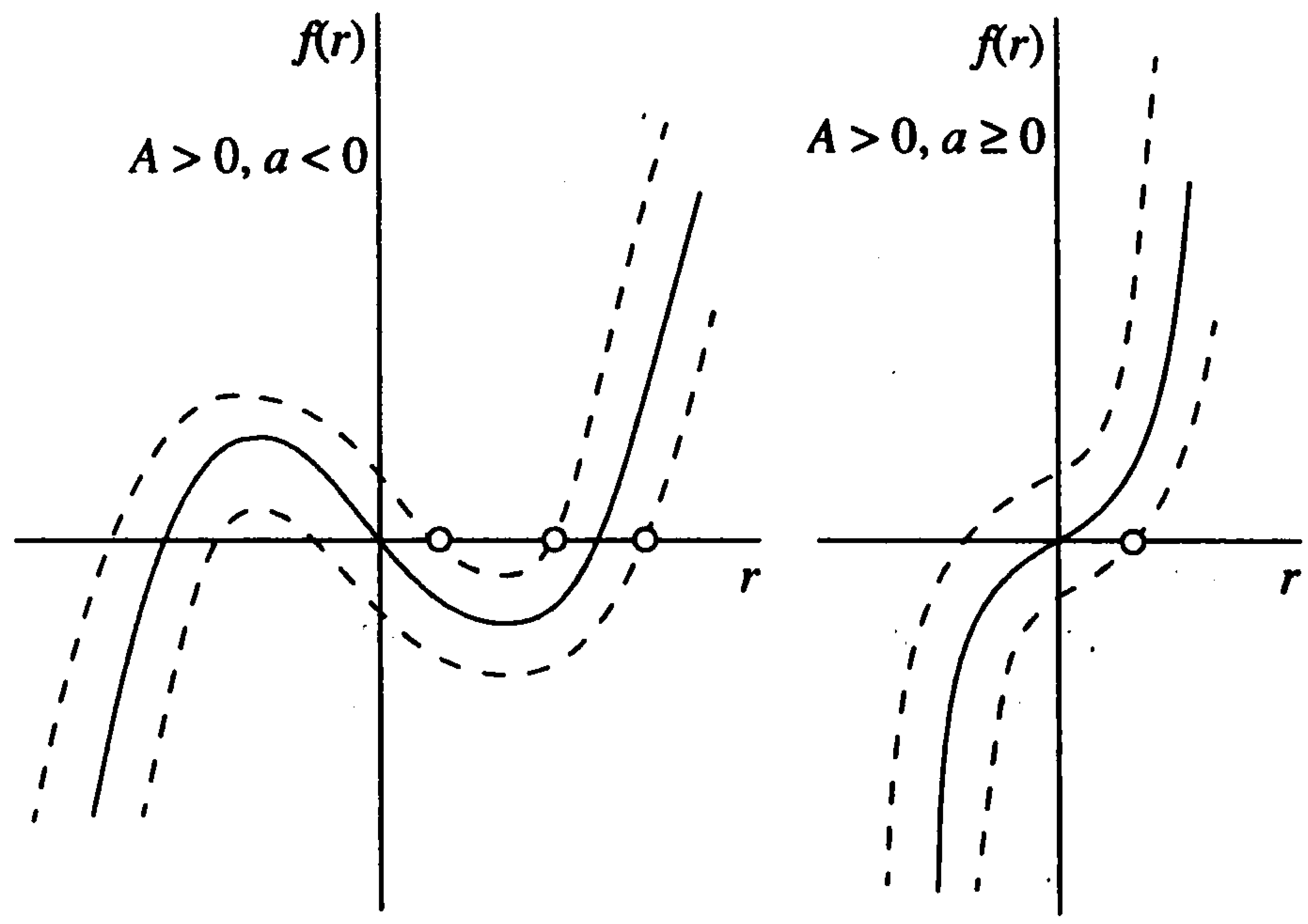
$$r = r^* \text{ (const)}, \quad \theta = \theta_*(t); \quad \theta_*(t) = \theta_*^+(t) = pt \quad \text{или} \quad \theta_*(t) = \theta_*^-(t) = pt + \pi$$

Пусть

$$\begin{aligned} X_*(t) &\equiv X_1(0, 0, 0, t) = a_0/2 + a_1\cos t + b_1\sin t + a_2\cos 2t + b_2\sin 2t + \ldots \\ Y_*(t) &\equiv Y_1(0, 0, 0, t) = a_0^*/2 + a_1^*\cos t + b_1^*\sin t + a_2^*\cos 2t + b_2^*\sin 2t + \ldots \end{aligned} \tag{5.4}$$

Рассмотрим два случая.

1°. *"Обратимые" возмущения.* В этом случае в формулах (5.4) разложение функции $X_*(t)$ содержит только нечетные гармоники, а функции $Y_*(t)$ – только четные гармоники.



Фиг. 2

Согласно полученным ранее общим результатам [3] вопрос о существовании в обратимой системе (5.3) при $\varepsilon \neq 0$ 2π-периодического движения решается амплитудным уравнением

$$\int\limits_0^\pi [\theta(r^*, \theta_*(t)) + kar^* - X_*(t)\sin\theta_*(t) + Y_*(t)\cos\theta_*(t)]dt = 0$$

($k = 1$ при $\sigma = 2/3$ и $k = 0$ при $\sigma > 2/3$). Выпишем это уравнение в явном виде

$$f(r^*) \pm (a_p^* - b_p)/2 = 0, \quad f(r^*) \equiv Ar^{*3} + kar^* \qquad (5.5)$$

(знак перед скобкой соответствует знаку в обозначении функции $\theta_*^{\pm}(t)$).

Можно видеть (фиг. 2), что в невырожденном случае, когда $A(a_p^* - b_p) \neq 0$, всегда одно из уравнений (5.5) имеет один простой положительный корень. Число таких корней у каждого из уравнений равно одному или двум, а общее число корней равно одному или трем. Каждому корню отвечает 2π-периодическое решение системы (5.3) с "амплитудой" порядка единицы. Учитывая масштабирование, выполненное при переходе от системы (5.2) к (5.3), выводим существование в (5.1) 2π-периодических движений с "амплитудой" порядка $\mu^{1/3}$.

Теорема 5. В резонансном случае (4.4) невырожденная обратимая система (5.1) при достаточно малом $|\mu| \neq 0$ допускает s симметричных, ($s = 1$ или $s = 3$), 2π-периодических движений вида

$$x = \mu^{1/3} r^* \cos pt + o(\mu^{1/3}), \quad y = \mu^{1/3} r^* \sin pt + o(\mu^{1/3})$$

(s – число простых положительных корней r^* уравнений (5.5)).

Замечание. В случае $A = 0$ выберем $\varepsilon = \mu^{1/5}$ и учтем члены пятого порядка в функциях X и Y. В результате выведем существование 2π-периодических движений с "амплитудой" порядка $\mu^{1/5}$ и т.д.

2°. *Возмущения общего вида.* В этом случае имеем [10] систему из двух амплитудных уравнений

$$\int_0^{2\pi} [X_*(t)\cos\theta_*(t) + Y_*(t)\sin\theta_*(t)]dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} [\theta(r^*, \theta_*(t)) + kar^* - X_*(t)\sin\theta_*(t) + Y_*(t)\cos\theta_*(t)]dt = 0$$

где

$$r = r^*(\text{const}), \quad \theta = \theta_*(t) = pt + \theta^\circ \quad (\theta^\circ = \text{const}) \tag{5.6}$$

$2\pi/p$-периодическое решение порождающей системы, полученной из (5.3) при $\varepsilon = 0$. Подстановка явных выражений для X_*, Y_*, θ приводит к системе

$$\begin{gathered}(a_p + b_p^*)\cos\theta^\circ + (a_p^* - b_p)\sin\theta^\circ = 0 \\ Ar^{*3} + kar^* + (a_p^* - b_p)\cos\theta^\circ - (a_p + b_p^*)\sin\theta^\circ = 0\end{gathered} \tag{5.7}$$

Можно видеть, что в невырожденном случае

$$A[(a_p + b_p^*)^2 + (a_p^* - b_p)^2] \neq 0 \tag{5.8}$$

система (5.7) всегда имеет, по крайней мере, одно простое решение (r^*, θ°), и этому решению отвечает [10] 2π-периодическое движение системы (5.1). В частности, при $a_p + b_p^* = 0$ имеем $\theta^\circ = 0$ или $\theta^\circ = \pi$, и это решение будет близким к симметричному.

Теорема 6. Невырожденная резонансная система (4.4), (5.1), (5.8) при достаточно малом $|\mu| \neq 0$ допускает s 2π-периодических решений вида

$$x = \mu^{1/3} r^* \cos(pt + \theta^\circ) + o(\mu^{1/3}), \quad y = \mu^{1/3} r^* \sin(pt + \theta^\circ) + o(\mu^{1/3})$$

(s – число простых корней (r^*, θ°) системы (5.7), для которых $r^* > 0$).

Замечания. 1°. В аналитическом случае порождающая система в (5.1) совпадает с системой Ляпунова и результат теоремы 6 известен [2].

2°. Пример 2 представляет собой содержательную гладкую задачу; здесь теория для системы Ляпунова неприменима.

6. Система произвольного порядка. Возмущения общего вида. Предположим для простоты, что в системе (4.2) выполнено условие $\det J \neq 0$. Тогда (4.2) приводится к виду, в котором $\mathbf{P} = 0$. Для этого достаточно вместо каждой из переменных ξ_s выбрать необходимую линейную комбинацию переменных $\xi_1, \ldots \xi_{l-n}, x_1, \ldots, x_n$.

При $\mu = 0$ в (4.2) имеем обратимую порождающую систему, которая допускает единственное семейство положений равновесия

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^*(\text{const}), \quad \mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

Заменим в системе (4.2) $\boldsymbol{\xi}$ на $\boldsymbol{\xi}^* + \boldsymbol{\xi}$ и в полученной системе изменим масштаб: $(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\varepsilon\boldsymbol{\xi}, \varepsilon\mathbf{x}, \varepsilon\mathbf{y})$. Получим

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}^{\cdot} &= \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\Xi}^*(\varepsilon\boldsymbol{\xi}, \varepsilon\mathbf{x}, \varepsilon\mathbf{y}) + \mu\varepsilon^{-1}\boldsymbol{\Xi}_1(\mu, \boldsymbol{\xi}^* + \varepsilon\boldsymbol{\xi}, \varepsilon\mathbf{x}, \varepsilon\mathbf{y}, t) \\ \mathbf{x}^{\cdot} &= [\mathbf{J} + \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}^*)]\mathbf{y} + \varepsilon^{-1}\mathbf{X}^*(\varepsilon\boldsymbol{\xi}, \varepsilon\mathbf{x}, \varepsilon\mathbf{y}) + \mu\varepsilon^{-1}\mathbf{X}_1(\mu, \boldsymbol{\xi}^* + \varepsilon\boldsymbol{\xi}, \varepsilon\mathbf{x}, \varepsilon\mathbf{y}, t) \\ \mathbf{y}^{\cdot} &= [\mathbf{I} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}^*)]\mathbf{x} + \varepsilon^{-1}\mathbf{Y}^*(\varepsilon\boldsymbol{\xi}, \varepsilon\mathbf{x}, \varepsilon\mathbf{y}) + \mu\varepsilon^{-1}\mathbf{Y}_1(\mu, \boldsymbol{\xi}^* + \varepsilon\boldsymbol{\xi}, \varepsilon\mathbf{x}, \varepsilon\mathbf{y}, t)\end{aligned} \tag{6.1}$$

($\boldsymbol{\Xi}^*$, $\mathbf{X}^*$, $\mathbf{Y}^*$ – нелинейные функции, $\boldsymbol{\Xi}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{I}$ – единичная матрица).

Рассмотрим сначала нерезонансный случай, когда матрица $\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}^*)=[\mathbf{J}+\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}^*)][\mathbf{I}+$ $+\mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}^*)]$ не имеет собственных значений, близких к числу $-p^2(p\in\mathbb{N})$. Тогда, полагая $\varepsilon=|\mu|^{1/2}$, выводим существование в (6.1) при $\mu=0$ 2π-периодического движения: $\boldsymbol{\xi}=\text{const}$, $\mathbf{x}=\mathbf{y}=\mathbf{0}$. Поэтому при $|\mu|\neq 0$ система (6.1) также имеет 2π-периодиодическое движение, если амплитудное уравнение

$$\int_0^{2\pi}\Xi_1(0,\ \boldsymbol{\xi}^*,\ 0,\ 0,\ t)dt=\mathbf{0} \tag{6.2}$$

имеет простой корень $\boldsymbol{\xi}^*$.

Теорема 7. Пусть $\boldsymbol{\xi}^*$ – такой простой корень амплитудного уравнения (6.2), что матрица $\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}^*)$ не имеет собственных значений, близких к числу $-p^2(p\in\mathbb{N})$. Тогда в окрестности положения равновесия $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^*$, $\mathbf{x}=\mathbf{y}=\mathbf{0}$ системы (4.2) существует единственное 2π-периодическое движение, и оно имеет "амплитуду" порядка μ.

Перейдем к исследованию резонансного случая (4.4). Для этого, предполагая, по-прежнему, $\det\mathbf{J}\neq 0$, положим, в системе (4.2) $\mu=0$. Далее, выделим в полученной системе пару переменных $(x,\ y)$, отвечающую резонансной частоте, и выпишем в явном виде представляющие интерес квадратичные члены. В результате, при учете свойства обратимости порождающей системы, имеем

$$\begin{aligned}
&x^{\cdot}=-\omega y+x\sum_{s=1}^{n-1}a_s^*\zeta_s+y\sum_{s=1}^{n-1}b_s^*\eta_s+\ldots\\
&y^{\cdot}=\omega x+x\sum_{s=1}^{n-1}a_s^{**}\zeta_s+y\sum_{s=1}^{n-1}b_s^{**}\eta_s+\ldots\\
&\boldsymbol{\xi}^{\cdot}=\mathbf{a}xy+\ldots,\quad \boldsymbol{\eta}^{\cdot}=\mathbf{J}_{n-1}\boldsymbol{\xi}+\mathbf{b}xy+\ldots,\quad \boldsymbol{\zeta}^{\cdot}=\mathbf{I}_{n-1}\boldsymbol{\eta}+\ldots,\quad \boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^{n-1},\ \boldsymbol{\zeta}\in\mathbb{R}^{n-1}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Здесь a_s^*, b_s^*, a_s^{**}, b_s^{**} – действительные постоянные, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – действительные векторы размерности соответственно $(l-n)$ и $(n-1)$, $\mathbf{J}_{n-1}$ – жорданова $(n-1)$-матрица, $\mathbf{I}_{n-1}$ – единичная $(n-1)$-матрица.

Лемма. Если число $-4\omega^2$ не является собственным значением матрицы $\mathbf{J}_{n-1}$, то система (6.3) приводится к виду, в котором все коэффициенты a_s^*, b_s^*, a_s^{**}, b_s^{**} равны нулю.

Доказательство проводится непосредственным построением полиномиального преобразования с неопределенными постоянными коэффициентами. Условие равенства нулю указанных в лемме коэффициентов приводит к системе линейных уравнений для определения коэффициентов преобразования. Последняя совместна, если ее определитель $\det(\mathbf{J}_{n-1}+$ $+4\omega^2\mathbf{I}_{n-1})\neq 0$.

Вернемся к рассмотрению резонансного случая (4.4) и запишем систему (4.2) в виде

$$\begin{aligned}
&x^{\cdot}=-\omega y+X_0(x,\ y,\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\zeta})+\mu X_1(\mu,\ x,\ y,\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\zeta},\ t)\\
&y^{\cdot}=\omega y+Y_0(x,\ y,\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\zeta})+\mu Y_1(\mu,\ x,\ y,\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\zeta},\ t)\\
&\boldsymbol{\xi}^{\cdot}=\Xi_0(x,\ y,\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\zeta})+\mu\Xi_1(\mu,\ x,\ y,\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\zeta},\ t)\\
&\boldsymbol{\eta}^{\cdot}=\mathbf{J}_{n-1}\boldsymbol{\zeta}+\mathbf{H}_0(x,\ y,\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\zeta})+\mu\mathbf{H}_1(\mu,\ x,\ y,\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\zeta},\ t)\\
&\boldsymbol{\zeta}^{\cdot}=\mathbf{I}_{n-1}\dot{\boldsymbol{\eta}}+\mathbf{Z}_0(x,\ y,\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\zeta})+\mu Z_1(\mu,\ x,\ y,\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\zeta},\ t)
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Будем считать, что в этой системе уже проведено преобразование, гарантированное леммой. Кроме того, предполагаем, что в системе (6.4) переменные x, y преобразованы по формулам, обеспечивающим нормализацию следующей системы второго порядка:

$$x^{\cdot} = -\omega y + X_0(x,\ y,\ \mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0})$$

$$y^{\cdot} = \omega x + Y_0(x,\ y,\ \mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0})$$

до кубических членов включительно. Теперь перейдем в окрестность равновесия

$$x = y = 0,\quad \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^*,\quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$$

и изменим масштаб заменой $(x, y, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})$ на $(\varepsilon x,\ \varepsilon y,\ \boldsymbol{\xi}^* + \varepsilon^2\boldsymbol{\xi},\ \varepsilon^{5/3}\boldsymbol{\eta},\ \varepsilon^{5/3}\boldsymbol{\zeta})$, $\varepsilon^3 = \mu$. Наконец, используем вместо x и y полярные координаты r и θ.

В результате всех преобразований получим следующую систему:

$$r^{\cdot} = \varepsilon^2[(X_0^* + X_1^*)\cos\theta + (Y_0^* + Y_1^*)\sin\theta]$$

$$\theta^{\cdot} = p + \varepsilon^2 r^{-1}[-(X_0^* + X_1^*)\sin\theta + (Y_0^* + Y_1^*)\cos\theta + ar\varepsilon^{3\sigma-2}]$$

$$\boldsymbol{\xi}^{\cdot} = \varepsilon^{4/3}\boldsymbol{\Xi}_0^* + \varepsilon\boldsymbol{\Xi}_1(\varepsilon^3,\ \varepsilon r\cos\theta,\ \varepsilon r\sin\theta,\ \boldsymbol{\xi}^* + \varepsilon^2\boldsymbol{\xi},\ \varepsilon^{5/3}\boldsymbol{\eta},\ \varepsilon^{5/3}\boldsymbol{\zeta},\ t) \tag{6.5}$$

$$\boldsymbol{\eta}^{\cdot} = \mathbf{J}_{n-1}\boldsymbol{\zeta} + \varepsilon\mathbf{H}_0^* + \varepsilon^{4/3}\mathbf{H}_1(\varepsilon^3,\ \varepsilon r\cos\theta,\ \varepsilon r\sin\theta,\ \boldsymbol{\xi}^* + \varepsilon^2\boldsymbol{\xi},\ \varepsilon^{5/3}\boldsymbol{\eta},\ \varepsilon^{5/3}\boldsymbol{\zeta},\ t)$$

$$\boldsymbol{\zeta}^{\cdot} = \mathbf{I}_{n-1}\boldsymbol{\zeta} + \varepsilon\mathbf{Z}_0^* + \varepsilon^{4/3}\mathbf{Z}_1(\varepsilon^3,\ \varepsilon r\cos\theta,\ \varepsilon r\sin\theta,\ \boldsymbol{\xi}^* + \varepsilon^2\boldsymbol{\xi},\ \varepsilon^{5/3}\boldsymbol{\eta},\ \varepsilon^{5/3}\boldsymbol{\zeta},\ t)$$

Здесь

$$X_0(\varepsilon x,\ \varepsilon y,\ \boldsymbol{\xi}^* + \varepsilon^2\boldsymbol{\xi},\ \varepsilon^{5/3}\boldsymbol{\eta},\ \varepsilon^{5/3}\boldsymbol{\zeta}) = \varepsilon^2 X_0^*(\varepsilon,\ \boldsymbol{\xi}^*,\ x,\ y,\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\zeta})$$

$$Y_0(\varepsilon x,\ \varepsilon y,\ \boldsymbol{\xi}^* + \varepsilon^2\boldsymbol{\xi},\ \varepsilon^{5/3}\boldsymbol{\eta},\ \varepsilon^{5/3}\boldsymbol{\zeta}) = \varepsilon^2 Y_0^*(\varepsilon,\ \boldsymbol{\xi}^*,\ x,\ y,\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\zeta})$$

$$X_1^* = X_1(\varepsilon^3,\ \varepsilon x,\ \varepsilon y,\ \boldsymbol{\xi}^* + \varepsilon^2\boldsymbol{\xi},\ \varepsilon^{5/3}\boldsymbol{\eta},\ \varepsilon^{5/3}\boldsymbol{\zeta},\ t)$$

$$Y_1^* = Y_1(\varepsilon^3,\ \varepsilon x,\ \varepsilon y,\ \boldsymbol{\xi}^* + \varepsilon^2\boldsymbol{\xi},\ \varepsilon^{5/3}\boldsymbol{\eta},\ \varepsilon^{5/3}\boldsymbol{\zeta},\ t)$$

функции $\boldsymbol{\Xi}_0^*$, $\mathbf{H}_0^*$, $\mathbf{Z}_0^*$ обращаются в нуль при $\varepsilon = 0$, а разложения функций X_1^*, Y_1^* при $\varepsilon = 0$ даются формулами (5.4) с той лишь разницей, что теперь коэффициенты разложений зависят от $\boldsymbol{\xi}^*$. Кроме того, при $\varepsilon = 0$ имеем

$$X_0^*\cos\theta + Y_0^*\sin\theta \equiv 0,\quad -X_0^*\sin\theta + Y_0^*\cos\theta = Ar^3\ (A = \text{const})$$

При $\varepsilon = 0$ система (6.5) допускает $2\pi/p$-периодическое движение

$$r = r^*(\text{const}),\quad \theta = \theta_*(t) = pt + \theta^0(\theta^0 = \text{const}),\quad \boldsymbol{\xi} = \text{const}$$

Для решения вопроса о существовании 2π-периодического движения при $\varepsilon \neq 0$ необходимо составить систему амплитудных уравнений [10]. Эти уравнения для переменных r и θ такие же, как и в системе (5.7), а для переменной $\boldsymbol{\xi}$ получим

$$\int_0^{2\pi} \boldsymbol{\Xi}_1(0,\ 0,\ 0,\ \boldsymbol{\xi}^*,\ \mathbf{0},\ \mathbf{0},\ t)dt = \mathbf{0} \tag{6.6}$$

Теорема 8. Невырожденная резонансная система (4.4), (5.8), (6.4) при достаточно малом $|\mu| \neq 0$ допускает s 2π-периодических движений вида

$$x = \mu^{1/3} r^* \cos\theta_*(t) + o(\mu^{1/3}), \quad y = \mu^{1/3} r^* \sin\theta_*(t) + o(\mu^{1/3})$$

$$\xi = \xi^* + \mu \int_0^t \Xi_1^*(\xi^*, t)dt + o(\mu), \quad \eta = O(\mu), \quad \zeta = O(\mu)$$

(s – число простых корней (r^*, θ^0, ξ^*) системы (5.7), (6.6), для которых $r^* > 0$).

7. "Внутренний" резонанс третьего порядка. Выше при изучении периодических движений системы (4.1) из рассмотрения исключены случаи наличия "внутреннего" двухчастотного резонанса, когда характеристическое уравнение вместе с парой чисто мнимых корней $\pm i\omega$ имеет также корни $\pm ik\omega (k \in \mathbb{N})$. Обратимся к этим случаям, учитывая, что в нерезонансном случае задача решается теоремой 3. При этом ограничимся только системой четвертого порядка, отвечающей указанным чисто мнимым корням.

При "внутреннем" резонансе третьего порядка система в комплексно-сопряженных $z, \bar{z}$ приобретает вид

$$\begin{aligned} \dot{z_1} &= i\omega_1 z_1 + iB_1 \bar{z}_2^2 + Z_{10}(z, \bar{z}) + \mu Z_{11}(\mu, z, \bar{z}, t) \\ \dot{z_2} &= -i\omega_2 z_2 + iB_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 + Z_{20}(z, \bar{z}) + \mu Z_{21}(\mu, z, \bar{z}, t) \end{aligned} \tag{7.1}$$

Здесь порождающая система уже приведена к нормальной форме до второго порядка включительно: в системе (7.1) B_1, B_2 – действительные постоянные коэффициенты, а функции Z_{10}, Z_{20} имеют порядок не ниже третьего относительно z, $\bar{z}$. Кроме того, комплексно-сопряженная группа уравнений опущена, а частота ω_1 совпадает с $2\omega_2$ с точностью до малого параметра.

Изменим в системе (7.1) масштаб: $(z, \bar{z}) \to (\varepsilon z, \varepsilon\bar{z})$, $\varepsilon^2 = |\mu|$. Далее воспользуемся полярными координатами r_s, θ_s:

$$z_s = \sqrt{r_s} \exp(i\theta_s), \quad \bar{z}_s = \sqrt{r_s} \exp(-i\theta_s), \quad s = 1, 2$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \dot{r_\alpha} &= 2\varepsilon B_\alpha r_1^{1/2} r_2 \sin\theta + \varepsilon r_\alpha^{1/2} (Z_\alpha^{*-i\theta_\alpha} + \bar{Z}_\alpha^{*i\theta_\alpha}) \\ \dot{\theta_1} &= \omega_1 + \varepsilon B_1 r_1^{-1/2} r_2 \cos\theta + \frac{\varepsilon}{2ir_1^{1/2}} (Z_1^* e^{-i\theta_1} - \bar{Z}_1^* e^{i\theta_1}) \\ \dot{\theta_2} &= -\omega_2 + \varepsilon B_2 r_1^{1/2} \cos\theta + \frac{\varepsilon}{2ir_2^{1/2}} (Z_2^* e^{-i\theta_2} - \bar{Z}_2^* e^{i\theta 2}) \end{aligned} \tag{7.2}$$

$$Z_\alpha^* = \varepsilon Z_{\alpha 0}^* + Z_{\alpha 1}^*, \quad Z_{\alpha 0}^* = \varepsilon^{-3} Z_{\alpha 0}(\varepsilon\sqrt{r} \exp(i\theta), \quad \varepsilon\sqrt{r} \exp(-i\theta))$$

$$Z_{\alpha 1}^* = Z_{\alpha 1}(\mu, \varepsilon\sqrt{r} \exp(i\theta), \varepsilon\sqrt{r} \exp(-i\theta), t), \quad \alpha = 1, 2; \ \theta = \theta_1 + 2\theta_2$$

Кроме того, если в системе (7.1) имеем

$$\begin{aligned} & Z_{s1}(0, 0, 0, t) = X_{s1}^*(t) + iY_{s1}^*(t) \\ & X_{s1}^*(t) \equiv a_{0s}/2 + a_{1s} \cos t + b_{1s} \sin t + a_{2s} \cos 2t + b_{2s} \sin 2t + \ldots \\ & Y_{s1}^*(t) \equiv a_{0s}^*/2 + a_{1s}^* \cos t + b_{1s}^* \sin t + a_{2s}^* \cos 2t + b_{2s}^* \sin 2t + \ldots \end{aligned} \tag{7.3}$$

то в системе (7.2) получим

$$Z_{s1}^{**}(t)e^{-i\theta_s} + \overline{Z}_{s1}^{**}e^{i\theta_s} = 2[X_{s1}^*(t)\cos\theta_s + Y_{s1}^*(t)\sin\theta_s]$$

$$Z_{s1}^{**}(t)e^{-i\theta_s} - \overline{Z}_{s1}^{**}e^{i\theta_s} = 2i[-X_{s1}^*(t)\sin\theta_s + Y_{s1}(t)\cos\theta_s], \quad s=1,\ 2$$

$$Z_{s1}^{**}(t) = Z_{s1}^*(0,\ 0,\ 0,\ t) = Z_{s1}(0,\ 0,\ 0,\ t)$$

Рассмотрим резонансный случай, когда

$$\omega_1 = p+\alpha_1\mu^\sigma, \quad \omega_2 = p/2+\alpha_2\mu^\sigma, \quad p\in\mathbb{N}, \ \alpha_{1,2}=\text{const}, \quad \sigma\geqslant 1 \tag{7.4}$$

Здесь при $\varepsilon = 0$ система (7.2) имеет $4\pi/p$-периодическое решение

$$r_\alpha = r_\alpha^\circ, \quad \alpha=1,2; \quad \theta_1 = pt+\theta_1^\circ, \quad \theta_2 = -pt/2+\theta_2^\circ \tag{7.5}$$

зависящее от четырех произвольных постоянных r_α°, θ_α°. При $p=2q$, $q\in\mathbb{N}$, решение будет $2\pi/q$-периодическим. В случае $\theta_s^\circ=0$ или $\theta_s^\circ=\pi$ указанное решение симметрично относительно неподвижного множества обратимой порождающей системы.

Согласно предыдущим результатам [10] простые корни системы амплитудных уравнений гарантируют существование периодического движения в системе (7.1) при достаточно малом $|\mu|\neq 0$. Составим эти уравнения в каждом из рассматриваемых случаев.

1°. *"Обратимые" возмущения*, $p=2q$, $q\in\mathbb{N}$

$$\begin{gathered} F\equiv 2B_1r_2^\circ\cos\theta^\circ+(a_{p1}^*-b_{p1})\cos\theta_1^\circ+2ka_1\sqrt{r_1^\circ}=0 \\ 2B_2\sqrt{r_1^\circ r_2^\circ}\cos\theta^\circ+(a_{q2}^*+b_{q2})\cos\theta_2^\circ+2ka_2\sqrt{r_2^\circ}=0 \end{gathered} \tag{7.6}$$

2°. *"Обратимые" возмущения*, $p=2q-1$, $q\in\mathbb{N}$

$$F=0, \quad B_2\sqrt{r_1^\circ}\cos\theta^\circ+ka_2=0 \tag{7.7}$$

3°. *Возмущения общего вида*, $p=2q$, $q\in\mathbb{N}$

$$\begin{gathered} F_1\equiv 2B_1r_2^\circ\sin\theta^\circ+(a_{p1}+b_{p1}^*)\cos\theta_1^\circ+(a_{p1}^*-b_{p1})\sin\theta_1^\circ=0 \\ F_2\equiv 2B_1r_2^\circ\cos\theta^\circ+(a_{p1}^*-b_{p1})\cos\theta_1^\circ-(a_{p1}+b_{p1}^*)\sin\theta_1^\circ+2ka_1\sqrt{r_1^\circ}=0 \\ 2B_2\sqrt{r_1^\circ r_2^\circ}\sin\theta^\circ+(a_{q2}-b_{q2}^*)\cos\theta_2^\circ+(a_{q2}^*+b_{q2})\sin\theta_2^\circ=0 \\ 2B_2\sqrt{r_1^\circ r_2^\circ}\cos\theta^\circ+(a_{q2}^*+b_{q2})\cos\theta_2^\circ-(a_{q2}-b_{q2}^*)\sin\theta_2^\circ+2ka_2\sqrt{r_2^\circ}=0 \end{gathered} \tag{7.8}$$

4°. *Возмущения общего вида*, $p=2q-1$, $q\in\mathbb{N}$

$$F_1=0, \quad F_2=0, \quad B_2\sqrt{r_1^\circ r_2^\circ}\sin\theta^\circ=0, \quad B_2\sqrt{r_1^\circ}\cos\theta^\circ+ka_2=0 \tag{7.9}$$

В приведенных формулах (7.6) – (7.9) следует положить $k = 1$ при $\sigma = 1/2$ и $k = 0$ при $\sigma > 1/2$. Кроме того, $\theta^\circ=\theta_1^\circ+2\theta_2^\circ$, а в системах (7.6) и (7.7) имеем $\theta_s^\circ=0$ или $\theta_s^\circ=\pi$.

Справедлива

Теорема 9. Каждому простому корню любой из систем амплитудных уравнений (7.6) – (7.9) отвечает периодическое решение

$$z_1=\mu^{1/2}\sqrt{r_1^\circ}\exp\{i(pt+\theta_1^\circ)\}+o(\mu^{1/2}), \quad z_2=\mu^{1/2}\sqrt{r_2^\circ}\exp\{i(-pt/2+\theta_2^\circ)\}+o(\mu^{1/2}) \tag{7.10}$$

системы (7.1). При этом в случаях (7.6), (7.7) имеем симметричное периодическое движение обратимой системы, в случаях (7.6), (7.8) решение имеет период, равный 2π, а в случаях (7.7), (7.9) период равен 4π.

Это утверждение следует из более общих результатов [10], примененных к системе (7.1).

Замечание. Из теоремы 9 следует, что при $p = 2q - 1$, $q \in \mathbb{N}$, в задаче наблюдается эффект удвоения периода.

Проанализируем системы (7.6) – (7.9) в случае $k = 0$.

Пусть в системе (7.6) введены обозначения

$$A_1 = B_1(a^*_{p1} - b_{p1}), \quad A_2 = B_2(a^*_{q2} + b_{q2})$$

В случае $A_1 > 0$, $A_2 < 0$ выберем $\theta_1^\circ = \pi$, $\theta_2^\circ = 0$, в случае $A_1 < 0$, $A_2 < 0$ возьмем $\theta_1^\circ = 0$, $\theta_2^\circ = \pi$. Наконец, при $A_1 < 0$, $A_2 < 0$ положим $\theta_1^\circ = \theta_2^\circ = 0$. Очевидно, такой выбор начальных углов гарантирует совместность системы (7.6). Только в случае $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ система (7.6) не имеет корней при $k = 0$.

При $k = 0$ система (7.7) всегда имеет простой корень (r_1°, r_2°), причем $r_1^\circ = 0$, а r_2° определятся из первого уравнения в (7.7). При этом углы θ_1° и θ_2° выбираются так, что число $\cos\theta^\circ \cos\theta_1^\circ$ имеет знак, противоположный знаку числа A_1.

Обратимся к системе (7.8). Умножим первое уравнение на $\sin\theta^\circ$ и сложим со вторым уравнением, умноженным на $\cos\theta^\circ$. Следующее уравнение получим, вычитая из первого уравнения, умноженного на $\cos\theta^\circ$, третье уравнение, умноженное на $\sin\theta^\circ$. Аналогичные операции проделаем со вторым и четвертым уравнениями. В результате получим систему

$$\begin{aligned}
&2B_1 r_2^\circ + (a_{p1} + b^*_{p1})\sin 2\theta_2^\circ + (a^*_{p1} - b_{p1})\cos 2\theta_2^\circ = 0\\
&(a_{p1} + b^*_{p1})\cos 2\theta_2^\circ - (a^*_{p1} - b_{p1})\sin 2\theta_2^\circ = 0\\
&2B_2\sqrt{r_1^\circ r_2^\circ} + (a_{q2} - b^*_{q2})\sin(\theta_1^\circ + \theta_2^\circ) + (a^*_{q2} + b_{q2})\cos(\theta_1^\circ + \theta_2^\circ) = 0\\
&(a_{q2} - b^*_{q2})\cos(\theta_1^\circ + \theta_2^\circ) - (a^*_{q2} + b_{q2})\sin(\theta_1^\circ + \theta_2^\circ) = 0
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Можно видеть, что в невырожденном случае

$$B_{1,2} \neq 0 \; (a_{p1} + b^*_{p1})(a^*_{p1} - b_{p1}) \neq 0, \quad (a_{q2} - b^*_{q2})(a^*_{q2} + b_{q2}) \neq 0$$

система (7.11) всегда имеет простой корень $(r_1^\circ,\ r_2^\circ,\ \theta_1^\circ,\ \theta_2^\circ)$.

При $k = 0$ первое и третье уравнения в (7.9) заменим первыми двумя уравнениями системы (7.11). Тогда становится понятным существование в системе (7.9) при $k = 0$ семейства от θ_1° решений; в этом решении $r_1^\circ = 0$.

Отметим, что при $k \neq 0$ система (7.9) имеет простое решение, в котором $r_1^\circ \neq 0$, $\sin\theta^\circ = 0$.

8. "Внутренний" резонанс четвертого порядка. Предполагаем, что порождающая система приведена к нормальной форме до третьего порядка включительно. Тогда в комплексно-сопряженных переменных z, $\bar{z}$ имеем систему

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= i\omega_1 z_1 + iz_1(A_{11}|z_1|^2 + A_{12}|z_2|^2) + iB_1\bar{z}_2^3 + Z_{10}(z,\ \bar{z}) + \mu Z_{11}(\mu,\ z,\ \bar{z},\ t)\\
\dot{z}_2 &= -i\omega_2 z_2 + iz_2(A_{21}|z_1|^2 + A_{22}|z_2|^2) + iB_2\bar{z}_1\bar{z}_2^2 + Z_{20}(z,\ \bar{z}) + \mu Z_{21}(\mu,\ z,\ \bar{z},\ t)
\end{aligned} \tag{8.1}$$

(A_{sj}, B_s – действительные постоянные, функции Z_{s0} имеют порядок не ниже третьего относительно z, $\bar z$). Как и при рассмотрении резонанса третьего порядка изменим в системе (8.1) масштаб, выбрав теперь $\varepsilon=\mu^{1/3}$. Далее запишем систему в полярных координатах

$$
\begin{aligned}
\dot r_\alpha &= 2\varepsilon^2 B_\alpha r_1^{1/2} r_2^{3/2}\sin\theta+\varepsilon^2 r_\alpha^{1/2}(Z_\alpha^* e^{-i\theta_\alpha}+\bar Z_\alpha^* e^{i\theta_\alpha}),\quad \alpha=1,2\\
\dot\theta_1 &= \omega_1+\varepsilon^2(A_{11}r_1+A_{12}r_2+B_1 r_1^{-1/2}r_2^{3/2}\cos\theta)+\frac{\varepsilon}{2ir_1^{1/2}}(Z_1^* e^{-i\theta_1}-\bar Z_1^* e^{i\theta_1})\\
\dot\theta_2 &= -\omega_2+\varepsilon^2(A_{21}r_1+A_{22}r_2+B_2 r_1^{1/2}r_2^{1/2}\cos\theta)+\frac{\varepsilon}{2ir_2^{1/2}}(Z_1^* e^{-i\theta_2}-\bar Z_2^* e^{i\theta_2})\\
\theta &= \theta_1+3\theta_2
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

(функции Z_α^* имеют такой же смысл, как и в системе (7.2)).

Рассмотрим резонансный случай, когда

$$\omega_1=p+a_1\mu^\sigma,\quad \omega_2=p/3+a_2\mu^\sigma,\quad p\in\mathbb{N}\ (a_{1,2}=\mathrm{const},\ \sigma\geqslant 2/3)$$

Здесь при $\varepsilon = 0$ система (8.2) имеет $6\pi/p$-периодическое решение

$$r_\alpha=r_\alpha^\circ,\ \alpha=1,2;\ \theta_1=pt+\theta_1^\circ,\ \theta_2=-pt/3+\theta_2^\circ$$

(r_α°, θ_α° – постоянные), причем при $p = 3q$, $q\in\mathbb{N}$, решение будет $2\pi/q$-периодическим. Кроме того, на симметричном решении имеем $\theta_\alpha^\circ=0$ или $\theta_\alpha^\circ=\pi$.

Составим системы амплитудных уравнений в каждом из возможных случаев

1°. *"Обратимые" возмущения, $p = 3q$, $q\in\mathbb{N}$*

$$
\begin{aligned}
&F\equiv 2(A_{11}r_1^\circ+A_{12}r_2^\circ)r_1^{\circ 1/2}+2B_1 r_2^{\circ 3/2}\cos\theta^\circ+(a_{p1}^*-b_{p1})\cos\theta_1^\circ+2ka_1 r_1^{\circ 1/2}\\
&2(A_{21}r_1^\circ+A_{22}r_2^\circ)r_2^{\circ 1/2}+2B_2 r_1^{\circ 1/2}r_2^\circ\cos\theta^\circ+(a_{q2}^*+b_{q2})\cos\theta_2^\circ+2ka_2 r_2^{\circ 1/2}=0
\end{aligned}
\tag{8.3}
$$

2°. *"Обратимые" возмущения, $p\neq 3q$, $q\in\mathbb{N}$*

$$F=0,\quad A_{21}r_1^\circ+A_{22}r_2^\circ+B_2\sqrt{r_1^\circ r_2^\circ}\cos\theta^\circ+ka_2=0 \tag{8.4}$$

3°. *Возмущения общего вида, $p = 3q$, $q\in\mathbb{N}$*

$$
\begin{aligned}
&F_1\equiv 2B_1 r_2^{\circ 3/2}\sin\theta^\circ+(a_{p1}+b_{p1}^*)\cos\theta_1^\circ+(a_{p1}^*-b_{p1})\sin\theta_1^\circ=0\\
&F_2\equiv 2(A_{11}r_1^\circ+A_{12}r_2^\circ)r_1^\circ+2B_1 r_2^{\circ 3/2}\cos\theta^\circ+(a_{p1}^*-b_{p1})\cos\theta_1^\circ-(a_{p1}+b_{p1}^*)\sin\theta_1^\circ+2ka_1 r_1^{\circ 1/2}=0\\
&2B_2 r_1^{\circ 1/2}r_2^\circ\sin\theta^\circ+(a_{q2}-b_{q2}^*)\cos\theta_2^\circ+(a_{q2}^*+b_{q2})\sin\theta_2^\circ=0\\
&2(A_{21}r_1^\circ+A_{22}r_2^\circ)r_2^{\circ 1/2}+2B_2 r_1^{\circ 1/2}r_2^\circ\cos\theta^\circ+(a_{q2}^*+b_{q2})\cos\theta_1^\circ-(a_{q2}-b_{q2}^*)\sin\theta_2^\circ+2ka_2 r_2^{\circ 1/2}=0
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

4°. *Возмущения общего вида, $p\neq 3q$, $q\in\mathbb{N}$*

$$
\begin{aligned}
&F_1=0,\quad B_2 r_1^{\circ 1/2}r_2^\circ\sin\theta^\circ=0\\
&F_2=0,\quad A_{21}r_1^\circ+A_{22}r_2^\circ+B_2\sqrt{r_1^\circ r_2^\circ}\cos\theta^\circ+ka_2=0
\end{aligned}
\tag{8.6}
$$

Теорема 10. Каждому простому корню любой из систем амплитудных уравнений (8.3) – (8.6) отвечает периодическое решение

$$z_1 = \mu^{1/3}\sqrt{r_1^\circ}\exp\{i(pt+\theta_1^\circ)\}+o(\mu^{1/3}),\quad z=\mu_2^{1/3}\sqrt{r_2^\circ}\exp\{i(-pt/3+\theta_2^\circ)\}+o(\mu^{1/3})$$

системы (8.1). При этом в случаях (8.3), (8.4) имеем симметричное решение обратимой системы, в случаях (8.3), (8.5) решение имеет период, равный 2π, а в случаях (8.4), (8.6) период равен 6π.

9. К динамике волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса. Расмотрим движение волчка Лагранжа (динамически симметричного твердого тела с центром масс на оси симметрии) вокруг его точки подвеса O. Предполагается, что точка O совершает вертикальные гармонические колебания по закону $\zeta(t)=a_*\cos\Omega t$ относительно некоторой фиксированной точки.

Уравнения движения задачи известны [14, 15]. Если ориентацию связанной системы координат задать углами Эйлера, то координаты ψ и φ будут циклическими. Положим постоянные значения импульсов p_ψ и p_φ равными соответственно $A\Omega a$, $A\Omega b$ (A – экваториальный момент инерции, a и b – безразмерные постоянные). Тогда получим [14, 15] следующие выражения для угловых скоростей прецессии и собственного вращения волчка:

$$\psi'=\frac{a-b\cos\theta}{\sin^2\theta},\quad \varphi'=\frac{A}{C}b-\frac{(a-b\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

(C – осевой момент инерции, штрих означает дифференцирование по безразмерной переменной $\tau=\Omega t$).

Таким образом, исследование движения волчка сводится к анализу системы с одной степенью свободы и обобщенной координатой θ

$$\theta''+\frac{d}{d\theta}\,\frac{(a-b\cos\theta)^2}{2\sin^2\theta}+(-\alpha+\beta\cos\tau)\sin\theta=0 \tag{9.1}$$

Безразмерные параметры α и β определяются формулами [14, 15]

$$\alpha=\frac{mgz_G}{A\Omega^2},\quad \beta=\frac{a_*}{l_0}$$

($l_0=A/(mz_G)$ – приведенная длина тела как физического маятника, m – масса волчка, z_G – расстояние от центра масс G до точки O). Параметр $\alpha(\alpha>0)$ характеризует положение центра масс на оси симметрии, параметр β $(\beta\geqslant 0)$ – амплитуду колебаний точки подвеса.

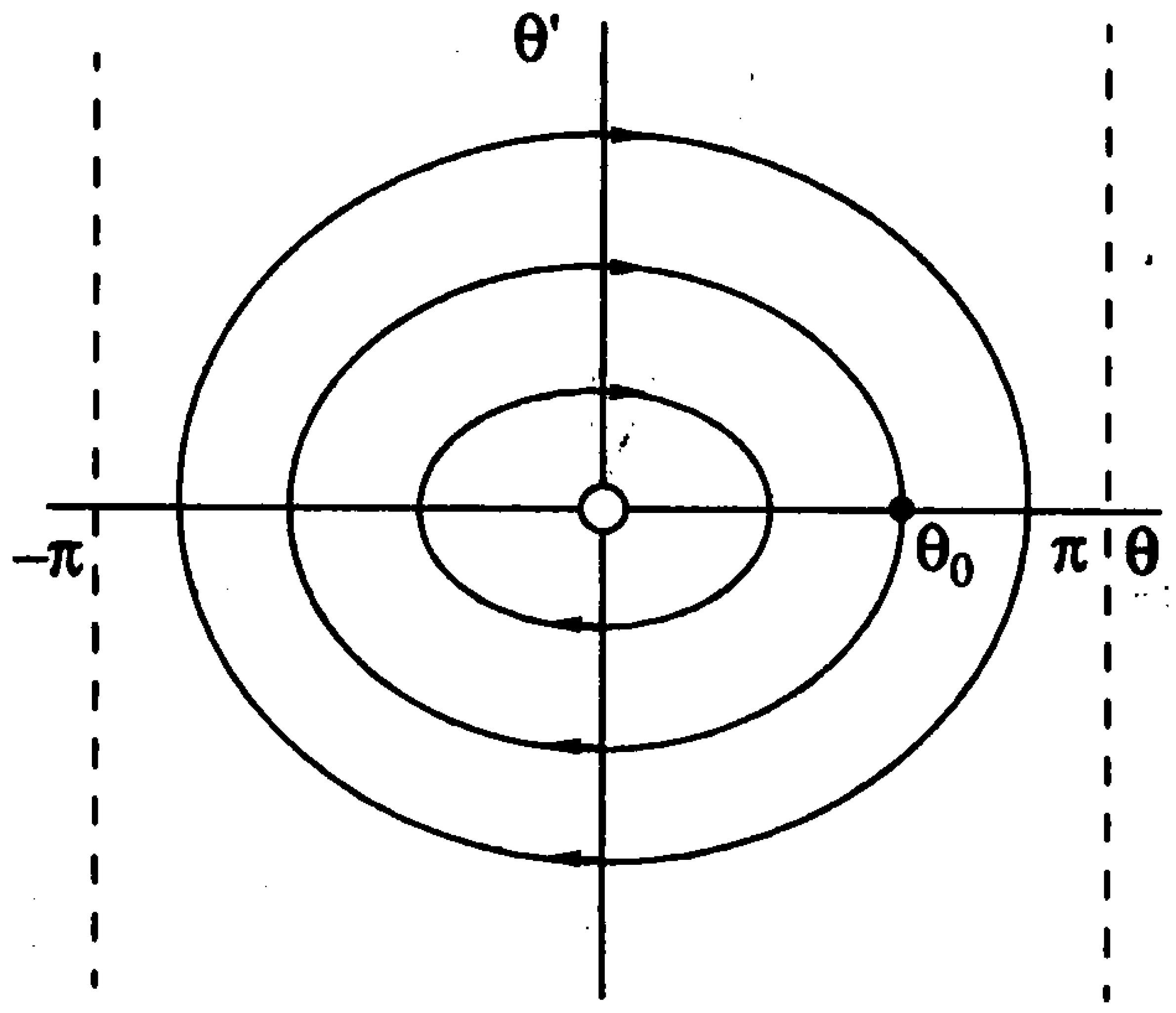
При $\beta=0$ имеем консервативную систему с одной степенью свободы, исчерпывающий анализ которой проводится методом фазовой плоскости. В частности, таким способом можно выделить все периодические движения.

При малых $\beta\neq 0$ имеем систему, близкую к консервативной системе с одной степенью свободы. Кроме того, эта система является обратимой. В инвариантности системы (9.1) относительно замены (τ,θ) на $(-\tau,\theta)$ можно убедиться непосредственно.

Из изложенного следует, что при исследовании периодических движениях волчка с малой амплитудой колебаний точки подвеса применима теория, разработанная в предыдущих разделах. Отметим, что данная задача с иных позиций исследовалась ранее [14]. При этом был рассмотрен случай, когда $|a|\neq|b|$. Ниже анализируется случай $|\alpha|=|b|$.

Случай $a=b$. Уравнение (9.1) принимает вид

$$\theta''+\frac{a^2\,\mathrm{tg}(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)}+(-\alpha+\beta\cos\tau)\sin\theta=0 \tag{9.2}$$



Фиг. 3

В случае неподвижной точки подвеса ($\beta = 0$) все положения равновесия определим из уравнения

$$\frac{dW(\theta)}{d\theta} \equiv \frac{(a^2 - 4\alpha\cos^4(\theta/2))}{2\cos^3(\theta/2)}\sin(\theta/2) = 0, \quad W(\theta) \equiv \frac{a^2}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} + \alpha\cos\theta \tag{9.3}$$

Пусть $a^2 \geqslant 4\alpha$. В этом случае имеем единственное – нулевое положение равновесия $\theta_* = 0$, отвечающее классическому "спящему" волчку. Этот волчок устойчив, так как условие $a^2 \geqslant 4\alpha$ совпадает с известным условием Маиевского – Четаева $C^2\omega^2 \geqslant 4Amgz_G$ (ω – угловая скорость вращения волчка вокруг оси симметрии).

Фазовый портрет системы (9.2) при $\beta = 0$ в рассматриваемом случае приведен на фиг. 3. Вычислим период колебаний

$$T_* = 4\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2[h - W(\theta)]}}, \quad h = W(\theta_0), \quad 0 < \theta_0 < \pi$$

Обозначим

$$\operatorname{tg}(\theta_0/2) = k, \quad \operatorname{tg}(\theta/2) = ku$$

Тогда

$$d\theta = 2kdu/(1 + k^2u^2)$$

и выражение для периода примет вид

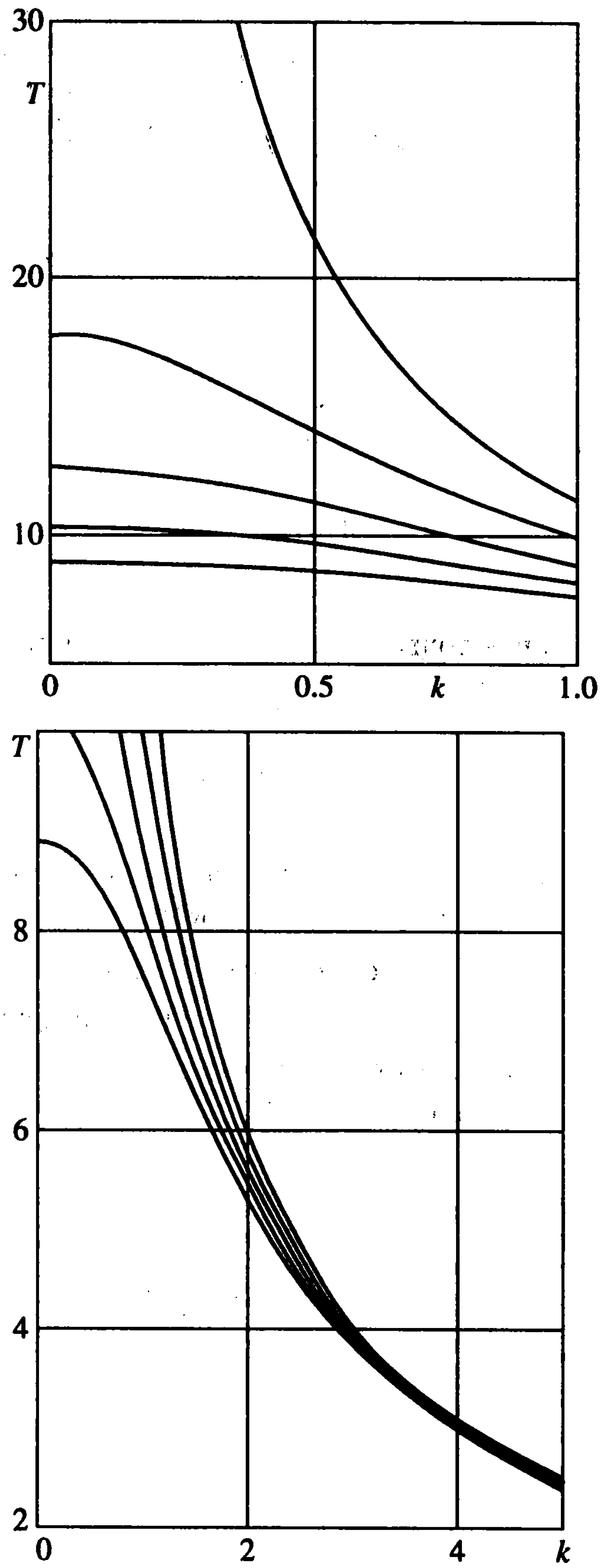
$$T_*(k) = 8\int_0^1 \frac{du}{(1 + k^2u^2)\sqrt{(1 - u^2)[a^2 - 4\alpha/((1 + k^2)(1 + k^2u^2))}}, \quad T_*(0) = \frac{4\pi}{\sqrt{a^2 - 4\alpha}} \tag{9.4}$$

Отсюда видно, что $T_*(k)$ – строго убывающая функция. В этом, очевидно, также можно убедиться непосредственно, анализируя знак производной.

На фиг. 4 приведены графики зависимостей $T(k) = aT_*(k, \gamma)$ при разных значениях $\gamma(\gamma = 4\alpha/a^2)$ с шагом $\Delta\gamma = 0{,}5$, причем на нижней кривой $\gamma = -1$.

Условие $dT(k) \neq 0$, вместе со свойством обратимости уравнения (9.2), немедленно приводит к выводу о "сохранении" при малых колебаниях точки подвеса $2\pi s$-периодических движений волчка, для которых

$$T_*(k^*) = 2\pi s/n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{9.5}$$

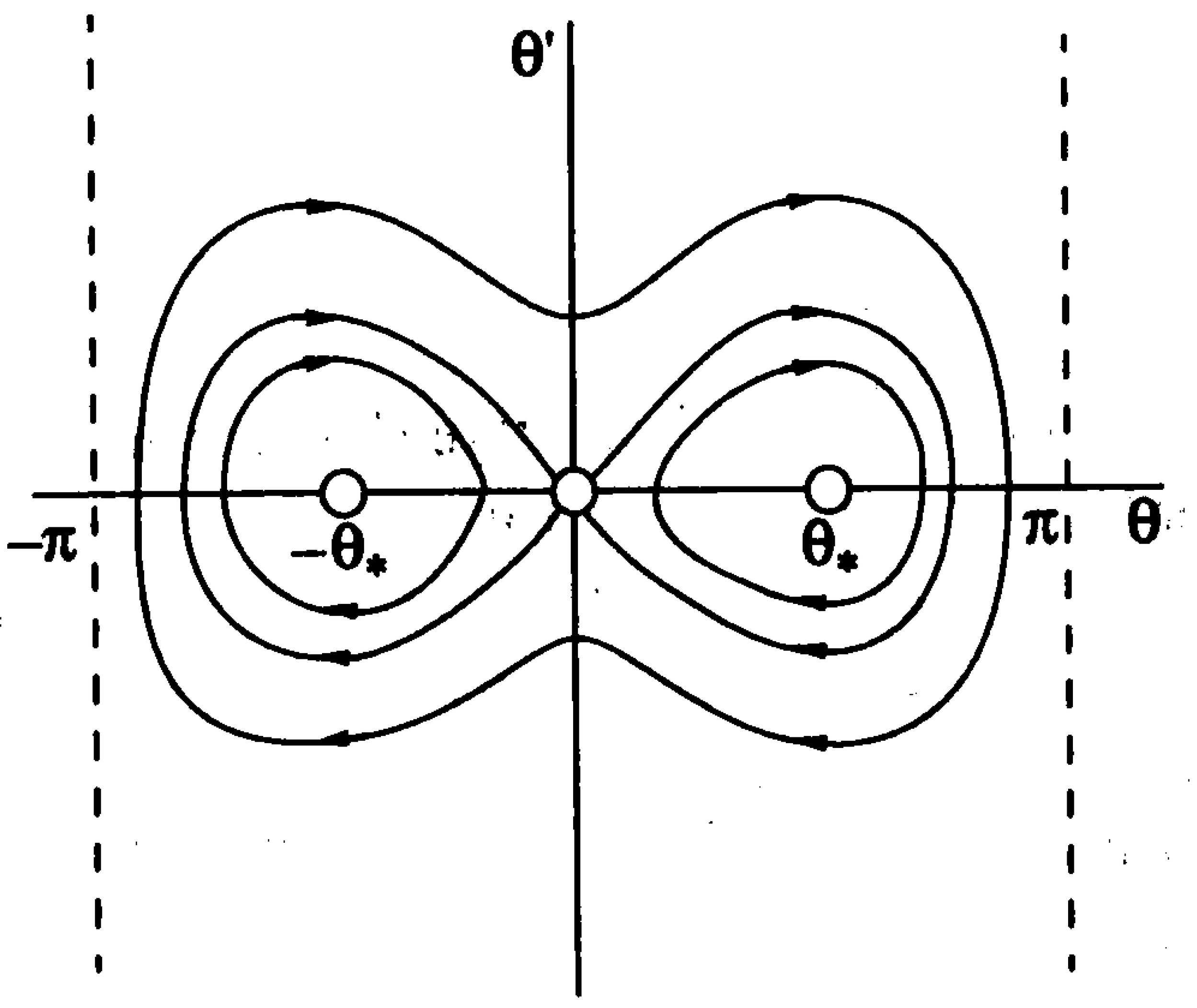


Фиг. 4

Среди этих движений есть как 2π-периодические движения ($s = 1$), так и периодом, кратным 2π. Из фиг. 4 видно, что при $a = 1$ 2π-периодические колебания происходят с "амплитудой" $\theta^\circ = 110^\circ - 130^\circ$ ($1.5 < k < 2.0$) независимо от значения параметра γ. При увеличении параметра a (угловой скорости волчка) "амплитуда" уменьшается.

Локальные периодические движения, близкие к вращению волчка вокруг вертикали, не обнаруживаются; существует только само вращение вокруг вертикали.

Пусть $a^2 < 4\alpha$. В этом случае имеем три положения равновесия – нулевое, отвечающее неустойчивому "спящему" волчку и два симметричных относительно нуля равновесия $\pm\theta_*$: $4\alpha\cos^4(\theta_*/2) = a^2$ (фиг. 5).



Фиг. 5

Период колебаний, содержащих все три положения равновесия, вычисляется по-прежнему по формуле (9.4). Значит, все $2\pi s$-периодические движения волчка, удовлетворяющие условию (9.5), "сохраняются" при малых колебаниях точки подвеса O.

Вычислим для равновесий $\pm\theta_*$

$$\left.\frac{d^2W}{d\theta^2}\right|_* = \frac{a^2 + 16\alpha \sin^2(\theta_*/2)\cos^2(\theta_*/2) - 4\alpha\cos^4(\theta_*/2)}{4\cos^2(\theta_*/2)} = 4\alpha \sin^2(\theta_*/2)$$

Отсюда при учете соотношения, определяющего θ_*, найдем частоту

$$\omega_* = [4\alpha(4\alpha - a^2)]^{1/2}$$

малых колебаний в окрестности равновесий θ_*.

Из теоремы 3 следует, что в нерезонансном случае в окрестности каждого из равновесий $\pm\theta_*$ существует единственное 2π-периодическое движение с "амплитудой" β. В резонансном случае существуют один или три 2π-периодических движений с "амплитудой" $\beta^{1/3}$. Это следует из теоремы 5, ибо при записи уравнения (9.2) в окрестности равновесий $\pm\theta_*$ в виде системы (5.1) получим в (5.4)

$$X_* \equiv 0, \quad Y_* = -(\beta/\omega_*)\sin\theta_* \cos\tau$$

В классическом случае равновесия $\pm\theta_*$ приведенной системы с одной степенью свободы отвечают регулярной прецессии волчка Лагранжа. Поэтому при малых колебаниях точки подвеса установленные выше периодические движения оказываются псевдорегулярными прецессиями. Таких движений в резонансном случае может быть одно или три. Этот факт установлен ранее в случае $|a| \neq |b|$ [14].

Случай $a = -b$. Уравнение приведенной системы имеет вид

$$\theta'' - \frac{a^2 \operatorname{ctg}(\theta/2)}{2\sin^2(\theta/2)} + (-\alpha + \beta\cos\tau)\sin\theta = 0 \qquad (9.6)$$

При отсутствии колебаний точки подвеса имеем единственное, устойчивое положение равновесия $\theta_* = \pi$, отвечающее "висящему" волчку Лагранжа.

Колебания около положения равновесия происходят с периодом

$$T_* = 4\int_{\pi}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2[h - W(\theta)]}} = 4\int_{0}^{\nu_0} \frac{d\nu}{\sqrt{2[h - W(\pi + \nu)]}}, \quad h = W(\theta_0)$$

причем частота малых колебаний равна $\omega_* = (\alpha + a^2/4)^{1/2}$. Если принять во внимание, что

$$W(\pi + \nu) = (a^2/2)\operatorname{tg}^2(\nu/2) - \alpha\cos\nu$$

то получим, что период вычисляется по формуле (9.4), только с заменой α на $-\alpha$.

В функции $T_*(k, \gamma)$ отрицательные значения параметра γ соответствуют отрицательным α. Зависимости $T(k) = aT_*(k, \gamma)$ при $\gamma < 0$ также представлены на фиг. 3. Видно, что $dT_* \neq 0$. Это гарантирует существование $2\pi s$-периодических движений при малых колебаниях точки подвеса. "Амплитуды" для этих движений удовлетворяют условию (9.5). Укажем на интересный факт существования 2π-периодических движений, в которых угол θ меняется в диапазоне $(\pi - \nu_0,\ \pi + \nu_0)$, $\nu_0 = 110° - 130°$.

Автор благодарит В.В. Румянцева за постоянный интерес и поддержку исследований по теории колебаний обратимых механических систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-15-96150, 00-01-00122), программы "Университеты России – фундаментальные исследования" (015.04.01.56) и Федеральной целевой программы "Интеграция" (2.1-294).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Devaney R.L.* Reversible diffeomorphisms and flows // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V. 218. P. 89–113.
2. *Кац А.М.* Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близких к консервативным // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 1. С. 13–32.
3. *Тхай В.Н.* Вращательные движения механических систем // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 179–195.
4. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат. 1956. 491 с.
5. *Брюно А.Д.* Аналитическая форма обыкновенных дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. 1971. Т. 25. С. 119–262; 1972. Т. 26. С. 199–239.
6. *Sevryuk M.B.* Reversible systems // Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer, 1986. V. 1211. 319 p.
7. *Тхай В.Н.* Ляпуновские семейства периодических движений в обратимой системе // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 46–58.
8. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.
9. *Тхай В.Н.* Обратимые механические системы // Вторые Поляховские чтения. Избр. тр. СПб: Изд-во НИИ Химии СПб ун-та, 2000. С. 115–127.
10. *Тхай В.Н.* О методе Ляпунова – Пуанкаре в теории периодических движений // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 355–371.
11. *Тхай В.Н.* Нелинейные колебания обратимых систем // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 38–50.
12. *Тхай В.Н.* Об устойчивости регулярных прецессий Гриоли/ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 848–857.
13. *Гродман Д.Л., Тхай В.Н.* Вращения динамически симметричного спутника под действием гравитационных сил и светового давления // Моделирование и исследование сложных систем. М.: Изд-во МГАПиИ. 1998. Ч. 3. С. 376–385.
14. *Холостова О.В.* О динамике волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 785–800.
15. *Холостова О.В.* Об устойчивости "спящего" волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 858–868.

Москва
e-mail: tkhai@ccas.ru

Поступила в редакцию
26.II.2001