УДК 531.36 : 534.1

© 2001 г. А.П. Маркеев

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ РЕЗОНАНСЕ 3 : 1

Исследуется устойчивость положения равновесия автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Предполагается, что равновесие устойчиво в линейном приближении, частоты ω_1 и ω_2 малых колебаний связаны резонансным соотношением $\omega_1 = 3\omega_2$, а функция Гамильтона не является знакоопределенной в окрестности положения равновесия. Изучается критический случай, когда для получения строгих выводов об устойчивости положения равновесия необходимо учитывать члены выше четвертой степени в разложении функции Гамильтона в ряд. Получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости, выражающиеся через коэффициенты разложения до шестой степени включительно. Результаты применены в задаче об устойчивости стационарного вращения динамически симметричного спутника – твердого тела вокруг нормали к плоскости круговой орбиты его центра масс.

1. Постановка задачи. Рассмотрим автономную гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Пусть начало координат $q_j = 0, p_j = 0$ $(j = 1, 2)$ фазового пространства является положением равновесия системы, а функция Гамильтона $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ аналитична в некоторой его окрестности. Если функция H знакоопределенна, то, согласно теореме Ляпунова, положение равновесия устойчиво [1] (в качестве функции Ляпунова можно принять функцию H). Будем считать, что функция H не является знакоопределенной, но собственные значения $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$ матрицы линеаризованных уравнений возмущенного движения чисто мнимые и различные, так что равновесие устойчиво в линейном приближении.

Предположим, что в системе имеет место резонанс четвертого порядка, т.е. частоты ω_1 и ω_2 малых колебаний связаны соотношением $\omega_1 = 3\omega_2$. При подходящем выборе канонически сопряженных переменных q_j, p_j функцию Гамильтона можно [2] записать в виде

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + r_1^{1/2} r_2^{3/2} (a_{13} \sin\phi + b_{13} \cos\phi) + O_6 \tag{1.1}$$

$$\phi = \varphi_1 + 3\varphi_2, \quad q_j = \sqrt{2r_j} \sin\varphi_j, \quad p_j = \sqrt{2r_j} \cos\varphi_j, \quad j = 1,2$$

где $c_{20}, c_{11}, c_{02}, a_{13}, b_{13}$ – постоянные коэффициенты, через O_6 обозначена совокупность членов, степень которых относительно q_j, p_j выше пяти.

Пусть резонансные члены действительно присутствуют в разложении (1.1), т.е. $a_{13}^2 + b_{13}^2 \neq 0$. Положим

$$\varkappa = |c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| \left[27\left(a_{13}^2 + b_{13}^2\right)\right]^{-1/2} \tag{1.2}$$

Если $\varkappa > 1$, то положение равновесия $q_j = 0, p_j = 0$ устойчиво, а если $\varkappa < 1$, то имеет место неустойчивость [2].

Случай $\varkappa = 1$ является критическим. В приближенной системе, гамильтониан которой получается из формулы (1.1) отбрасыванием членов выше четвертой степени относительно q_j, p_j, положение равновесия неустойчиво. Но можно показать, что члены, степень которых выше четвертой, можно подобрать так, чтобы получить, по желанию, устойчивость или неустойчивость. Для примера рассмотрим систему с функцией Гамильтона вида

$$H = 3r_1 - r_2 + r_2^2 + \sqrt{3r_1 r_2}\, r_2 \sin\phi + a r_1^3 \tag{1.3}$$

Здесь приняты обозначения из (1.1), a – постоянный коэффициент. Величина $\varkappa$ для гамильтониана (1.3) равна единице, т.е. имеет место критический случай.

Система с гамильтонианом (1.3) имеет два первых интеграла

$$V_1 = r_2 - 3r_1 = c = \mathrm{const}, \quad V_2 = H = h = \mathrm{const} \tag{1.4}$$

Если $a = 1$, то положение равновесия устойчиво, что можно показать при помощи теоремы Ляпунова об устойчивости [1], приняв в качестве функции Ляпунова функцию $V = V_1^2 + V_2^2$. При $a = 1$ она будет определенно-положительной относительно r_1, r_2, откуда и следует устойчивость.

Если же $a = -1$, то положение равновесия будет неустойчивым. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим движение на совместных уровнях $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ первых интегралов (1.4). На этих уровнях либо $r_1 = r_2 = 0$, либо $r_2 = 3r_1 = 27(1 + \sin\phi)$. Первый случай для нас не представляет интереса, так как он соответствует самому положению равновесия. Во втором случае имеем частное решение, являющееся двоякоасимптотическим к точке $r_1 = 0$. Соответствующая этому решению траектория представляет собой кардиоиду $r_1 = 9(1 + \sin\phi)$. Если $t \to \pm\infty$, то $r_1 \to 0$, а $\phi \to -\pi/2$. При этом справедливы равенства

$$\frac{d\phi}{dt} = -81(1+\sin\phi)^2, \quad \frac{dr_1}{dt} = -9r_1^2\cos\phi$$

Если положить $\phi(0) = -\pi/2 - \mu$, где $0 < \mu \ll 1$, то $r_1(0) = 18\sin^2(\mu/2) \sim \mu^2$. С ростом времени угол ϕ монотонно убывает, и пока он остается в третьей четверти ($-\pi < \phi < -\pi/2$), величина r_1 монотонно возрастает от сколь угодно малой величины $r_1(0)$ до $r_1 = 9$, что и указывает на неустойчивость положения равновесия.

Рассмотренный пример показывает, что задача об устойчивости положения равновесия при резонансе $\omega_1 = 3\omega_2$ в критическом случае, когда $\varkappa = 1$, требует специального рассмотрения, учитывающего в разложении (1.1) члены выше четвертой степени.

2. Формулировка результата. При помощи канонического нормализующего преобразования (получаемого, например, методом Депри – Хори [2]) переменные q_j, p_j можно выбрать так, чтобы функция Гамильтона $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ имела нормальную форму не только в членах до пятой степени, как в (1.1), но и в членах до седьмой степени включительно. Вычисления показывают, что тогда

$$\begin{aligned} H &= \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1 r_2 + c_{02}r_2^2 + r_1^{1/2} r_2^{3/2}(a_{13}\sin\phi + b_{13}\cos\phi) + \\ &+ c_{30}r_1^3 + c_{21}r_1^2 r_2 + c_{12}r_1 r_2^2 + c_{03}r_2^3 + r_1^{3/2} r_2^{3/2}(a_{33}\sin\phi + b_{33}\cos\phi) + \\ &+ r_1^{1/2} r_2^{5/2}(a_{15}\sin\phi + b_{15}\cos\phi) + O_8 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где приняты обозначения из (1.1), а через O_8 обозначена совокупность членов, степень которых относительно q_j, p_j выше семи.

Теорема. Если коэффициенты функции Гамильтона (2.1) таковы, что величина $\varkappa$, определяемая по формуле (1.2), равна единице, но при этом выполняется неравенство

$$(c_{20}+3c_{11}+9c_{02})(c_{30}+3c_{21}+9c_{12}+27c_{03})-$$
$$-27\left[a_{13}(a_{33}+3a_{15})+b_{13}(b_{33}+3b_{15})\right]<0 \tag{2.2}$$

то положение равновесия $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$ неустойчиво; при противоположном знаке в неравенстве (2.2) имеет место устойчивость.

3. Доказательство теоремы. Доказательство теоремы проводится при помощи КАМ – теории и второго метода Ляпунова [1, 3], а в техническом отношении существенно опирается на подходы [4], примененные при анализе критического случая задачи об устойчивости периодической по независимой переменной гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе четвертого порядка.

Неустойчивость. Для доказательства утверждения о неустойчивости достаточно показать неустойчивость на нулевом уровне интеграла энергии H = const, на котором находится изучаемое положение равновесия. Из соотношения $H=0$ находим $r_2=-K(r_1,\varphi_1,\varphi_2)$. Движение на изоэнергетическом уровне $H=0$ описывается уравнениями Уиттекера [5], которые имеют форму уравнений Гамильтона, причем роль функции Гамильтона играет функция K, а независимой переменной является величина φ_2.

Вместо φ_2 введем независимую переменную $\varphi_2^* = -\varphi_2$. Величина φ_2^* в малой окрестности положения равновесия монотонно возрастает и может играть роль времени в задаче об устойчивости. Если еще сделать унивалентную каноническую замену переменных $r_1 = r_1^*/4$, $\varphi_1 = 4\varphi_1^*+3\varphi_2^*$, то движению на изоэнергетическом уровне $H=0$ будет соответствовать гамильтониан следующего вида:

$$K^* = \left[b_2+3\sqrt{3}\left(a_{13}^*\sin 4\varphi_1^*+b_{13}^*\cos 4\varphi_1^*\right)\right]r_1^{*2}+\left(b_3+a_{33}^*\sin 4\varphi_1^*+b_{33}^*\cos 4\varphi_1^*\right)r_1^{*3}+$$
$$+\left(d_3+d_{13}^*\sin 4\varphi_1^*+e_{13}^*\cos 4\varphi_1^*\right)\left[b_2+3\sqrt{3}\left(a_{13}^*\sin 4\varphi_1^*+b_{13}^*\cos 4\varphi_1^*\right)\right]r_1^{*3}+O\left(r_1^{*4}\right) \tag{3.1}$$

Здесь

$$b_2=(c_{20}+3c_{11}+9c_{02})/(16\omega_2),\quad a_{13}^*=a_{13}/(16\omega_2),\quad b_{13}^*=b_{13}/(16\omega_2)$$
$$b_3=(c_{30}+3c_{21}+9c_{12}+27c_{03})/(64\omega_2),\quad a_{33}^*=3\sqrt{3}(a_{33}+3a_{15})/(64\omega_2)$$
$$b_{33}^*=3\sqrt{3}(b_{33}+3b_{15})/(64\omega_2),\quad d_3=(c_{11}+6c_{02})/(4\omega_2) \tag{3.2}$$
$$d_{13}^*=3\sqrt{3}a_{13}/(8\omega_2),\quad e_{13}^*=3\sqrt{3}b_{13}/(8\omega_2)$$

Структуру гамильтониана (3.1) можно несколько упростить, сделав замену переменных по формулам

$$\varphi_1^*=\sigma(\varphi+\chi),\quad r_1^*=r,\quad \varphi_2^*=\delta\tau \tag{3.3}$$

$$\delta=\left[27\left(a_{13}^{*2}+b_{13}^{*2}\right)\right]^{-1/2},\quad \sin 4\chi=-3\sqrt{3}\delta a_{13}^*,\quad \cos 4\chi=-3\sqrt{3}\sigma\delta b_{13}^*,\quad \sigma=\operatorname{sign} b_2 \tag{3.4}$$

В новых переменных движение описывается каноническими уравнениями с гамильтонианом

$$K = (1-\cos 4\varphi)r^2 + \left(\gamma_3 + \gamma_{33}\sin 4\varphi + \delta_{33}\cos 4\varphi\right)r^3 +$$

$$+\left(d_3 + d_{13}\sin 4\varphi + e_{13}\cos 4\varphi\right)(1-\cos 4\varphi)r^3 + O\left(r^4\right) \tag{3.5}$$

$$\gamma_3 = \sigma\delta b_3,\quad \gamma_{33} = \delta\left(a_{33}^*\cos 4\chi - \sigma b_{33}^*\sin 4\chi\right),\quad \delta_{33} = \delta\left(a_{33}^*\sin 4\chi + \sigma b_{33}^*\cos 4\chi\right)$$

$$d_{13} = \sigma d_{13}^*\cos 4\chi - e_{13}^*\sin 4\chi,\quad e_{13} = \sigma d_{13}^*\sin 4\chi + e_{13}^*\cos 4\chi \tag{3.6}$$

Еще большее упрощение гамильтониана (3.5) можно получить при помощи замены переменных

$$\varphi = \theta - \gamma_{33}(4|e|)^{-1}\rho,\quad r = |e|^{-1}\rho,\quad \tau = |e|\eta \quad (e = \gamma_3 + \delta_{33}) \tag{3.7}$$

Эта замена уничтожает в нем слагаемое $r^3\gamma_{33}\sin 4\varphi$ и приводит новый гамильтониан к виду

$$K = (1-\cos 4\theta)\rho^2 + [s + d(1-\cos 4\theta)]\rho^3 + O\left(\rho^4\right) \tag{3.8}$$

где

$$s = \operatorname{sign} e,\quad d = \left(d_3 - \delta_{33} + d_{13}\sin 4\theta + e_{13}\cos 4\theta\right)|e|^{-1} \tag{3.9}$$

Если $s = -1$, то имеет место неустойчивость, что доказывается при помощи первой теоремы Ляпунова о неустойчивости [1]. Знакопеременную функцию V можно [4] взять в виде $V = \rho^2\sin 4\theta$. При достаточно малых ρ ее производная $dV/d\eta$ в силу уравнений движения с гамильтонианом (3.8) будет [4] определенно-отрицательной. Но из формул (3.2), (3.4), (3.6), (3.7) и (3.9) следует, что равенство $s = -1$ эквивалентно условию (2.2). Утверждение теоремы о неустойчивости доказано.

Устойчивость. Пусть теперь $s = 1$, т.е. в неравенстве (2.2) имеет место противоположный знак. В системе с гамильтонианом (2.1) сделаем замену (каноническое преобразование с валентностью ε^{-1})

$$\varphi_1 = 4\varphi_1^* + 3\varphi_2^*,\quad \varphi_2 = -\varphi_2^*,\quad r_1 = \varepsilon r_1^*/4,\quad r_2 = \varepsilon\left(3r_1^* - 4r_2^*\right)/4,\quad t = t^*/\omega_2 \tag{3.10}$$

Так как изучается движение в окрестности равновесия, то $0 < \varepsilon \ll 1$. Новым переменным соответствует гамильтониан

$$H^* = r_2^* + \varepsilon\left\{\left[b_2 + 3\sqrt{3}\left(a_{13}^*\sin 4\varphi_1^* + b_{13}^*\cos 4\varphi_1^*\right)\right]r_1^{*2} + f_1\left(r_1^*, r_2^*, \varphi_1\right) +\right.$$

$$\left.+\varepsilon\left[\left(b_3 + a_{33}^*\sin 4\varphi_1^* + b_{33}^*\cos 4\varphi_1^*\right)r_1^{*3} + f_2\left(r_1^*, r_2^*, \varphi_1\right)\right]\right\} + \varepsilon^3 f_3\left(r_1^*, r_2^*, \varphi_1^*, \varphi_2^*; \varepsilon^{1/2}\right) \tag{3.11}$$

Коэффициенты b_2, a_{13}^*, b_{13}^*, b_3, a_{33}^*, b_{33}^* вычисляются по формулам (3.2). Последнее слагаемое в (3.11) – это преобразованная к новым переменным совокупность членов O_8 из (2.1). Явный вид содержащихся в выражении (3.11) функций f_1 и f_2 не потребуется, важно только то, что эти функции не зависят от переменной φ_2^*, обращаются в нуль при $r_2^* = 0$ и при $r_1^* > 0$ аналитичны по своим аргументам $r_1^*, r_2^*, \varphi_1^*$. Отметим также, что переменная $r_1^* \geqslant 0$, а r_2^* может принимать значения любого знака.

Еще одно каноническое (с валентностью σ) преобразование

$$\varphi_1^* = \sigma(\theta_1^* + \chi), \quad \varphi_2^* = \theta_2^*, \quad r_1^* = \rho_1^*, \quad r_2^* = \sigma\rho_2^*, \quad t^* = \delta\tau^* \tag{3.12}$$

где σ, χ, δ определяются равенствами (3.4), приводит к уравнениям движения с гамильтонианом

$$\Gamma^* = \delta\rho_2^* + \varepsilon\Big\{(1-\cos 4\theta_1^*)\rho_1^{*2} + f_1^*(\rho_1^*, \rho_2^*, \theta_1^*) + \varepsilon\big[(\gamma_3 + \gamma_{33}\sin 4\theta_1^* + \delta_{33}\cos 4\theta_1^*)\rho_1^{*3} +$$
$$+ f_2^*(\rho_1^*, \rho_2^*, \theta_1^*)\big]\Big\} + \varepsilon^3 f_3^*(\rho_1^*, \rho_2^*, \theta_1^*, \theta_2^*; \varepsilon^{1/2}) \tag{3.13}$$

где f_i^* – это умноженные на $\sigma\delta$ функции f_i из (3.11), в которых аргументы выражены через новые переменные по формулам (3.12), а коэффициенты γ_3, γ_{33}, δ_{33} определяются равенствами (3.6).

И, наконец, сделаем замену переменных, аналогичную замене (3.7):

$$\theta_1^* = \theta - \varepsilon\gamma_{33}(4|e|)^{-1}\rho, \quad \rho_1^* = |e|^{-1}\rho, \quad \theta_2^* = w_2, \quad \rho_2^* = |e|^{-1} I_2, \quad \tau^* = |e|\eta$$

В новых переменных движение описывается каноническими уравнениями с гамильтонианом

$$F = F^{(0)}(I_2) + \varepsilon F^{(1)}(\rho, I_2, \theta; \varepsilon) + \varepsilon^3 F^{(2)}(\rho, I_2, \theta, w_2; \varepsilon^{1/2}) \tag{3.14}$$

где

$$F^{(0)} = \delta|e|I_2, \quad F^{(1)} = (1-\cos 4\theta)\rho^2 + g_1(\rho, I_2, \theta) + \varepsilon\{[s + k(1-\cos 4\theta)]\rho^3 + g_2(\rho, I_2, \theta)\}$$

$$s = \operatorname{sign} e = 1, \quad k = -\delta_{33}|e|^{-1}$$

Функция F является 2π-периодической по переменным θ, w_2 и при $\rho > 0$ и достаточно малых ε аналитична относительно ρ, I_2, θ, w_2, $\varepsilon^{1/2}$. Функции g_1 и g_2 обращаются в нуль при $I_2 = 0$.

Если в гамильтониане (3.14) отбросить последнее слагаемое, то придем к приближенной системе с гамильтонианом $F^{(0)} + \varepsilon F^{(1)}$. Она имеет два первых интеграла $F^{(0)} + \varepsilon F^{(1)} = h = \mathrm{const}$ и $I_2 = I_2(0) = \mathrm{const}$ и интегрируема. Пусть $I_2(0)$ – малая величина (например, имеет порядок $\varepsilon^{5/2}$). Тогда при достаточно малых значениях h траектории приближенной системы в плоскости $x_1 = \sqrt{2\rho}\cos\theta$, $x_2 = \sqrt{2\rho}\sin\theta$ будут замкнутыми, охватывающими точку $x_1 = x_2 = 0$ (см. [4, фиг. 3, б]). Для соответствующих движений приближенной системы можно ввести переменные действие – угол I_j, w_j ($j = 1, 2$). Ввиду того что в приближенной системе координата w_2 – циклическая, одной из двух пар этих переменных будет пара I_2, w_2. Записанную в переменных I_j, w_j ($j = 1, 2$) функцию Гамильтона (3.14) обозначим через Φ:

$$\Phi = \Phi^{(0)}(I_2) + \varepsilon\Phi^{(1)}(I_1, I_2) + \varepsilon^3\Phi^{(2)}(I_1, I_2, w_1, w_2; \varepsilon^{1/2}) \tag{3.15}$$

Здесь $\Phi^{(0)}$ – это функция $F^{(0)}$ из (3.14). Функция Φ является 2π-периодической по w_1 и w_2, а при $I_1 > 0$ аналитична относительно I_1, I_2, w_1, w_2, $\varepsilon^{1/2}$

Если выполняются неравенства

$$\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial I_2} \neq 0, \quad \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial I_1} \neq 0, \quad \frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial I_1^2} \neq 0 \tag{3.16}$$

то, согласно КАМ – теории [3], переменные I_1, I_2 при всех $\eta > 0$ остаются вблизи своих начальных значений: $|I_j(\eta) - I_j(0)| < c\varepsilon^2$ (c = const > 0). Поэтому для доказательства утверждения теоремы об устойчивости достаточно убедиться в справедливости неравенств (3.16). Первое из них, очевидно, выполнено. Справедливость второго и третьего при $I_2 = 0$ показана ранее [4]. Но ввиду аналитичности функции $\Phi^{(1)}$ последние два неравенства будут выполняться и при достаточно малых значениях $|I_2|$. Теорема доказана.

4. Об устойчивости стационарного вращения спутника. Рассмотрим движение динамически симметричного спутника – твердого тела относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Известно [6], что на круговой орбите спутник может двигаться так, что его ось симметрии все время перпендикулярна плоскости орбиты, а сам спутник вращается вокруг оси симметрии с произвольной постоянной по величине угловой скоростью (цилиндрическая прецессия (ЦП)). Задача об устойчивости ЦП исследована довольно подробно [7–10]. Полученные к настоящему времени результаты состоят в следующем.

Движение оси симметрии спутника описывается автономной канонической системой дифференциальных уравнений четвертого порядка, зависящей от двух параметров α и β ($\alpha = C/A$, $\beta = r_0/\omega_0$, где C и A – полярный и экваториальный моменты инерции, r_0 – проекция абсолютной угловой скорости спутника на его ось симметрии, являющаяся интегралом движения, ω_0 – угловая скорость движения центра масс по орбите, $0 < \alpha \leqslant 2$, $-\infty < \beta < \infty$). Характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений возмущенного движения записывается в виде

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0 \tag{4.1}$$

$$a = \alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta + 3\alpha - 1, \quad b = (\alpha\beta - 1)(\alpha\beta + 3\alpha - 4)$$

В областях, определяемых неравенствами

$$a > 0, \quad b > 0, \quad a^2 - 4b > 0 \tag{4.2}$$

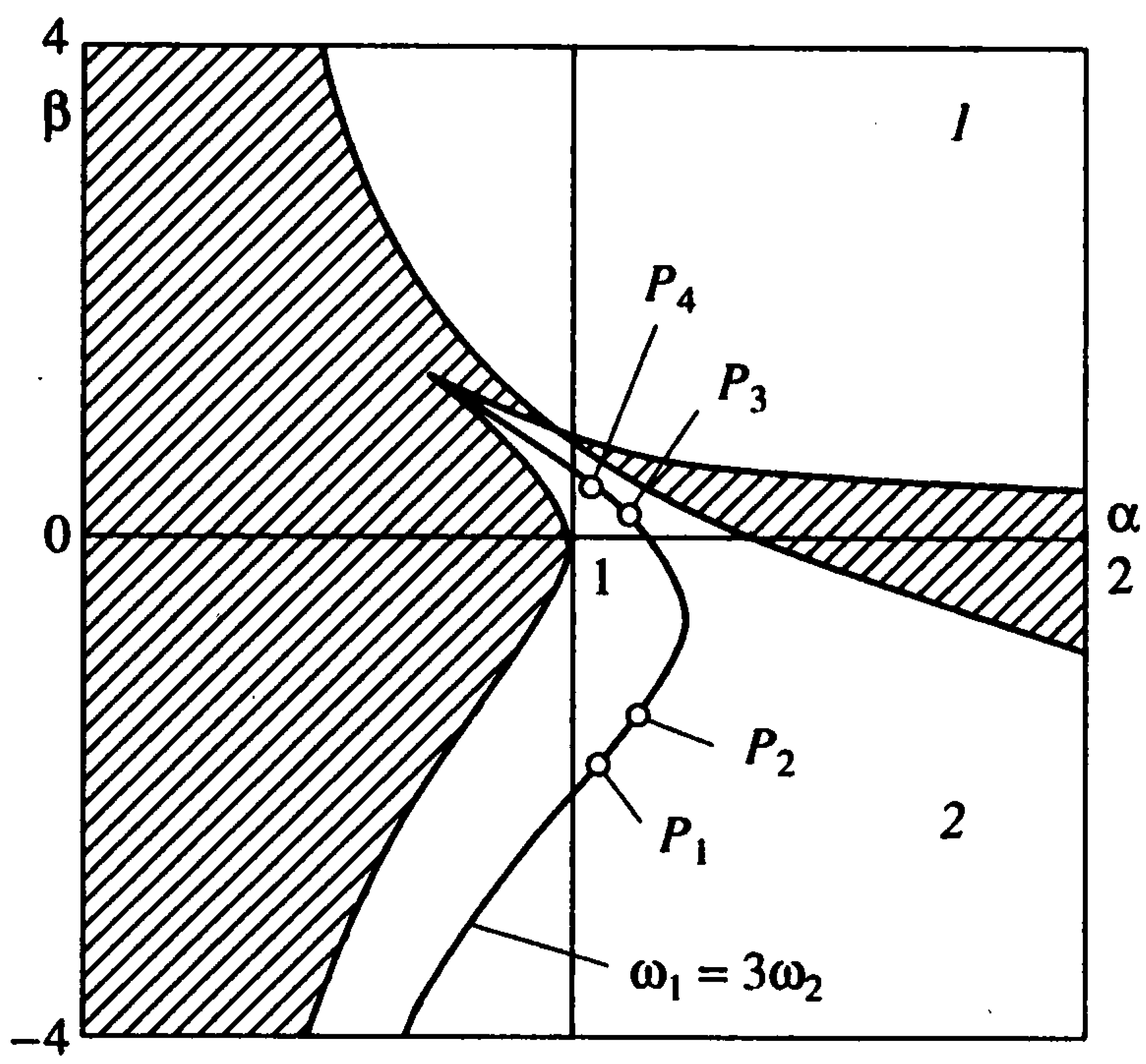
имеет место устойчивость в первом приближении. В этих областях уравнение (4.1) имеет чисто мнимые корни $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ ($\omega_1 \geqslant \omega_2 > 0$). Если хотя бы одно из неравенств (4.2) выполняется с обратным знаком, то у характеристического уравнения есть корень с положительной вещественной частью, и, согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению [1], ЦП неустойчива. На фигуре в плоскости параметров α, β области неустойчивости заштрихованы. В незаштрихованных областях 1 и 2 корни характеристического уравнения чисто мнимые.

В области 1 ЦП устойчива [7]. В этой области гамильтониан H – знакоопределенная функция относительно координат и импульсов q_j, p_j ($j = 1, 2$) возмущенного движения (в переменных q_j, p_j ЦП отвечает положению равновесия $q_j = p_j = 0$ оси симметрии спутника в орбитальной системе координат). Это позволило при решении задачи об устойчивости применить второй метод Ляпунова. В области же 2 функция H не является знакоопределенной (хотя имеет место устойчивость в первом приближении), и для решения задачи об устойчивости ЦП спутника потребовалось привлечение современных методов теории устойчивости гамильтоновых систем [2, 11, 12]. Расчеты проводились для $\beta \geqslant -20$. Вопрос об устойчивости ЦП решен (при $\beta \geqslant -20$) для всех точек $P(\alpha, \beta)$ из области 2, кроме пяти точек: P_* и P_k ($k = 1, 2, 3, 4$). В точке $P_*(1{,}064, 0{,}425)$ гамильтониан возмущенного движения H является изоэнергетически вырожденным (см. ниже) при учете в его разложении в ряд членов до шестой степени включительно относительно q_j, p_j. Для решения задачи об устойчивости в этой точке нужно учесть члены не ниже восьмой степени. Точки P_k ($k = 1, 2, 3, 4$) лежат на кривой резонанса четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$. В каждой из них величина $\varkappa$, определенная равенством (1.2), равна единице. На всей резонансной кривой ЦП устойчива, за исключением двух ее участков P_1P_2 и P_3P_4, на которых имеет место неустойчивость. Граничные точки P_k участков устойчивости и неустойчивости таковы:

$$P_1(1{,}052, -1{,}742),$$

$$P_2(1{,}087, -1{,}567),$$

$$P_3(1{,}072, 0{,}385), \quad P_4(1{,}056, 0{,}449)$$



Для этих точек вопрос об устойчивости решается в данной работе при помощи теоремы разд. 2.

Но сначала рассмотрим точку P_*. В этой точке $\omega_1 = 1{,}161$, $\omega_2 = 0{,}380$, поэтому нет резонанса до восьмого порядка включительно (т.е. $k_1\omega_1 \neq k_2\omega_2$ для натуральных k_1 и k_2, удовлетворяющих неравенствам $0 < k_1 + k_2 \leqslant 8$). При помощи канонического нормализующего преобразования, получаемого методом Депри – Хори [2], переменные q_j, p_j были выбраны так, что гамильтониан возмущенного движения принял нормальную форму до членов восьмой степени включительно

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + \sum_{k+l=2}^{4} c_{kl} r_1^k r_2^l + O\left((r_1 + r_2)^5\right) \tag{4.3}$$

$$q_j = \sqrt{2r_j}\sin\varphi_j, \quad p_j = \sqrt{2r_j}\cos\varphi_j$$

где c_{kl} – числовые коэффициенты. Приведение гамильтониана к нормальной форме (4.3) осуществлялось на компьютере в системе MAPLE V.

Введем обозначение

$$D_{2m} = \sum_{i=0}^{m} c_{m-i,i}\,\omega_1^i \omega_2^{m-i}$$

В точке P_* величины D_4 и D_6 равны нулю [8, 10], т.е. гамильтониан возмущенного движения изоэнергетически вырожден до членов шестой степени включительно. В членах же восьмой степени вырождение снимается, так как вычисления показывают, что $D_8 = 4.48 \neq 0$. Следовательно [2, 11, 12], для значений α, β, соответствующих точке P_*, ЦП спутника устойчива.

Для решения вопроса об устойчивости в точках P_k ($k = 1, 2, 3, 4$), лежащих на резонансной кривой $\omega_1 = 3\omega_2$, оказалось достаточным рассмотрение членов до шестой степени в разложении гамильтониана возмущенного движения. В этих точках гамильтониан при помощи метода Деприи – Хори и системы MAPLE V приводился к нормальной форме (2.1). Обозначим через Δ_k значение левой части неравенства (2.2) в точке P_k. Вычисления показывают, что

$$\Delta_1 = 0{,}076, \quad \Delta_2 = -0{,}097, \quad \Delta_3 = -3{,}158, \quad \Delta_4 = 5{,}475$$

Поэтому, согласно теореме разд. 2, в точках P_1 и P_4 ЦП спутника устойчива, а в точках P_2 и P_3 – неустойчива.

Таким образом, вопрос об устойчивости цилиндрической прецессии спутника для значений параметров α, β, лежащих внутри области 2 и удовлетворяющих неравенству $\beta \geqslant -20$ (только для таких значений β проводились вычисления), решен полностью. Она неустойчива на двух участках P_1P_2 и P_3P_4 резонансной кривой $\omega_1 = 3\omega_2$ и в двух их граничных точках P_2 и P_3, при остальных значениях параметров α, β она устойчива.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00405), Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (00-15-96088) и гранта Минобразования России в области технических наук (Т 00-14.1-528).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
2. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
3. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.
4. *Маркеев А.П.* О критическом случае резонанса четвертого порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 369–376.
5. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: ЧеРо, 1999. 569 с.
6. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
7. *Черноусько Ф.Л.* Об устойчивости регулярной прецессии спутника // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 155–157.
8. *Маркеев А.П.* Резонансные эффекты и устойчивость стационарных вращений спутника // Космич. исслед. 1967. Т. 5. Вып. 3. С. 365–375.
9. *Маркеев А.П.* Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 738–744.
10. *Маркеев А.П.* К задаче об устойчивости одного случая регулярной прецессии твердого тела в центральном гравитационном поле // Темат. сб. науч. тр. МАИ. 1978. № 460. С. 13–17.
11. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 91–192.
12. *Moser J.K.* Lectures on Hamiltonian Systems. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1968. = *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.XII.2000