УДК 531.36

© 2001 г. А.П. Иванов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСИВНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Рассматриваются механические системы, подверженные в заданные моменты времени импульсивной нагрузке. Импульсивные силы зависят от обобщенных координат и приводят к изменению обобщенных скоростей системы. Уравнения такого типа описывают колебания сооружений при сейсмических толчках, динамику систем твердых тел, находящихся на движущемся поезде или приземляющемся самолете и т.п. Моменты скачков могут иметь предельные точки, как в случае ударов, затухающих в геометрической прогрессии. Обсужден ряд проблем, связанных с устойчивостью движений. Прежде всего, установлены общие свойства решений с бесконечным числом скачков: существование, единственность и характер зависимости от параметров и начальных условий. Полученные результаты дают возможность, в частности, применять для исследования устойчивости метод линеаризации. Особое внимание уделено нелинейным гамильтоновым системам с обобщенным (импульсивным) потенциалом. Показано, что они обладают каноническим фазовым потоком, и для исследования устойчивости можно использовать КАМ-теорию. Важной частью такого исследования является задача о построении области устойчивости в первом приближении, решение которой часто связано с анализом уравнения Хилла. Получен ряд достаточных условий устойчивости тривиального решения уравнения Хилла с периодическими толчками, обобщающих известные критерии, относящиеся к гладким системам. Подробно рассмотрен пример маятника, к точке подвеса которого периодически прикладываются равные вертикальные импульсы.

Ранее системы с импульсными воздействиями рассматривались в предположении об отсутствии биений [1–3]; показано, что характеристическое уравнение для линейной гамильтоновой системы возвратно и устойчивость возможна лишь в критических случаях.

1. Общие свойства решений. Рассмотрим систему

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}=\mathbf{Q}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\sum_{\alpha\in A}\mathbf{I}_\alpha(\mathbf{q})\delta(t-\tau_\alpha),\quad \mathbf{q}\in R^n \tag{1.1}$$

где $\mathbf{q}$ – обобщенные координаты, T – кинетическая энергия, $\mathbf{Q}\in R^n$ – обобщенные силы, I_α – импульсы, прилагаемые к системе в заданные моменты времени τ_α, принадлежащие некоторому счетному множеству А, δ – функция Дирака. Наличие импульсивных воздействий приводит к скачкообразному изменению фазовых переменных в соответствии с формулами

$$\mathbf{q}(\tau_\alpha+0)=\mathbf{q}(\tau_\alpha-0),\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\tau_\alpha+0)=\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\tau_\alpha-0)+I_\alpha \tag{1.2}$$

Множество А может иметь предельные точки $\tau_1^*,\tau_2^*,\ldots$, при этом оно является конечным или счетным объединением монотонно возрастающих последовательностей, одна из которых может быть неограниченной, остальные стремятся к $\tau_1^*, \tau_2^*, \ldots$ (саму последовательность $\{\tau_k^*\}$ будем считать конечной или неограниченно возрастающей, причем значения τ_k^* не входят в множество А).

Прежде всего, дадим определение решений системы (1.1).

Определение 1. Функция $\mathbf{q}(t)$ называется решением системы (1.1), (1.2) на интервале времени J со скачками в моменты $\{\tau_k\}$, если:

1) функция $\mathbf{q}(t)$ непрерывна на J и дважды дифференцируема при $t \neq \tau_k$, при этом удовлетворяются уравнения (1.1);

2) скачки описываются соотношениями (1.2);

3) если τ^* – предельная точка для последовательности моментов скачков, сама не являющаяся таким моментом, то производная $\dot{\mathbf{q}}(t)$ непрерывна в точке $t = \tau^*$.

Заметим, что последнее свойство прямо не вытекает из уравнений движения, однако оно существенно для возможности однозначного продолжения решения для значений $t > \tau^*$. Его механический смысл состоит в отсутствии импульсивных воздействий в моменты времени, не принадлежащие множеству А. В случае $\tau^* \in$ А скачок описывается формулами (1.2).

Зададим в расширенном фазовом пространстве системы (1.1) область $\Omega_1 = J_1 \times \times \overline{D} \times \overline{K}^n$, где $J_1 = [t_0, t_1]$, $t_1 \in (\tau_1^*, \tau_2^*)$, $\overline{D}$ – компактная область в конфигурационном пространстве, $\overline{K}^n = \{|\dot{q}_j| \leqslant K,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ – куб в пространстве обобщенных скоростей.

Предложение 1. Допустим, что

1) кинетическая энергия T и обобщенные силы $\mathbf{Q}$ описываются функциями, непрерывно дифференцируемыми в области: Ω_1;

2) в области $\overline{D}$ импульсы I_k равномерно мажорируются некоторым сходящимся числовым рядом, т.е. для любого $\mathbf{q} \in \overline{D}$ имеем

$$\|I_k(\mathbf{q})\| \leqslant a_k,\ a_1 + a_2 + \ldots < \infty$$

Тогда система (1.1) для любых начальных условий $\mathbf{q}(t_0) \in D$, $\dot{\mathbf{q}}(t_0) \in K^n$ имеет единственное решение. Это решение можно продолжить до границы области Ω_1.

Доказательство. Общие свойства решений с конечным числом импульсивных воздействий установлены ранее [1, 2]: решение, попадающее на границу области Ω_1 ранее момента τ_1^*, единственно. Поэтому остается рассмотреть случай решения, включающего бесконечную последовательность импульсов.

Обозначим $\mathbf{u}_N(t) = (\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))_N$ решение системы (1.1) с данными начальными условиями, испытывающее импульсивные воздействия (1.2) лишь в моменты $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$. Тогда в силу сделанных предположений последовательность $\{\mathbf{u}_N(\tau^* - 0)\}_{N=1}^{\infty}$ фундаментальна в R^{2n}. В пределе при $N \to \infty$ получим решение $\mathbf{u}(t) = (\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ на интервале (t_0, τ_1^*), которое продолжается для $t \in (\tau_1^*, t_1)$ единственным образом в силу данного определения решения, что и требуется.

Следствие. Построенное решение можно аналогичным образом продолжить для $t \in (\tau_2^*, \tau_3^*)$ и т.д. при выполнении условия мажорируемости 2 для каждой из последовательностей импульсов.

Исследуем теперь вопрос о характере зависимости решений с бесконечным числом скачков от параметров или начальных условий. Будем считать, что в уравнении (1.1) функции T, $\mathbf{Q}$ и I_α зависят от параметра $\mu \in R^s$, где s – некоторое натуральное число.

Предложение 2. Допустим, что

1) кинетическая энергия T и обобщенные силы Q описываются функциями, непре-

рывно дифференцируемыми в области $\Omega_1 \times M$, где M – некоторая область в пространстве параметров, а функции $I_k(\mathbf{q}, \mu)$ непрерывно дифференцируемы в области $\overline{D} \times M$;

2) в области $\overline{D} \times M$ импульсы I_k равномерно мажорируются некоторым сходящимся числовым рядом, т.е. для любых $\mathbf{q} \in \overline{D}$, $\mu \in M$ имеем $\|I_k(q, \mu)\| \leqslant a_k$, $a_1 + a_2 + \ldots < \infty$;

3) в области $\overline{D} \times M$ матрицы Якоби $(\partial I_k/\partial\mu)$ равномерно мажорируются сходящимся числовым рядом, т.е. для любых $\mathbf{q} \in \overline{D}$, $\mu \in M$ имеем для некоторой нормы в пространстве матриц размерности $n \times s$ $\|\partial I_k(\mathbf{q}, \mu)/\partial\mu\| \leqslant b_k$, $b_1 + b_2 + \ldots < \infty$.

Тогда решения системы (1.1) в области $\Omega \times M$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями параметров. Кроме того, для тех значений t, для которых решение определено, производная $\partial\mathbf{u}(t)/\partial\mu = (\partial\mathbf{q}(t)/\partial\mu, \partial\dot{\mathbf{q}}(t)/\partial\mu)$ является пределом последовательности производных $\partial\mathbf{u}_N(t)/\partial\mu$ при $N \to \infty$ (функции $\mathbf{u}_N(t)$ определены при доказательстве предложения 1).

Доказательство данного утверждения проводится по аналогии с доказательством предложения 1. При этом используется теорема о дифференцируемости последовательности отображений [4].

Следствия 1°. Выбирая в качестве параметров отклонения начальных условий для уравнения (1.1) от некоторых фиксированных значений, получим теорему о дифференцируемости решения по начальным условиям.

2°. Предложение 2 допускает обобщение на случай производных старших порядков на основе соответствующего результата для последовательности отображений [4]. Если условие мажорируемости типа 3 выполнено не только для первой производной, но и для всех производных до порядка m включительно, то задача Коши имеет m раз дифференцируемое решение, причем его производные порядков $1, \ldots, m$ для $t > \tau^*$ вычисляются как пределы соответствующих производных последовательности $\{u_N(t)\}$.

Допустим далее, что $\mathbf{q}°(t)$ – некоторое решение системы (1.1), определенное на неограниченном интервале $t > t_0$. Можно дать обычные определения устойчивости этого решения по Ляпунову и асимптотической устойчивости. В случае выполнения условий предложений 1, 2 для исследования устойчивости можно применять метод линеаризации. Его особенность в случае, когда моменты импульсивных воздействий имеют предельную точку $\tau^* < \infty$, связана с необходимостью вычисления бесконечных произведений соответствующих матриц Якоби. Сходимость этих произведений можно установить, пользуясь предложением 2.

2. Гамильтоновы системы с импульсивными воздействиями. Важный частный случай механических систем описывается уравнениями вида

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}$$

где $\mathbf{p} = \partial T/\partial\dot{\mathbf{q}} \in R^n$ – обобщенные импульсы, $H = H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ – функция Гамильтона, удовлетворяющая определенным условиям гладкости. Если добавить к гамильтониану обобщенную функцию $\sum\limits_{\alpha\in A} U_\alpha(\mathbf{q})\delta(t-\tau_\alpha)$, где функции $U_\alpha(\mathbf{q})$ дифференцируемы, то получим такую каноническую систему с импульсивными воздействиями:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \sum_{\alpha\in A} \mathbf{I}_\alpha(\mathbf{q})\delta(t-\tau_\alpha), \quad \mathbf{I}_\alpha = \operatorname{grad} U_\alpha \tag{2.1}$$

В гамильтоновой системе преобразование фазовых переменных, осуществляемое фазовым потоком, является каноническим преобразованием [5]. Это означает, что для любого момента времени $t_k > t_0$ связь между начальными значениями фазовых переменных $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ и их значениями $(\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k)$ при $t = t_k$ можно выразить при помощи некоторой производящей функции $S(t_k, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_k)$ по формулам

$$\mathbf{q}_k = \partial S/\partial \mathbf{p}_k, \quad \mathbf{p}_0 = \partial S/\partial \mathbf{q}_0$$

Предложение. Фазовый поток системы (2.1) задает для $t \neq \tau_\alpha$ ($\alpha \in$ A) каноническое преобразование.

Доказательство данного утверждения сводится к проверке каноничности импульсивного преобразования фазовых переменных в момент скачка τ_α, выражаемого формулами

$$\mathbf{q}(\tau_\alpha + 0) = \mathbf{q}(\tau_\alpha - 0), \quad \mathbf{p}(\tau_\alpha + 0) = \mathbf{p}(\alpha_\alpha - 0) + \mathbf{I}_\alpha(\mathbf{q}(\tau_\alpha)) \tag{2.2}$$

Как нетрудно проверить, преобразование (2.2) можно задать при помощи производящей функции

$$S_\alpha = \mathbf{q}(\tau_\alpha - 0)\mathbf{p}(\tau_\alpha + 0) + U_\alpha(\tau_\alpha - 0)$$

Допустим, что интервал (t_0, t_k) включает конечное число моментов скачков $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_S$. Тогда преобразование $\Pi_k : (q_0, p_0) \to (q_k, p_k)$ можно представить в виде композиции канонических отображений

$$\Pi_k = N(\tau_s, t_k) \circ U_s \circ N(\tau_{s-1}, \tau_s) \circ \ldots \circ U_1 \circ N(t_0, \tau_1) \tag{2.3}$$

Здесь U_j – преобразование (2.2), где $\alpha = j$, а $N(a, b)$ – преобразование вдоль фазового потока регулярной части системы (2.1) между моментами $t = a + 0$ и $t = b - 0$. Так как канонические преобразования образуют группу, формула (2.3) определяет отображение этого же типа.

Предположим теперь, что интервалу (t_0, t_k) принадлежит бесконечная последовательность точек разрыва $\tau_j \to \tau^*$, причем выполнены условия предложения 1. В этом случае произведение (2.3) будет бесконечным:

$$\Pi_k = N(\tau^*, t_k) \circ \ldots \circ U_s \circ N(\tau_{s-1}, \tau_s) \circ \ldots \circ U_1 \circ N(t_0, \tau_1) \tag{2.4}$$

Докажем, что произведение (2.4) сходится к некоторому каноническому отображению. Если в рассматриваемой области фазового пространства Ω_1 частные производные функции Гамильтона ограничены постоянной M, то отображение $N(\tau_{j-1}, \tau_j)$ близко к тождественному, т.е. имеет место оценка

$$\| \mathbf{x} - N(\tau_{j-1}, \tau_j)(\mathbf{x}) \| \leq M(\tau_j - \tau_{j-1})\sqrt{2n}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{2.5}$$

где $\|\cdot\|$ означает евклидову норму. Кроме того, и отображение U_s близко к тождественному, причем

$$\|\mathbf{x} - U_s(\mathbf{x})\| = \|I_s(\mathbf{x})\| \leq a_s \tag{2.6}$$

Условия (2.5), (2.6) гарантируют равномерную сходимость произведения (2.4), так как

$$a_1 + a_2 + \ldots < \infty \text{ и } (\tau_2 - \tau_1) + (\tau_3 - \tau_2) + \ldots = \tau^* - \tau_1 < \infty$$

Для проверки каноничности предельного отображения можно воспользоваться таким характеристическим свойством канонических отображений, как сохранение интегралов по замкнутым контурам от формы $\mathbf{p}d\mathbf{q}$ [5], которое сохраняется при предельном переходе. Следовательно, формула (2.4) определяет каноническое преобразование.

Замечание. Рассматривались [1, 2] линейные гамильтоновы системы с импульсивными воздействиями более общего вида: при скачках могут изменяться все фазовые переменные. В обсуждаемых здесь механических системах обобщенные координаты непрерывно зависят от времени.

Перейдем к обсуждению вопроса об устойчивости положений равновесия и периодических решений системы (2.1). Решениям обоих этих типов соответствуют неподвижные точки отображения Пуанкаре. Неподвижная точка канонического отображения не может быть асимптотически устойчивой, так как характеристическое уравнение возвратно. Необходимое условие устойчивости состоит в том, что все корни характеристического уравнения по модулю равны единице [5]. Достаточные условия устойчивости в случае $n = 1$ определяются теоремой Арнольда–Мозера [5]: для их проверки необходимо проверить условие невырожденности нормальной формы отображения в окрестности неподвижной точки.

Допустим, что в системе (2.1) функция Гамильтона имеет по времени период τ, а множество моментов импульсивных воздействий инвариантно сдвигу на τ. Если функции H, $\mathbf{I}_\alpha$ достаточно гладкие, то теорему Арнольда–Мозера можно применить для исследования устойчивости положений равновесия и периодических решений системы (2.1).

Пример. Рассмотрим математический маятник, к точке подвеса которого периодически прикладываются вдоль вертикали равные ударные импульсы. Выберем единицы измерения так, чтобы длина маятника, его масса, а также ускорение свободного падения равнялись единице. Тогда уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x} + \sin x = I \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - j\tau) \sin x \tag{2.7}$$

где x – угол отклонения от вертикали, τ – промежуток времени между последовательными импульсами, I – величина импульса. Система (2.7) имеет положения равновесия $x = 0$ и $x = \pi$ (нижнее и верхнее положения маятника): в этих точках моменты силы тяжести и импульсивных сил равны нулю. Изучим вначале устойчивость нижнего положения равновесия. Для этого нужно построить отображение Пуанкаре вдоль фазового потока за время τ.

В отсутствие импульсов уравнения (2.7) интегрируются в эллиптических функциях Якоби [6]. В окрестности нижнего положения равновесия движение с начальными условиями $x = 0, \dot{x} = 2k$ при $t = 0$ описывается формулами

$$x = 2\arcsin(k \operatorname{sn} t), \quad \dot{x} = 2k \operatorname{cn} t \tag{2.8}$$

где $\operatorname{sn} t$, $\operatorname{cn} t$ – эллиптические синус и косинус с модулем k. Решение (2.8) можно обобщить для произвольных начальных условий, используя общие свойства эллиптических функций. В итоге получим

$$\begin{gathered}\sin\frac{x}{2} = \left(\frac{\dot{x}_0}{2}\operatorname{sn} t\cos\frac{x_0}{2} + \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t \sin\frac{x_0}{2}\right)\left(1 - \operatorname{sn}^2 t \sin^2\frac{x_0}{2}\right)^{-1} \\ \dot{x} = (\dot{x}_0 \operatorname{cn} t - \operatorname{sn} t \operatorname{dn} t \sin x_0)\left(1 - \operatorname{sn}^2 t\sin^2\frac{x_0}{2}\right)^{-1}, \quad k^2 = \frac{\dot{x}_0^2}{4} + \sin^2\frac{x_0}{2}\end{gathered} \tag{2.9}$$

Преобразование фазовых переменных за время τ (отображение Пуанкаре) описывается формулами

$$\dot{x}_1 = x(\tau), \quad \dot{x}_1 = \dot{x}(\tau) + I\sin x(\tau) \tag{2.10}$$

Функции $x(\tau)$, $\dot{x}(\tau)$ определены выражениями (2.9).

Для удобства вычислений перейдем к каноническим переменным q, p по формулам

$$q = 2\sin\frac{x}{2}, \quad \dot{x} = p\cos\frac{x}{2}$$

В этих переменных соотношения (2.9), (2.10) примут вид

$$q_1=\left(p_0\operatorname{sn}\tau\left(1-\frac{q_0^2}{4}\right)+q_0\operatorname{cn}\tau\operatorname{dn}\tau\right)\left(1-\operatorname{sn}^2\tau\frac{q_0^2}{4}\right)^{-1}$$

$$p_1=(p_0\operatorname{cn}\tau-q_0\operatorname{sn}\tau\operatorname{dn}\tau)\left(1-\operatorname{sn}^2\tau\frac{q_0^2}{4}\right)^{-1}\left(1-\frac{q_0^2}{4}\right)^{1/2}\left(1-\frac{q_1^2}{4}\right)^{-1/2}+lq_1 \qquad (2.11)$$

$$k^2=\frac{1}{4}\left(q_0^2+\left(1-\frac{q_0^2}{4}\right)p_0^2\right)$$

Для разложения отображения (2.11) по степеням q_0, p_0 необходимо вначале выполнить эту операцию для входящих в него эллиптических функций. Воспользовавшись разложениями последних в ряды Фурье [7], получим

$$\operatorname{sn}\tau=\sin\tau+\frac{k^2}{4}(\sin\tau\cos\tau-\tau)\cos\tau+O(k^4)$$

$$\operatorname{cn}\tau=\cos\tau-\frac{k^2}{4}(\sin\tau\cos\tau-\tau)\sin\tau+O(k^4) \qquad (2.12)$$

$$\operatorname{dn}\tau=1-\frac{k^2}{4}(1-\cos 2\tau)+O(k^4)$$

Подставляя эти разложения в (2.11), получим

$$q_1=q_0\cos\tau+p_0\sin\tau+\sum_{r+s=3}\alpha_{rs}q_0^rp_0^s+\ldots$$

$$p_1=q_0(-\sin\tau+l\cos\tau)+p_0(\cos\tau+l\sin\tau)+\sum_{r+s=3}\beta_{rs}q_0^rp_0^s+\ldots$$

$$\alpha_{30}=\frac{1}{16}\sin\tau(\sin\tau\cos\tau+\tau),\quad \alpha_{21}=-\frac{1}{16}\cos\tau(3\sin\tau\cos\tau+\tau) \qquad (2.13)$$

$$\alpha_{12}=-\frac{1}{16}\sin\tau(3\sin\tau\cos\tau-\tau),\quad \alpha_{03}=\frac{1}{16}\cos\tau(\sin\tau\cos\tau-\tau)$$

$$\beta_{30}=-\alpha_{03}+l\alpha_{30},\quad \beta_{21}=\alpha_{12}+l\alpha_{21},\quad \beta_{12}=-\alpha_{21}+l\alpha_{12},\quad \beta_{03}=\alpha_{30}+l\alpha_{03}$$

Опущенные в (2.13) члены разложения имеют порядок пять и выше.

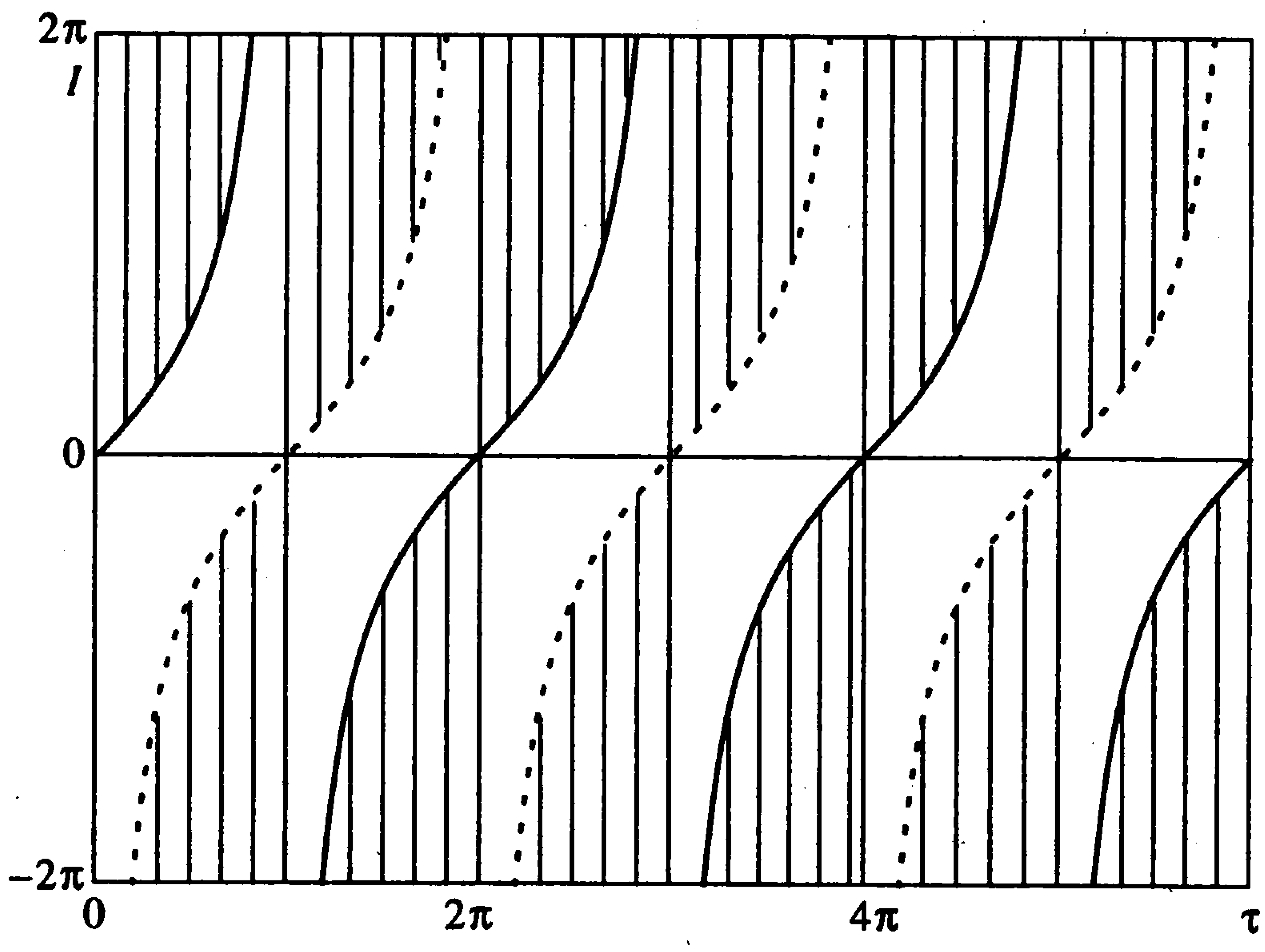
Прежде всего исследуем линейную часть отображения (2.13). Характеристическое уравнение выглядит так:

$$\rho^2-2A\rho+1=0,\quad A=\cos\tau+(l/2)\sin\tau$$

Для устойчивости нижнего положения маятника необходимо выполнение неравенства

$$|A|<1 \qquad (2.14)$$

Если неравенство (2.14) имеет противоположный смысл, положение равновесия неустойчиво. Область (2.14) на плоскости параметров $\tau>0$, l изображена на фиг. 1 (незаштрихована). Границами этой области являются кривые $l=2\operatorname{tg}(\tau/2)$ и $\tau=2m\pi$ ($m\in Z_+$) (в этих двух случаях $\rho_{1,2}=1$), а также $l=-2\operatorname{ctg}(\tau/2)$ (штриховые линии) и $\tau=(1+2m)\pi$ (при этом $\rho_{1,2}=-1$).



Фиг. 1

Для решения вопроса об устойчивости внутри области (2.14) в строгом нелинейном смысле необходимо привести отображение (2.13) к нормальной форме. Линейную каноническую замену переменных возьмем в виде

$$q = \frac{1}{\alpha}Q, \quad p = \frac{I}{2\alpha} + \alpha P, \quad \alpha^2 = \frac{\sin\varphi}{\sin\tau}$$

Угол φ определяется из условий $\cos\varphi = A$, $\sin\varphi \sin\tau > 0$.

В новых переменных отображение (2.13) выглядит так:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_0 \cos\varphi + P_0 \sin\varphi + \sum_{r+s=3} a_{rs} Q_0^r P_0^s + \ldots, \\ P_1 &= -Q_0 \sin\varphi + P_0 \cos\varphi + \sum_{r+s=3} b_{rs} Q_0^r P_0^s + \ldots \end{aligned} \qquad (2.15)$$

$$a_{30} = \frac{1}{\alpha^2}\left(\alpha_{30} + \frac{I}{2}\alpha_{21} + \frac{I^2}{4}\alpha_{12} + \frac{I^3}{8}\alpha_{03}\right), \quad a_{03} = \alpha^4 \alpha_{03}$$

$$a_{21} = \alpha_{21} + I\alpha_{12} + \frac{3}{4}I^2\alpha_{03}, \quad a_{12} = \alpha^2\alpha_{12} + \frac{3}{2}I\alpha^2\alpha_{03}$$

$$b_{30} = \frac{1}{\alpha^4}\left(\beta_{30} + \frac{I}{2}\beta_{21} + \frac{I^2}{4}\beta_{12} + \frac{I^3}{8}\beta_{03}\right) - \frac{I}{2\alpha^2}a_{30}$$

$$b_{03} = \alpha^2\beta_{03} - \frac{I}{2\alpha^2}a_{03}$$

$$b_{21} = \frac{1}{\alpha^2}\left(\beta_{21} + I\beta_{12} + \frac{3}{4}I^2\beta_{03}\right) - \frac{I}{2\alpha^2}a_{21}$$

$$b_{12} = \beta_{12} + \frac{3}{2}I\beta_{03} - \frac{I}{2\alpha^2}a_{12}$$

В отображении (2.15) отсутствуют квадратичные члены. Поэтому достаточно исследовать два случая: $\cos\varphi \neq 0$ (нерезонансный) и $\cos\varphi = 0$ (резонанс четвертого порядка). Условие невырожденности нормальной формы в нерезонансном случае имеет вид [8]

$$3a_{30} + b_{21} + a_{12} + 3b_{03} \neq 0$$

Произведя необходимые расчеты, получим

$$3a_{30} + b_{21} + a_{12} + 3b_{03} = \frac{1}{16\sin\varphi}(3I^2(\tau - \sin\tau\cos\tau) + 8\tau\sin^2\varphi) \neq 0$$

Отсюда по теореме Арнольда–Мозера следует устойчивость неподвижной точки.

Случай резонанса четвертого порядка реализуется на кривой в плоскости параметров $I = -2\operatorname{ctg}\tau$. Неравенство

$$(a_{30} + b_{30})(a_{30} + 2a_{12} + b_{03}) > 2(a_{03} - b_{30})^2 \tag{2.16}$$

гарантирует в этом случае устойчивость; при обратном знаке неравенства (2.16) неподвижная точка неустойчива. Проведенные расчеты показали, что в области (2.14) неравенство (2.16) выполнено.

Таким образом, в рассмотренном примере неравенство (2.14) является не только необходимым, но и достаточным условием устойчивости.

Выясним, что происходит при потере устойчивости положения равновесия. Для этого изучим неподвижные точки отображения (2.11), близкие к началу координат. Таким точкам отвечают движения маятника периода τ. Так как в промежутках между ударами полная механическая энергия маятника сохраняется, в τ – периодическом движении она должна сохраняться и при ударах. Простейшие движения этого вида описываются на фазовой плоскости замкнутыми кривыми, которые в моменты ударов пересекают ось ординат. В промежутке между последовательными ударами траектория описывает вокруг начала координат целое (при этом период равен τ) или полуцелое число оборотов (при этом период равен 2τ), откуда получаем

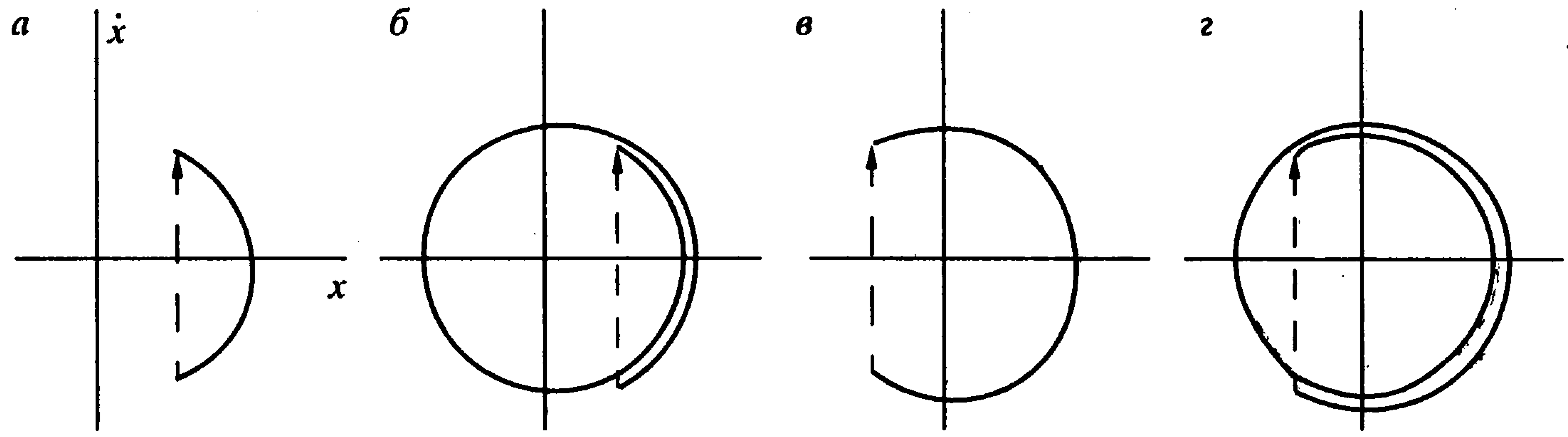
$$\tau = 2mK(k), \qquad m \in N$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, при учете разложения которого [7] имеем

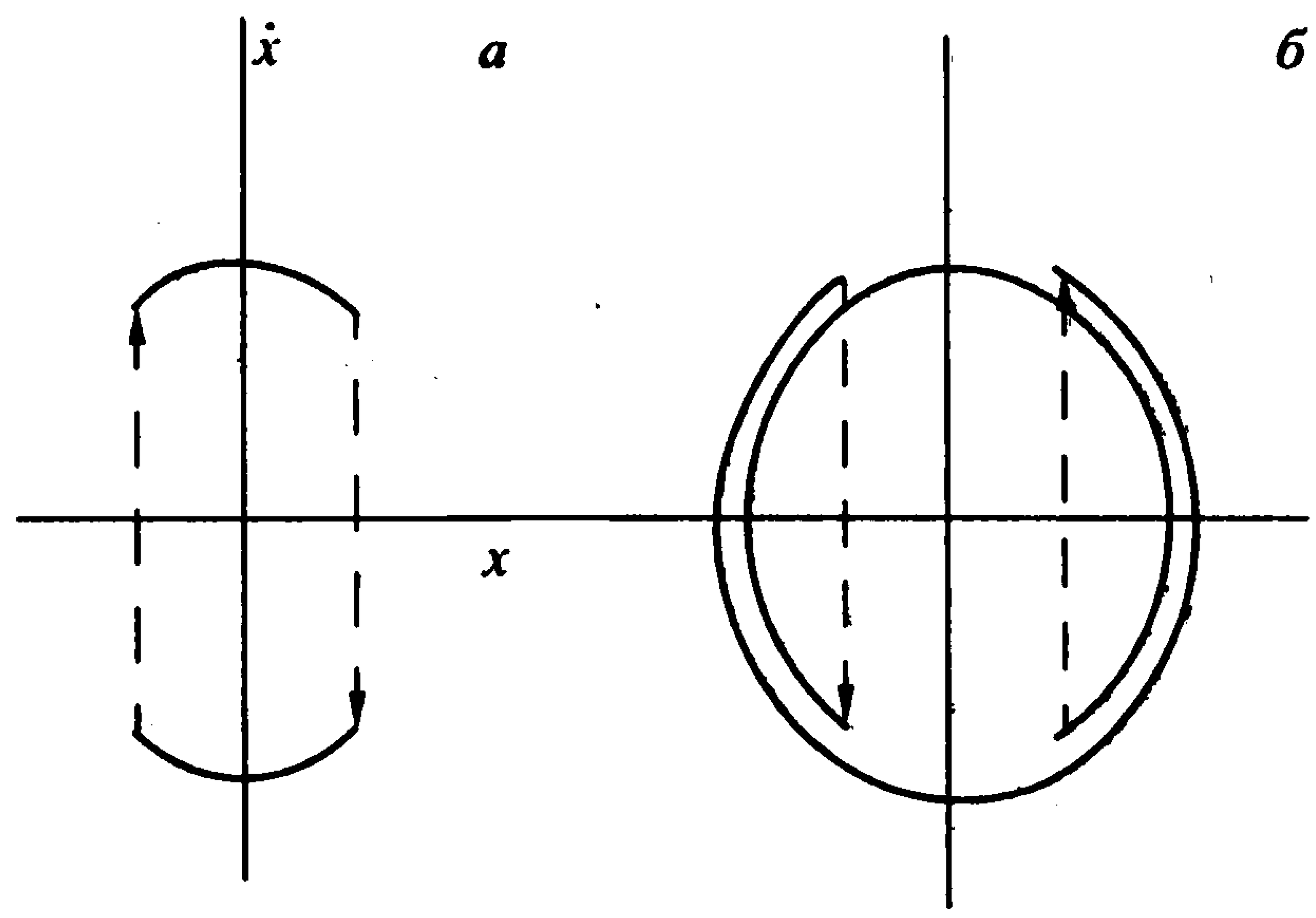
$$\tau = m\pi(1 + \tfrac{1}{4}k^2 + O(k^4))$$

Таким образом, на плоскости параметров τ, I периодические движения рассматриваемого вида существуют правее вертикальных прямых $\tau = m\pi$. Следовательно, части этих прямых, лежащие в верхней полуплоскости, представляют собой безопасные бифуркационные границы области устойчивого нижнего равновесия маятника, а в нижней полуплоскости – опасные.

Движения второго вида характеризуются скачкообразным изменением значения скорости при ударе на противоположное. Движения этого вида асимметричны; некоторые из них изображены на фиг. 2: а) $I > 0$, маятник не проходит нижнее положение; б) $I > 0$, маятник в промежутке между ударами совершает одно полное колебание плюс его часть, аналогичную подслучаю а); в) $I < 0$, маятник проходит нижнее положение равновесия, но не совершает в промежутке между ударами полное колебание; г) $I < 0$, маятник совершает за период одно полное колебание и одно незаконченное, аналогичное подслучаю в). (Для наглядности накладывающиеся друг на друга участки траекторий изображены как раздельные.) Каждому из перечисленных движений соответствует зеркально-симметричное, получаемое отражением фазовой траектории относительно оси ординат. Имеется бесконечное множество семейств движений данного вида, различающихся числом полных колебаний маятника за период, знаком импульса I и знаком переменной x в моменты ударов.



Фиг. 2



Фиг. 3

Используя соотношения (2.10) и формулы приведения для эллиптических функций [7], получим для всех этих семейств равенство

$$I = 2\,\mathrm{sn}\frac{\tau}{2}\,\mathrm{dn}\frac{\tau}{2}\left(\mathrm{cn}\frac{\tau}{2}\right)^{-1} \tag{2.17}$$

которое можно рассматривать при заданных τ, I как уравнение относительно модуля эллиптических функций k (равного синусу от половины максимального угла отклонения маятника от вертикали в рассматриваемом движении). Для малых k при учете формул (2.12) уравнение (2.17) преобразуется к виду

$$I = 2\,\mathrm{tg}\frac{\tau}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4}\left(\cos\tau - \frac{\tau}{\sin\tau}\right) + O(k^4)\right) \tag{2.18}$$

Поскольку $|\sin\tau| < \tau$, $|\cos\tau| \leqslant 1$, то в выражении (2.18) коэффициент при k^2 имеет тот же знак, что $\sin\tau$. Отсюда можно сделать вывод о характере границы $I = 2\,\mathrm{tg}\,(\tau/2)$ области устойчивости (2.14), соответствующей корням характеристического уравнения $\rho_{1,2} = 1$: если $\sin\tau > 0$ (при этом в (2.18) $I > 0$), то бифуркационная граница опасная, т.е. неустойчивые периодические движения сосуществуют с устойчивым положением равновесия и исчезают вместе с потерей устойчивости последнего. Напротив, если $\sin\tau < 0$, то $I < 0$ и бифуркационная граница безопасна, т.е. устойчивые периодические движения рождаются одновременно с потерей устойчивости положения равновесия (бифуркации типа "вилка").

Периодические движения третьего вида симметричны и имеют период 2τ. Имеется бесконечное множество семейств таких движений, два из которых изображены на фиг. 3: а) $I < 0$ и б) $I > 0$ (здесь также для наглядности накладывающиеся участки траектории показаны раздельно). При учете соотношений (2.8) имеем следующее условие периодичности:

$$I = -2\,\mathrm{cn}\frac{\tau}{2}\left(\mathrm{sn}\frac{\tau}{2}\mathrm{dn}\frac{\tau}{2}\right)^{-1} \qquad (2.19)$$

Для малых k при помощи формул (2.12) уравнение (2.19) приведем к виду

$$I = -2\,\mathrm{ctg}\frac{\tau}{2}\left(1-\frac{k^2}{4}\left(\cos\tau-\frac{\tau}{\sin\tau}\right)+O(k^4)\right) \qquad (2.20)$$

Из формулы (2.20) можно сделать вывод о характере границы $I = -2\,\mathrm{ctg}\,(\tau/2)$ области устойчивости (2.14), соответствующей корням характеристического уравнения $\rho_{1,2} = -1$: если $\sin\tau > 0$ (при этом в (2.20) $I < 0$), то бифуркационная граница безопасная (бифуркация удвоения периода). Напротив, если $\sin\tau < 0$, то $I > 0$ и бифуркационная граница опасная.

Аналогично можно исследовать и устойчивость верхнего положения равновесия маятника. В данной работе ограничимся построением области выполнения необходимых условий устойчивости. Для этого линеаризуем систему (2.7) в окрестности значения $x = \pi$, полагая $y = x - \pi$:

$$\ddot{y} - y = I\sum_{j=-\infty}^{\infty}\delta(t-j\tau)$$

Изменение фазовых переменных за время периода описывается формулами

$$y = y_0\,\mathrm{ch}\,\tau + \dot{y}_0\,\mathrm{sh}\,\tau, \quad \dot{y} = y_0\,\mathrm{sh}\,\tau + \dot{y}_0\,\mathrm{ch}\,\tau + I(y_0\,\mathrm{ch}\,\tau + \dot{y}_0\,\mathrm{sh}\,\tau) \qquad (2.21)$$

Условия устойчивости линейного отображения (2.21) имеет вид

$$|2\,\mathrm{ch}\,\tau + I\,\mathrm{sh}\,\tau| < 2 \qquad (2.22)$$

Область (2.22) на плоскости параметров построена на фиг. 4 (незаштрихована); в отличие от рассмотренного выше случая она имеет непериодический характер. Интересно отметить, что эта область целиком содержит полупрямую $I = 2$, $\tau > 0$. Следовательно, периодические удары интенсивности $I = 2$ стабилизируют верхнее положение равновесия маятника вне зависимости от величины промежутка времени τ между ними. С уменьшением τ ширина области устойчивости неограниченно возрастает. Как показывает анализ, верхняя граница области устойчивости (штриховая линия на фиг. 4) опасная, а нижняя – безопасная (бифуркация удвоения периода).

3. Уравнение Хилла с импульсивными воздействиями. Первостепенная задача при исследовании устойчивости решений гамильтоновых систем состоит в анализе линейного приближения. Важным для приложений случаем является уравнение Хилла

$$\ddot{q} + f(t)q = 0, \quad f(t+\tau) \equiv f(t) \qquad (3.1)$$

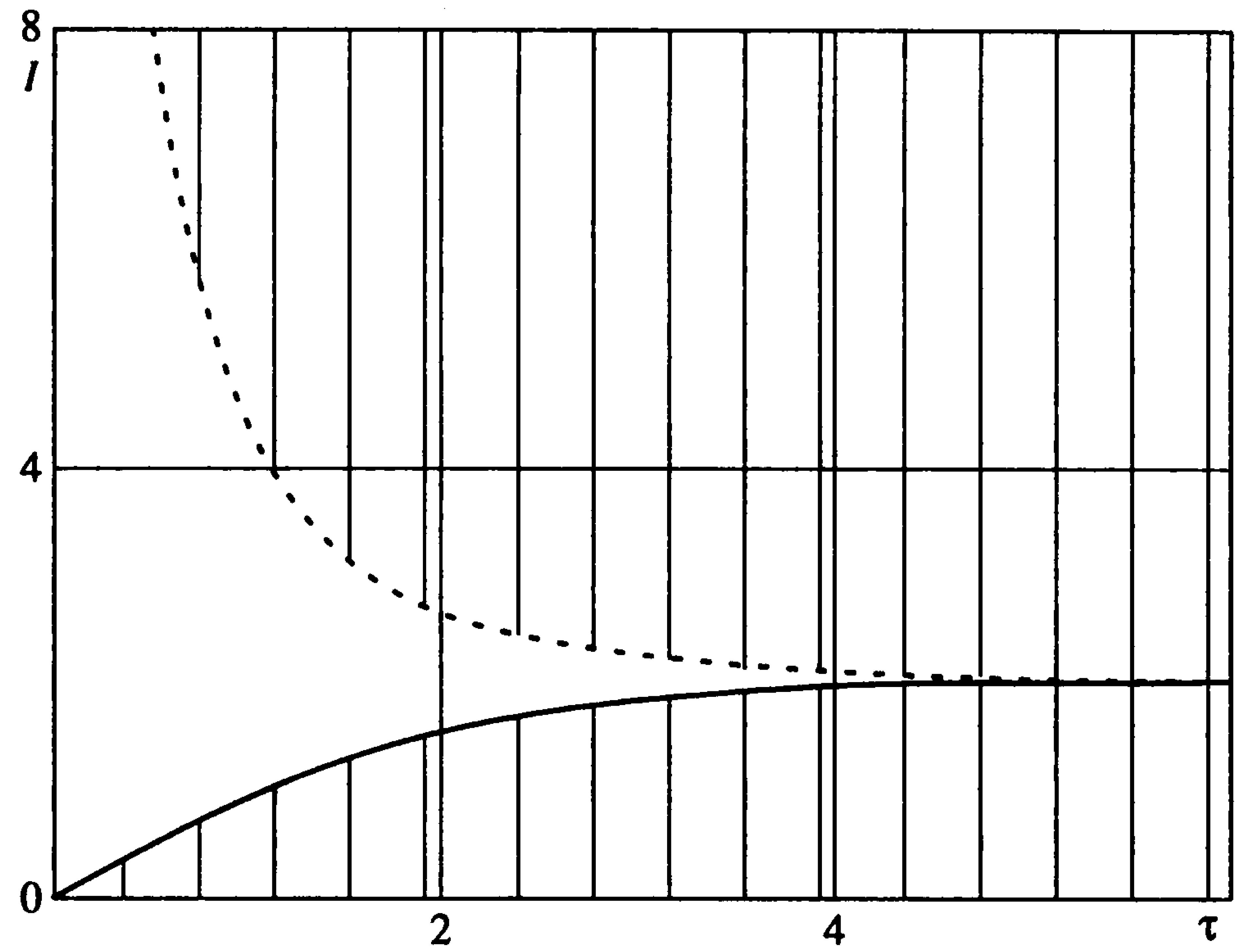
Был разработан [9] ряд методов оценки характеристической постоянной уравнения (3.1), позволяющих получить достаточные условия устойчивости тривиального положения равновесия, не прибегая к численному решению задачи Коши. Один из таких методов основан на оценке угла поворота вектора решений за время τ. Доказано следующее утверждение.

Предложение 3 [9]. Пусть l – целое неотрицательное число, а c – действительное число, удовлетворяющее неравенствам

$$l\pi/\tau < c < (l+1)\pi/\tau \qquad (3.2)$$

Определим функции

$$f_c^- = \min\{f(t), c^2\}, \quad f_c^+ = \max\{f(t), c^2\} \qquad (3.3)$$



Фиг. 4

Если выполнены неравенства

$$l\pi < \frac{1}{c}\int_0^\tau f_c^-(t)dt \leq \frac{1}{c}\int_0^\tau f_c^+(t)dt < (l+1)\pi \tag{3.4}$$

то тривиальное решение уравнения (3.1) устойчиво.

Допустим теперь, что система (3.1) подвергается импульсным воздействиям

$$\ddot{q} + \left(f(t) - \sum_{\alpha\in A} I_\alpha \delta(t-\tau_\alpha)\right)q = 0 \tag{3.5}$$

где I_α постоянны, а множество $\{\tau_\alpha\}$ инвариантно сдвигу на величину τ.

Предложение 3 допускает следующее обобщение.

Предложение 4. Пусть числа l и c, а также функции $f_c^-(t)$ и $f_c^+(t)$ определены, как в предложении 3. Если выполнены неравенства

$$l\pi < \frac{1}{c}\left(\int_0^\tau f_c^-(t)dt - S^+\right) \leq \frac{1}{c}\left(\int_0^\tau f_c^+(t)dt + S^-\right) < (l+1)\pi$$
$$S^+ = \sum_{\substack{\tau_\alpha\in(0,\tau] \\ I_\alpha>0}} I_\alpha, \quad S^- = -\sum_{\substack{\tau_\alpha\in(0,\tau] \\ I_\alpha<0}} I_\alpha \tag{3.6}$$

то тривиальное решение уравнения (3.5) устойчиво.

Доказательство. Интегралы (с коэффициентами $1/c$) в формулах (3.4), (3.6) являются верхней и нижней границами для углов поворота вектор-решений вспомогательной системы с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(cp^2 + c^{-1}f(t)q^2)$ (на фазовой плоскости (q, p) эти углы $\psi(t)$ отсчитывают по часовой стрелке) [9]. Соответствующая вспомогательная система с ударами имеет гамильтониан

$$H = \tfrac{1}{2}\left(cp^2 + c^{-1}\left(f(t) - \sum I_\alpha\delta(t-\tau_\alpha)\right)q^2\right)$$

Оценим изменение углов поворота при ударах. Поскольку

$$\operatorname{tg}\psi^- = -p^- / q, \quad \operatorname{tg}\psi^+ = -p^+ / q$$

(знак минус добавлен для учета обратного направления отсчета угла вращения), а $p^+ = p^- + c^{-1}I_\alpha$, то

$$\operatorname{tg}\psi^+ = \operatorname{tg}\psi^- - c^{-1}I_\alpha$$

Применяя формулу конечных приращений (теорема Лагранжа), получаем

$$\psi^+ = \psi^- - c^{-1}I_\alpha \cos^2\xi, \quad \xi \in (\psi^-, \psi^+)$$

Следовательно, положительные удары приводят к уменьшению угла вращения на величину, не превосходящую S^+/c, а отрицательные удары – к его увеличению на величину, не превосходящую S^-/c. Отсюда следует сформулировать утверждение.

Несложное обобщение на случай уравнения (3.5) допускает также ряд критериев устойчивости [9], основанных на оценке интегралов

$$\int_0^\tau |f_c^\pm(t) - c^2| dt$$

Для этого достаточно рассмотреть в уравнении (3.5) функции Дирака как пределы в пространстве обобщенных функций некоторой последовательности регулярных функционалов. В итоге получаем следующие утверждения.

Предложение 5. Если в формуле (3.2) $l \geqslant 1$ и выполнены неравенства

$$\begin{gathered}\int_0^\tau (c^2 - f_c^-(t))dt + S^+ < c(\tau c - l\pi) \\ \int_0^\tau (f_c^+(t) - c^2)dt + S^- < 2c(l+1)\operatorname{ctg}\frac{\tau c}{2(l+1)}\end{gathered} \tag{3.7}$$

или при $l = 0$ – неравенства

$$\begin{gathered}\int_0^\tau f(t)dt - S^+ + S^- \geqslant 0, \\ \int_0^\tau (f_c^+(t) - c^2)dt + S^- < 2c\operatorname{ctg}\frac{\tau c}{2}\end{gathered} \tag{3.8}$$

то тривиальное решение уравнения (3.5) устойчиво.

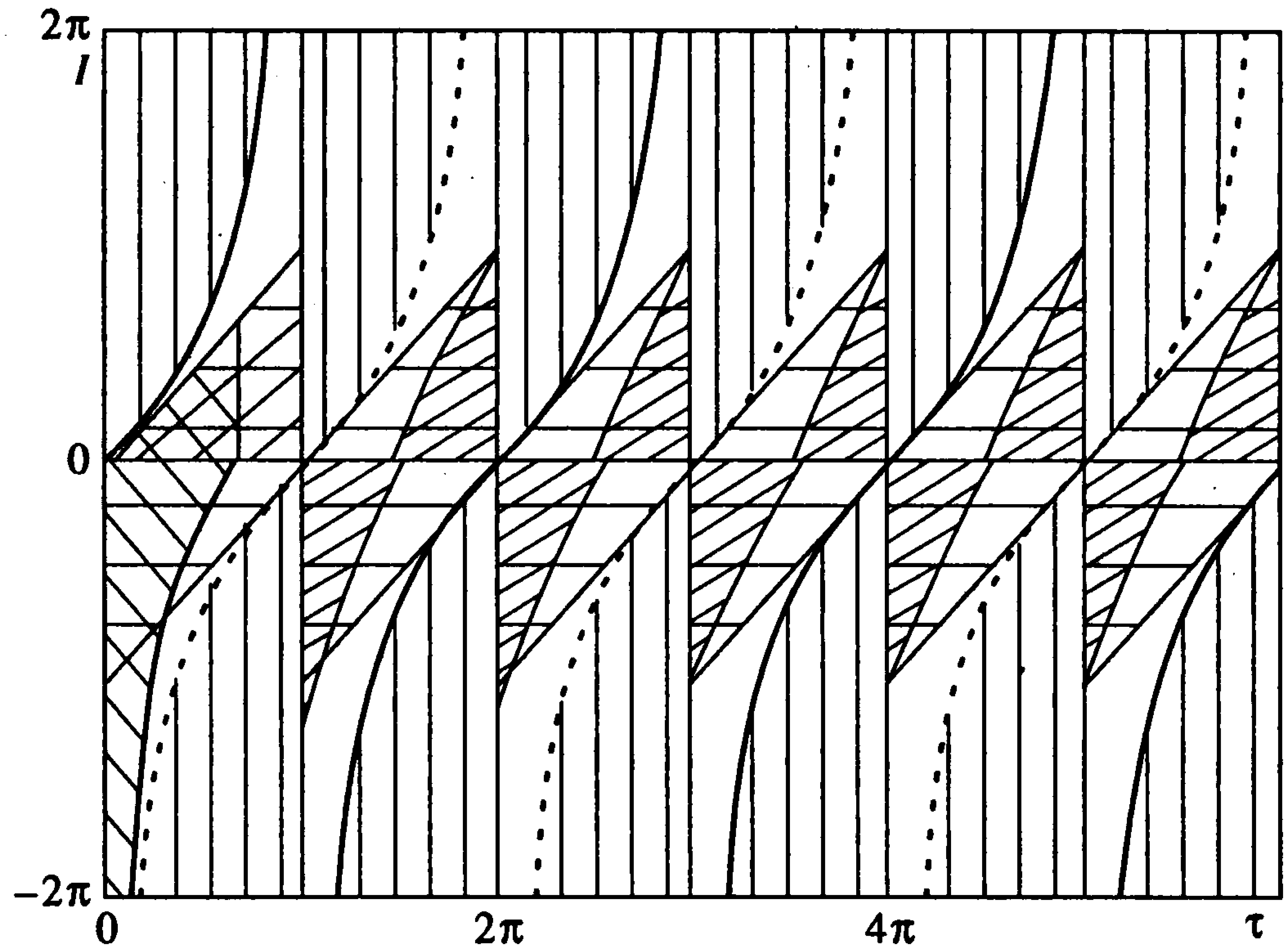
Предложение 6. Если для некоторого $l \in N$ выполнены неравенства

$$\begin{gathered}\tau\int_0^\tau \left(f(t) - \frac{l^2\pi^2}{\tau^2} \right) dt + \tau S^- \leqslant 2\pi l(l+1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(l+1)} \\ f(t) \geqslant \frac{l^2\pi^2}{\tau^2}, \quad S^+ = 0\end{gathered} \tag{3.9}$$

или

$$\int_0^\tau f_0^+(t)dt + S^- \leqslant \frac{4}{\tau}, \quad \int_0^\tau f(t)dt + S^- - S^+ \geqslant 0 \tag{3.10}$$

(функция f_0^+ определена в (3.3)), то тривиальное решение уравнения (3.5) устойчиво. (Приведенная в [9] формула, соответствующая неравенствам (3.10) в отсутствии импульсивных сил, содержит неточность.)



Фиг. 5

Замечание. Если $f(t) \geqslant 0$ и $S^+ = 0$, то второе неравенство (3.10) выполнено автоматически, а первое неравенство можно рассматривать как обобщение известного критерия Ляпунова [9] на системы с импульсивными воздействиями.

Предложение 7. Если для некоторого $l \in N$ выполнены условия

$$f(t) \leqslant \frac{l^2\pi^2}{\tau^2}, \quad S^- = 0, \quad \tau\int_0^\tau \left(\frac{l^2\pi^2}{\tau^2} - f(t)\right)dt + \tau S^+ < l\pi^2 \tag{3.11}$$

то тривиальное решение уравнения (3.5) устойчиво.

Пример. Рассмотрим линеаризованные уравнения движения маятника с периодическими импульсивными воздействиями

$$\ddot{x} + x = xI\sum_{j=-\infty}^{\infty}\delta(t - j\tau) \tag{3.12}$$

Формула (3.6) приводит при $c = 1$ к таким условиям:

$$\tau - \pi(l+1) < I < \tau - \pi l, \quad l\pi < \tau < (l+1)\pi; \quad l = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.13}$$

Формулы (3.10) при учете равенств $f(t) = f_0^+(t) \equiv 1$ дают

$$\tau - 4/\tau \leqslant I \leqslant \tau, \quad \tau \leqslant 2 \tag{3.14}$$

Обобщенный критерий Ляпунова описывает часть области (3.14), лежащую в нижней полуплоскости.

Условия (3.9) в рассматриваемом случае выглядят так:

$$\begin{gathered}\tau^2 - l^2\pi^2 - \tau I \leqslant 2\pi l(l+1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(l+1)} \\ I < 0, \quad \tau \geqslant l\pi\end{gathered} \tag{3.15}$$

Наконец, соотношения (3.11) принимают вид

$$\tau \leqslant l\pi, \quad I > 0, \quad l^2\pi^2 - \tau^2 + \tau I < l\pi^2 \tag{3.16}$$

На фиг. 5 построены области (3.13)–(3.16), составляющие часть области (2.14) устойчивости в линейном приближении. Горизонтальной штриховкой отмечены решения неравенства (3.13) (параллелограммы, вписанные в каждую из компонент устойчивости), штриховкой с наклоном влево – область (3.14) (неограниченная область для значений $\tau < \pi$), а штриховкой с наклоном вправо – области (3.15) и (3.16) (криволинейные треугольники в нижней и верхней полуплоскостях соответственно).

Заметим, что преимущество предложений 4–7 состоит в возможности получения достаточных условий устойчивости и в случаях, когда полное построение области устойчивости не представляется возможным. Так, если маятник подвергается периодическим сериям неравных ударов, то его динамика описывается в первом приближении уравнением

$$\ddot{x} + x = x \sum_{\alpha \in A} I_\alpha \delta(t - \tau_\alpha) \tag{3.17}$$

где множества $\{I_\alpha\}$ и $\{\tau_\alpha\}$ инвариантны сдвигу времени на величину τ.

Число ударов в промежутке $(0, \tau]$ может быть большим или даже бесконечным, что не препятствует применению описанных выше результатов. В частности, предложение 4 приводит к достаточным условиям устойчивости

$$l\pi < \tau - S^+ \leqslant \tau + S^- < (l+1)\pi, \quad l = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.18}$$

а формула (3.10) – к условиям

$$S^+ \leqslant \tau + S^- \leqslant 4/\tau \tag{3.19}$$

Предложения 6, 7 применимы в случае, когда все импульсы имеют одинаковый знак. К примеру, если импульсы I_α в промежутке $(t_0, t_0 + \tau)$ образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q \in (0, 1)$ и первым членом $I_1 < 0$, то $S^+ = 0$, $S^- = -I_1/(1 - q)$. Тогда достаточные условия устойчивости (3.18) примут вид

$$l\pi < \tau \leqslant \tau - I_1/(1-q) < (l+1)\pi, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

а условия (3.19) выглядят так:

$$(4/\tau - \tau)(1-q) \leqslant I_1 \leqslant 0$$

Кроме того, для устойчивости достаточно выполнение неравенств (3.15), где $I = I_1/(1 - q)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00281) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (00-15-96088).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсивными воздействиями. Киев: Вища шк., 1987. 287 с.
2. *Bainov D.D., Simeonov P.* Systems with Impulse Effect. Stability Theory and Applications. Chichester: Ellis Horwood, 1989. 255 p.
3. *Myshkis A.D.* Auto-oscillations in continuous systems with impulsive self-support // Resenhas IME-USP, 1997. V. 3. № 1. P. 93–106.
4. *Schwartz L.* Analyse Mathematique. V. 1. Paris: Hermann, 1967. = *Шварц Л.* Анализ. Т. I. М.: Мир, 1972. 824 с.
5. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
6. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: ЧеРо, 1999. 569 с.
7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
8. *Маркеев А.П.* О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 37–54.
9. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.I.2001