УДК 531.36

А.В. Карапетян

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ СФЕРОИДА, ЗАПОЛНЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ, НА ПЛОСКОСТИ С ТРЕНИЕМ

Изучается движение тонкостенного сфероида, целиком заполненного идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение (волчок Кельвина). Предполагается, что сфероид опирается на горизонтальную плоскость, со стороны которой на него действуют нормальная реакция и сила вязкого трения скольжения. Составлены уравнения движения волчка Кельвина на плоскости с трением и получены условия их совместности. Найдены стационарные и периодические движения волчка Кельвина, исследованы вопросы устойчивости и ветвления этих движений.

Фундаментальные результаты в решении ряда задач динамики твердых тел с полостями, содержащими жидкость (динамика гироскопов, снарядов и спутников с жидким наполнением), принадлежат В.В. Румянцеву [1]. Задачи динамики твердых тел с жидким наполнением на горизонтальной плоскости изучены в меньшей степени [2], хотя опыты Кельвина с тонкостенным сфероидальным волчком, заполненным жидкостью, хорошо известны (см. [1]). Ниже изучается движение волчка Кельвина по горизонтальной плоскости при учете вязкого трения скольжения в точке контакта волчка с плоскостью (в отличие от рассмотренной ранее постановки задачи [2], предполагавшей, что в этой точке отсутствует либо трение, либо проскальзывание волчка).

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение тонкостенного сфероида, целиком заполненного идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение, по горизонтальной плоскости с учетом вязкого трения скольжения. Предположим, что массой стенок сфероида можно пренебречь по сравнению с массой жидкости. При этом центр масс системы и главные центральные оси инерции совпадают с центром S сфероида и его главными осями $Sx_1x_2x_3$ соответственно.

Пусть a_1, $a_2 = a_1$ и a_3 – полуоси сфероида, $\delta = a_1/a_3$, ga_3 – ускорение свободного падения, a_3v_i, ω_i, Ω_i, γ_i (i = 1, 2, 3) – проекции скорости центра масс сфероида, угловой скорости, половины вектора вихря и орта восходящей вертикали соответственно на оси Sx_i (i = 1,2,3), na_3 – величина нормальной реакции, отнесенная к массе жидкости, $\varkappa > 0$ – коэффициент вязкого трения скольжения, $r = \sqrt{\delta^2(\gamma_1^2+\gamma_2^2)+\gamma_3^2}$ (a_3r – расстояние от центра сфероида до опорной плоскости).

Уравнения движения системы, отнесенные к системе координат $Sx_1x_2x_3$, имеют вид (ср. с [1–4])

$$\dot v_1 + \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 = (n-g)\gamma_1 - \varkappa[v_1 + (\delta^2\omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3)r^{-1}]$$

$$\dot v_2 + \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 = (n-g)\gamma_2 - \varkappa[v_2 + (\omega_1\gamma_3 - \delta^2\omega_3\gamma_1)r^{-1}] \tag{1.1}$$

$$\dot v_3 + \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 = (n-g)\gamma_3 - \varkappa[v_3 + \delta^2(\omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2)r^{-1}]$$

$$\frac{(\delta^2-1)^2}{5(\delta^2+1)}(\ddot{\omega}_1-\omega_2\omega_3)+\frac{4\delta^2}{5(\delta^2+1)}(\dot{\Omega}_1-\Omega_2\omega_3)+\frac{2\delta^2}{5}\omega_2\Omega_3=-(\delta^2-1)n\gamma_2\gamma_3r^{-1}+$$

$$+\varkappa[(\delta^2 v_3\gamma_2-v_2\gamma_3)r+\delta^4(\omega_2\gamma_1-\omega_1\gamma_2)\gamma_2-(\omega_1\gamma_3-\delta^2\omega_3\gamma_1)\gamma_3]r^{-2}$$

$$\frac{(\delta^2-1)^2}{5(\delta^2+1)}(\ddot{\omega}_2+\omega_1\omega_3)+\frac{4\delta^2}{5(\delta^2+1)}(\dot{\Omega}_2+\Omega_1\omega_3)-\frac{2\delta^2}{5}\omega_1\Omega_3=(\delta^2-1)n\gamma_1\gamma_3r^{-1}+$$

$$+\varkappa[-(\delta^2 v_3\gamma_1-v_1\gamma_3)r-\delta^4(\omega_2\gamma_1-\omega_1\gamma_2)\gamma_1-(\omega_2\gamma_3-\delta^2\omega_3\gamma_2)\gamma_3]r^{-2} \tag{1.2}$$

$$\frac{2}{5}\dot{\Omega}_3+\frac{4}{5(\delta^2+1)}(\omega_1\Omega_2-\omega_2\Omega_1)=\varkappa[(v_2\gamma_1-v_1\gamma_2)r+(\omega_1\gamma_1+\omega_2\gamma_2)\gamma_3-$$

$$-\delta^2\omega_3(\gamma_1^2+\gamma_2^2)]r^{-2}$$

$$\dot{\Omega}_1+\frac{2\delta^2}{\delta^2+1}(\omega_2-\Omega_2)\Omega_3-(\omega_3-\Omega_3)\Omega_2=0$$

$$\dot{\Omega}_2-\frac{2\delta^2}{\delta^2+1}(\omega_1-\Omega_1)\Omega_3+(\omega_3-\Omega_3)\Omega_1=0 \tag{1.3}$$

$$\dot{\Omega}_3+\frac{2}{\delta^2+1}(\omega_1\Omega_2-\omega_2\Omega_1)=0$$

$$\dot{\gamma}_1+\omega_2\gamma_3-\omega_3\gamma_2=0,\ \dot{\gamma}_2+\omega_3\gamma_1-\omega_1\gamma_3=0,\ \dot{\gamma}_3+\omega_1\gamma_2-\omega_2\gamma_1=0 \tag{1.4}$$

$$v_1\gamma_1+v_2\gamma_2+v_3\gamma_3+[(\delta^2\omega_3\gamma_2-\omega_2\gamma_3)+(\omega_1\gamma_3-\delta^2\omega_3\gamma_1)+\delta^2(\omega_2\gamma_1-\omega_1\gamma_2)]r^{-1}=0 \tag{1.5}$$

Системы (1.1) и (1.2) выражают теоремы об изменении соответственно импульса и кинетического момента сфероида, система (1.3) – теорему Гельмгольца, система (1.4) – условие постоянства орта восходящей вертикали в неподвижной системе отсчета, а уравнение (1.5) – условие безотрывного движения сфероида по плоскости. Система (1.1) – (1.5) замкнута относительно переменных v_i, ω_i, Ω_i, γ_i ($i = 1, 2, 3$) и n.

2. Анализ уравнений движения. Прежде всего заметим, что система (1.1) – (1.5) не содержит производной от переменной ω_3, что связано с пренебрежением массой сфероида и его симметричностью относительно оси Sx_3. Поэтому вопрос о совместности системы (1.1) – (1.5) требует дополнительного обсуждения. Рассмотрим третьи уравнения систем (1.2) и (1.3). Очевидно, они совместны, если и только если выполняется соотношение

$$\delta^2\omega_3(\gamma_1^2+\gamma_2^2)=(\omega_1\gamma_1+\omega_2\gamma_2)\gamma_3+(v_2\gamma_1-v_1\gamma_2)r \tag{2.1}$$

Таким образом, третье уравнение системы (1.2) следует заменить уравнением (2.1), которое служит для определения переменной ω_3 и с помощью которого эту переменную (во всяком случае при $\gamma_1^2+\gamma_2^2\neq 0$) можно исключить из остальных уравнений системы (1.1) – (1.5).

Далее, умножая i-е уравнение системы (1.1) на γ_i ($i = 1, 2, 3$) и складывая почленно полученные соотношения, имеем (при учете уравнения (1.5))

$$n=g+d(v_1\gamma_1+v_2\gamma_2+v_3\gamma_3)/dt \tag{2.2}$$

С другой стороны, уравнение (1.5) при помощи соотношения (2.1) можно представить в виде

$$v_1\gamma_1 + v_2\gamma_2 + v_3\gamma_3 = (\delta^2 - 1)(\omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1)\gamma_3 / r \tag{2.3}$$

Таким образом (см. (2.2) и (2.3)),

$$n = g + \ddot{r} \quad \left(r = \sqrt{\delta^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \gamma_3^2} \equiv \sqrt{\delta^2(1 - \gamma_3^2) + \gamma_3^2} \right) \tag{2.4}$$

Следовательно, при помощи соотношений (2.3) и (2.4) из уравнений (1.1), (1.2) можно исключить переменные v_3 и n; при этом уравнение (1.5) следует заменить уравнением (2.3), которое служит для определения переменной v_3, а третье уравнение системы (1.1) – отбросить.

Итак, движение тонкостенного сфероида, заполненного идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение, на горизонтальной плоскости с трением можно, вообще говоря, описать системой дифференциальных уравнений, которую составляют первое и второе уравнения (1.1), первое и второе уравнения (1.2) (все – при учете соотношений (2.1), (2.3), (2.4)), уравнения (1.3) и (1.4) (все – при учете соотношений (2.1)). Эта система десятого порядка служит для определения десяти независимых переменных v_1, v_2, ω_1, ω_2, Ω_1, Ω_2, Ω_3, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и допускает два первых интеграла (Гельмгольца и геометрический)

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \delta^2\Omega_3^2 = \text{const}, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{2.5}$$

Переменные ω_3 и v_3 определяются из конечных уравнений (2.1) и (2.3) соответственно, а соотношение (2.4) служит для определения нормальной реакции.

3. Стационарные и периодические движения. Очевидно, уравнения движения сфероида, приведенные выше, допускают стационарные движения вида

$$\begin{gathered} v_1 = v_2 = v_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \omega_1 = \omega_2 = \Omega_1 = \Omega_2 = 0, \quad \gamma_3 = \pm 1 \\ \omega_3 = \omega, \quad \Omega_3 = \Omega \end{gathered} \tag{3.1}$$

(ω и Ω – произвольные постоянные; при этом $n = g$) и вида

$$\begin{gathered} v_1 = v_2 = v_3 = \gamma_3 = \omega_3 = \Omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = \alpha, \quad \gamma_2 = \beta(\alpha^2 + \beta^2 = 1) \\ \omega_1 = \delta^2\omega\alpha, \quad \omega_2 = \delta^2\omega\beta, \quad \Omega_1 = \delta^2\Omega\alpha, \quad \Omega_2 = \delta^2\Omega\beta \end{gathered} \tag{3.2}$$

(ω и Ω – произвольные постоянные, α и β – произвольные постоянные, связанные соотношением $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; при этом по-прежнему $n = g$). Эти решения отвечают равномерным вращениям сфероида вокруг вертикально расположенной оси симметрии (решение (3.1)) или вертикально расположенного диаметра экваториального сечения сфероида (решение (3.2)).

Найдем условия существования регулярных прецессий сфероида, которые будем искать в виде

$$\begin{gathered} v_1 = v_2 = v_3 = 0, \quad \gamma_3 = \gamma, \quad \omega_3 = \omega\gamma, \quad \Omega_3 = \Omega\gamma \\ \omega_1 = \delta^2\omega\gamma_1, \quad \omega_2 = \delta^2\omega\gamma_2, \quad \Omega_1 = \mu\delta^2\Omega\gamma_1, \quad \Omega_2 = \mu\delta^2\Omega\gamma_2 \end{gathered} \tag{3.3}$$

где γ, ω, Ω и μ – постоянные (при этом $n = g$).

Подставляя соотношения (3.3) в уравнения движения сфероида и полагая $\Omega = k\omega$, заключаем, что γ_1 и γ_2 должны удовлетворять системе двух дифференциальных уравнений

$$\dot{\gamma}_1 = -\omega(\delta^2 - 1)\gamma\gamma_2, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega(\delta^2 - 1)\gamma\gamma_1 \tag{3.4}$$

а четыре постоянные μ, ω, γ и $k = \Omega/\omega$ – двум конечным соотношениям

$$\mu[k(\delta^2 - 1) + \delta^2(\delta^2 + 1)] = 2\delta^2 \tag{3.5}$$

$$2k^2 + k(\delta^2 - 1)(1 + F) + \delta^2[(\delta^2 + 1)F - (\delta^2 - 1)] = 0 \tag{3.6}$$

где

$$F = F(\omega, \gamma) = \frac{5g}{\omega^2\delta^4\sqrt{\delta^2(1-\gamma^2)+\gamma^2}} \tag{3.7}$$

Из уравнений (3.4) следует, что γ_1 и γ_2 – периодические функции времени (при $\omega\gamma \neq 0$), при этом (см. (3.3)) ω_1, ω_2, Ω_1 и Ω_2 – тоже периодические функции времени. Постоянная μ определяется из уравнения (3.5), а постоянная k – из уравнения (3.6). Таким образом, регулярные прецессии существуют, если разрешимо уравнение (3.6), и образуют двухпараметрические семейства (свободные параметры $\omega \in \mathbf{R}$ и $\gamma \in [-1; 1]$).

При $\gamma = \pm 1$ или $\gamma = 0$ решения (3.3) переходят в равномерные вращения сфероида вокруг вертикально расположенной оси симметрии (3.1) или вокруг вертикально расположенного диаметра экваториального сечения сфероида (3.2) соответственно.

• Условие существования регулярных прецессий (3.3) (условие разрешимости уравнения (3.6)) имеет вид

$$(\delta^2 - 1)^2F^2 - 2(3\delta^4 + 6\delta^2 - 1)F + (\delta^2 - 1)(9\delta^2 - 1) \geqslant 0 \tag{3.8}$$

и, вообще говоря, накладывает ограничение на параметры ω и γ (см. (3.7)). Неравенство (3.8) имеет место, если $F \leqslant F_1$ или $F \geqslant F_2$, где

$$F_1 = \frac{(\delta-1)(3\delta+1)}{(\delta+1)^2}, \quad F_2 = \frac{(\delta+1)(3\delta-1)}{(\delta-1)^2}$$

Поскольку $F > 0$ (см. (3.7)), то неравенство $F \leqslant F_1$ может выполняться только при $\delta > 1$, а неравенство $F \geqslant F_2$ всегда выполняется при $3\delta \leqslant 1$.

Заметим, что наибольший интерес стационарные и периодические движения (3.1)–(3.3) представляют в случае $0 < \Omega/\omega \leqslant 1$, т.е. в случае $0 < k \leqslant 1$. Если $0 < k \ll 1$, то уравнение (3.6) можно представить в виде

$$\frac{5g}{\omega^2\delta^4\sqrt{\delta^2(1-\gamma^2)+\gamma^2}} = \frac{\delta^2-1}{\delta^2+1}\left(1 - \frac{2}{\delta^2+1}k\right) + o(k) \tag{3.9}$$

При этом регулярные прецессии существуют только в случае $\delta > 1$. Если $k = 1$, то уравнение (3.6) можно представить в виде

$$\frac{5g}{\omega^2\delta^4\sqrt{\delta^2(1-\gamma^2)+\gamma^2}} = \frac{\delta^4 - 2\delta^2 - 1}{\delta^4 + 2\delta^2 - 1} \tag{3.10}$$

При этом регулярные прецессии существуют, если $\delta^2 \in (0, \sqrt{2} - 1) \cup (\sqrt{2} + 1, +\infty)$.

4. Устойчивость равномерных вращений сфероида. Рассмотрим стационарное движение (3.1) и выпишем в его окрестности линеаризованные уравнения возмущенного движения, полагая

$$\omega_3 = \omega + \omega_3', \quad \Omega_3 = \Omega + \Omega_3', \quad \gamma_3 = 1 + \gamma_3', \quad n = g + n'$$

и оставляя для остальных переменных v_i (i = 1, 2, 3), ω_j, Ω_j, γ_j (j = 1,2) их прежние обозначения. Исключая переменные $v_3, \omega_3', \Omega_3', \gamma_3'$ и n' с помощью соотношений (2.1), (2.3), (2.4), (2.5), после несложных, но достаточно громоздких вычислений получим

$$\dot{\gamma}_1 - \omega\gamma_2 + \omega_2 = 0 \tag{4.1}$$

$$\dot{\gamma}_2 + \omega\gamma_1 - \omega_1 = 0$$

$$\dot{\Omega}_1 - \omega\Omega_2 - \frac{\delta^2 - 1}{\delta^2 + 1}\Omega\Omega_2 + \frac{2\delta^2}{\delta^2 + 1}\Omega\omega_2 = 0 \tag{4.2}$$

$$\dot{\Omega}_2 + \omega\Omega_1 + \frac{\delta^2 - 1}{\delta^2 + 1}\Omega\Omega_1 - \frac{2\delta^2}{\delta^2 + 1}\Omega\omega_1 = 0$$

$$\dot{v}_1 - \omega v_2 + \varkappa v_1 + \varkappa\omega\delta^2\gamma_2 - \varkappa\omega_2 = 0 \tag{4.3}$$

$$\dot{v}_2 + \omega v_1 + \varkappa v_2 - \varkappa\omega\delta^2\gamma_1 + \varkappa\omega_1 = 0$$

$$\dot{\omega}_1 - \omega\omega_2 + 5\varkappa\frac{\delta^2 + 1}{(\delta^2 - 1)^2}\omega_1 + \frac{2\delta^2}{\delta^2 + 1}\Omega\omega_2 - 5\varkappa\frac{\delta^2(\delta^2 + 1)}{(\delta^2 - 1)^2}\omega\gamma_1 +$$

$$+5g\frac{\delta^2 + 1}{\delta^2 - 1}\gamma_2 + \frac{4\delta^2}{\delta^4 - 1}\Omega\Omega_2 + 5\varkappa\frac{\delta^2 + 1}{(\delta^2 - 1)^2}v_2 = 0 \tag{4.4}$$

$$\dot{\omega}_2 + \omega\omega_1 + 5\varkappa\frac{\delta^2 + 1}{(\delta^2 - 1)^2}\omega_2 - \frac{2\delta^2}{\delta^2 + 1}\Omega\omega_1 - 5\varkappa\frac{\delta^2(\delta^2 + 1)}{(\delta^2 - 1)^2}\omega\gamma_2 -$$

$$-5g\frac{\delta^2 + 1}{\delta^2 - 1}\gamma_1 - \frac{4\delta^2}{\delta^4 - 1}\Omega\Omega_1 - 5\varkappa\frac{\delta^2 + 1}{(\delta^2 - 1)^2}v_1 = 0$$

Полагая теперь

$$x = (\gamma_1 + i\gamma_2)e^{i\omega t}, \quad y = (\Omega_1 + i\Omega_2)e^{i\omega t} \tag{4.5}$$

$$v = (v_1 + iv_2)e^{i\omega t}, \quad w = (\omega_1 + i\omega_2)e^{i\omega t}$$

приведем систему восьмого порядка (4.1)–(4.4) относительно восьми действительных переменных к системе четвертого порядка относительно четырех комплексных переменных x, y, v и w:

$$\dot{x} - iw = 0$$

$$\dot{y} + i\frac{\delta^2 - 1}{\delta^2 + 1}\Omega y - 2i\frac{\delta^2}{\delta^2 + 1}\Omega w = 0$$

$$\dot{v} + \varkappa v - i\varkappa\omega\delta^2 x + i\varkappa w = 0 \tag{4.6}$$

$$\dot{w} + \left[5\varkappa\frac{\delta^2 + 1}{(\delta^2 - 1)^2} - 2i\frac{\delta^2}{\delta^2 + 1}\Omega\right]w - 5\frac{\delta^2 + 1}{(\delta^2 - 1)^2}[\varkappa\omega\delta^2 + i(\delta^2 - 1)g]x -$$

$$-4i\frac{\delta^2}{\delta^4 - 1}\Omega y + 5i\varkappa\frac{\delta^2 + 1}{(\delta^2 - 1)^2}v = 0$$

Характеристическое уравнение для системы (4.6) имеет вид

$$f(\lambda) \equiv \lambda^4 + (p_1 + iq_1)\lambda^3 + (p_2 + iq_2)\lambda^2 + (p_3 + iq_3)\lambda + iq_4 = 0 \tag{4.7}$$

$$p_1 = \frac{\delta^4 + 3\delta^2 + 6}{(\delta^2 - 1)^2}\varkappa, \quad p_2 = \frac{5(\delta^2 + 1)g + 2\delta^2\Omega^2}{\delta^2 - 1}$$

$$p_3 = \frac{5(\delta^2 + 1)g + 2\delta^2\Omega^2 + 5\delta^2\Omega\omega}{\delta^2 - 1}\varkappa$$

$$q_1 = -\Omega, \quad q_2 = -\frac{5\delta^2(\delta^2 + 1)\omega + (\delta^4 - 7\delta^2 + 6)\Omega}{(\delta^2 - 1)^2}\varkappa$$

$$q_3 = 5\Omega g, \quad q_4 = 5\Omega g\varkappa$$

Очевидно, перманентное вращение (3.1) устойчиво, причем асимптотически по всем переменным, кроме, вообще говоря, переменной Ω_3, если все корни уравнения (4.7) лежат в левой полуплоскости (см. соотношения (4.5), (2.1), (2.3), (2.5)), и неустойчиво, если по крайней мере один корень этого уравнения лежит в правой полуплоскости.

Все корни уравнения (4.7) имеют отрицательные вещественные части, если и только если матрица Джури

$$\begin{Vmatrix} 1 & -q_1 & -p_2 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -q_1 & -p_2 & q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_1 & -p_2 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_1 & -q_2 & -p_3 & q_4 \\ 0 & 0 & p_1 & -q_2 & -p_3 & q_4 & 0 \\ 0 & p_1 & -q_2 & -p_3 & q_4 & 0 & 0 \\ p_1 & -q_2 & -p_3 & q_4 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{4.8}$$

иннорно положительна [5]. Условия иннорной положительности матрицы (4.8) имеют вид трех неравенств, накладывающих ограничения на параметры сфероида (т.е. на δ) и параметры равномерного вращения (3.1) (т.е. на ω и Ω). От коэффициента трения $\varkappa \in (0; +\infty)$ они не зависят.

5. Анализ частных случаев. В общем случае условия иннорной положительности матрицы (4.8) весьма громоздки, поэтому ограничимся исследованием частных случаев слабовихревого ($0 < \Omega/\omega \ll 1$) и твердотельного ($\Omega = \omega$) движений жидкости.

При $0 < \Omega/\omega \ll 1$ все корни уравнения (4.7) лежат в левой полуплоскости, если и только если

$$(\delta^2 - 1)[g(\delta^4 + 3\delta^2 + 6 + o(1)) - \delta^4\omega^2(\delta^2 - 1)] > 0 \tag{5.1}$$

$$(\delta^2 - 1)[5g(\delta^2 + 1 + o(1)) - \delta^4\omega^2(\delta^2 - 1)] > 0 \tag{5.2}$$

Следовательно, равномерные вращения сфероида, заполненного жидкостью, совершающей слабовихревое движение, вокруг вертикально расположенной оси симметрии (решения (3.1) при $0 < \Omega/\omega \ll 1$) устойчивы, если сфероид сжат вдоль оси симметрии ($\delta > 1$) и его угловая скорость достаточно мала ($\omega^2 < \omega_{01}^2$). Здесь (см. (5.1) и (5.2))

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{5g(\delta^2 + 1)}{\delta^4(\delta^2 - 1)}(1 + o(1))} \tag{5.3}$$

При критическом значении (5.3) угловой скорости происходит потеря устойчивости равномерных вращений (3.1), для которых $0 < \Omega/\omega \ll 1$, связанная с рождением регулярных прецессий (3.3), для которых $0 < k \ll 1$. Эти прецессии существуют только при $\delta > 1$ и $\omega_{00}^2 < \omega^2 < \omega_{01}^2$, где $\omega_{00} = \omega_{01}/\sqrt{\delta}$.

При $\omega^2 = \omega_{00}^2$ регулярные прецессии (3.3) ($0 < k \ll 1$) переходят в равномерные вращения сфероида вокруг вертикально расположенного диаметра его экваториального сечения (3.2) ($0 < \Omega/\omega \ll 1$), которые устойчивы (согласно теории бифуркаций [6]) при достаточно большой угловой скорости ($\omega^2 > \omega_{00}^2$), если $\delta > 1$, а также при любой угловой скорости, если $\delta < 1$.

При $\Omega = \omega$ все корни уравнения (4.7) лежат в левой полуплоскости, если и только если

$$(\delta^2-1)[5g(\delta^2+1)^2(\delta^4+3\delta^2+6)-\omega^2\delta^4(7\delta^6-15\delta^4+9\delta^2-41)]>0 \tag{5.4}$$

$$\begin{gathered}(\delta^2-1)[125g^3(\delta^2+1)^5-25g^2\omega^2\delta^4(\delta^2+1)(\delta^6-\delta^4-\delta^2-23)-\\ -40g\omega^4\delta^4(2\delta^8-3\delta^6-10\delta^4-17\delta^2+6)-56\omega^6\delta^8(\delta^4-2\delta^2-1)]>0\end{gathered} \tag{5.5}$$

$$(\delta^2-1)[5g(\delta^4+2\delta^2-1)-\omega^2\delta^4(\delta^4-2\delta^2-1)]>0 \tag{5.6}$$

Следовательно, равномерные вращения сфероида, заполненного жидкостью, совершающей однородное вихревое движение, при котором жидкость и оболочка вращаются как одно целое, вокруг вертикально расположенной оси симметрии устойчивы, только если сфероид сжат вдоль оси симметрии ($\delta > 1$). При этом решения (3.1), для которых $\Omega = \omega$, устойчивы при любой угловой скорости в случае слабо сжатого ($\delta^2 \leqslant \sqrt{2}+1$) сфероида и при достаточно малой угловой скорости ($\omega^2 < \omega_{11}^2$) в случае сильно сжатого ($\delta^2 > \sqrt{2}+1$) сфероида (см. (5.4)–(5.6)). Здесь

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{5g(\delta^4+2\delta^2-1)}{\delta^4(\delta^4-2\delta^2-1)}} \tag{5.7}$$

При критическом значении (5.7) угловой скорости происходит потеря устойчивости равномерных вращений (3.1) ($\Omega = \omega$) сильно сжатого ($\delta^2 > \sqrt{2}+1$) сфероида, связанная с рождением регулярных прецессий (3.3) ($k = 1$). Эти прецессии существуют, если $\delta^2 > \sqrt{2}+1$, только при $\omega_{10}^2 < \omega^2 < \omega_{11}^2$, где $\omega_{10} = \omega_{11}/\sqrt{\delta}$.

При $\omega^2 = \omega_{10}^2$ регулярные прецессии (3.3) ($k = 1$) переходят в равномерные вращения сфероида вокруг вертикально расположенного диаметра его экваториального сечения (3.2) ($\Omega = \omega$), которые устойчивы (согласно теории бифуркации) при $\delta^2 > \sqrt{2}+1$ и $\omega^2 > \omega_{10}^2$.

Замечание. Регулярные прецессии (3.3), для которых $k = 1$ ($\Omega = \omega$), существуют (см. разд. 3) и в случае сильно вытянутого сфероида ($\delta^2 < \sqrt{2}-1$), если $\omega_{11}^2 < \omega^2 < \omega_{10}^2$. При ω_{11}^2 и ω_{10}^2 эти прецессии переходят в равномерные вращения (3.1) или (3.2) ($\Omega = \omega$) соответственно. При $\omega^2 = \omega_{11}^2$ изменяется число корней уравнения (4.7) с положительной вещественной частью, которые всегда существуют, если $\delta < 1$ (см. соотношения (5.4)–(5.6)). Можно показать что ω_{10}^2 – критическое значение угловой скорости равномерных вращений (3.2) ($\Omega = \omega$) сильно вытянутого ($\delta^2 < \sqrt{2}-1$) сфероида: при $\omega^2 < \omega_{10}^2$ эти вращения устойчивы, а при $\omega^2 > \omega_{10}^2$ – неустойчивы. Равномерные вращения (3.2) ($\Omega = \omega$) слабо вытянутого ($\sqrt{2}-1 \leqslant \delta^2 < 1$) сфероида устойчивы при любой угловой скорости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00141) и Программы поддержки ведущих научных школ (00-15-96150).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
2. *Маркеев А.П.* Об устойчивости вращения волчка с полостью, наполненной жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 19–26.
3. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 168 с.
4. *Карапетян А.В., Проконина О.В.* Об устойчивости равномерных вращений волчка с полостью, заполненной жидкостью, на плоскости с трением // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 85–91.
5. *Juri E.I.* Inners and Stability of Dynamical Systems. N.Y., etc.: Wiley, 1974 = *Джури Э.И.* Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979. 299 с.
6. *Marsden J.E., Mc Cracken M.* The Hopf Bifurcation and its Applications. N.Y.: Springer, 1976 = *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.XII.2000