УДК 531.36:532.5

© 2001 г. П. Каподанно

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОЙ КОНФИГУРАЦИИ СЛОЯ ЖИДКОСТИ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ КОНТЕЙНЕРЕ, СОВЕРШАЮЩЕМ РАВНОМЕРНОЕ ВРАЩЕНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕВЕСОМОСТИ

Изучается устойчивость слоя идеальной несжимаемой жидкости, расположенной на стенке осесимметричного контейнера, равномерно вращающегося вокруг своей оси в условиях невесомости, в случае, когда свободная поверхность жидкости – круговой цилиндр. Устойчивость относительного равновесия жидкой массы зависит от коэрцитивности некоторой билинейной формы в соответствующем гильбертовом пространстве. Изучение этой коэрцитивности сведено к дополнительной задаче на собственные значения, которая решена с помощью методов функционального и классического анализа. В зависимости от кривизны меридиана контейнера в точках, где он соприкасается со свободной поверхностью жидкости на относительном равновесии, рассматриваются два случая. Первый из них сводится к классической задаче на собственные значения, второй – к задаче Стеклова. Найдены достаточные условия устойчивости относительного равновесия жидкости, зависящие от кривизны указанного меридиана и от угловой скорости вращения контейнера.

Устойчивость равновесия и установившегося движения жидкой массы, расположенной в неподвижном или подвижном контейнере – объект многочисленных работ, описанных в монографиях [1, 2][1]. В частности были рассмотрены [2] задачи об устойчивости относительных равновесий жидкости массы в резервуаре, вращающемся в невесомости.

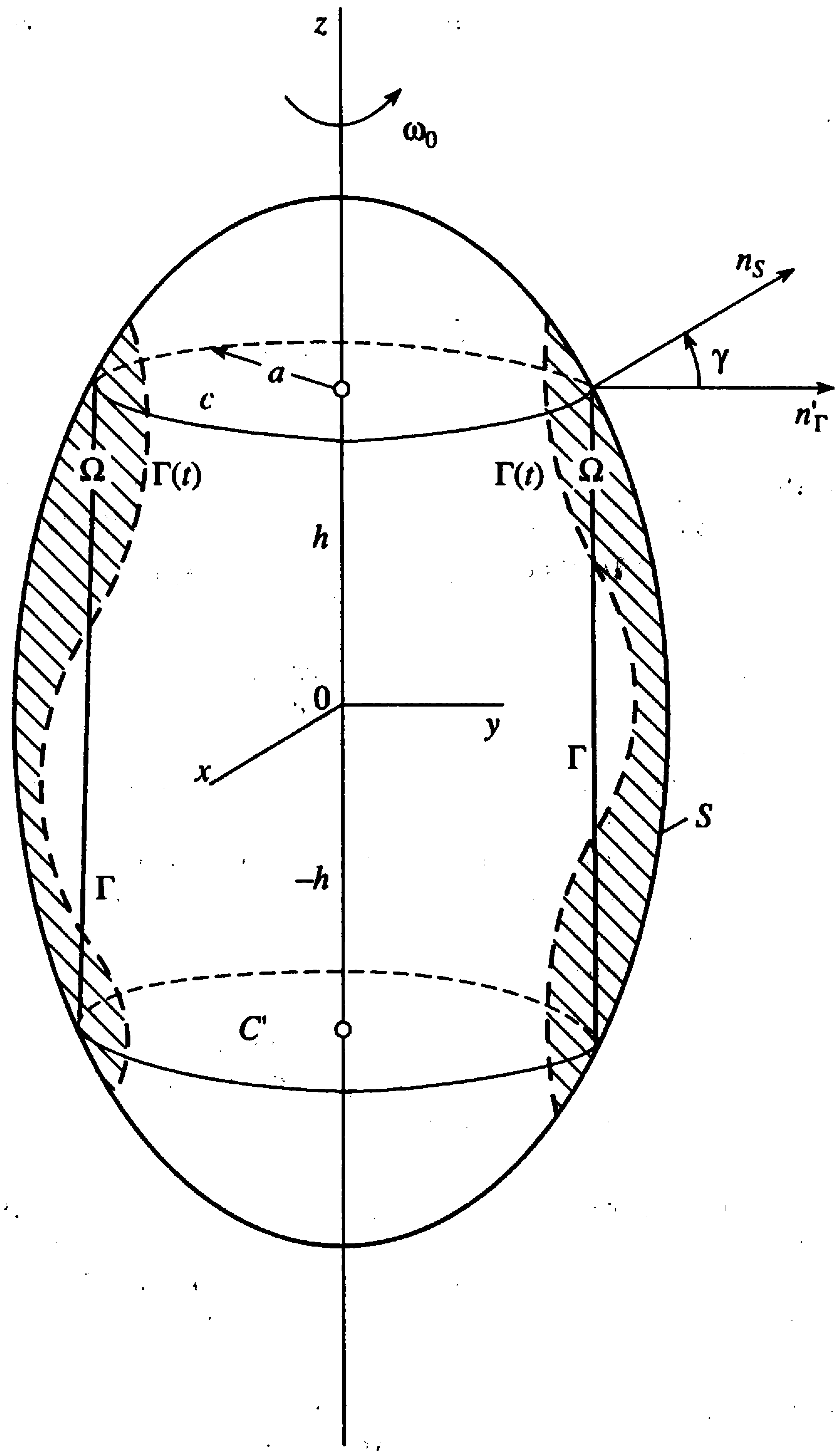
1. Постановка задачи и уравнения движения жидкости. Пусть идеальная несжимаемая жидкость плотностью ρ находится в осесимметричном контейнере с осью симметрии z и с плоскостью симметрии xy, вращающемся вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω_0. Обозначим: (r, θ, z) – цилиндрические координаты, в которых $r = f(z)$ – уравнение меридиана контейнера (фигура). Предположим, что жидкость располагается на стенках контейнера.

При выполнении условия существования относительного равновесия в отсутствие силы тяжести давление в точке $M(r, \theta, z)$ жидкости определяется как

$$P_0(M) = \rho\omega_0^2 r^2/2 + c \quad (c = \mathrm{const})$$

---

[1] Вопрос об устойчивости стационарного движения тела с капиллярной жидкостью был сведен (*Румянцев В.В.* Об устойчивости движения твердого тела с жидкостью, обладающей поверхностным натяжением // ПММ. Т. 28. Вып. 4. 1964. С. 746–753) к задаче минимума измененной потенциальной энергии. Затем эта методика была применена к рассмотрению ряда конкретных задач (*Самсонов В.А.* Устойчивость и бифуркация равновесия тела с жидкостью. Научные труды Ин-та механики МГУ. М.: Изд-во Моск. ун-та. № 16. 1971. 54 с.; *Слобожанин Л.А.* Об устойчивости цилиндрического состояния вращающейся жидкости // Математическая физика и функциональный анализ. Харьков: ФТИНТ АН УССР. Вып. 2. С. 175–181). – *Прим. ред.*



Закон Лапласа имеет вид

$$P_0|_\Gamma - p_0 = -\alpha(k_1 + k_2)$$

где p_0 – внешнее давление, α – поверхностное натяжение, предполагаемое постоянным, k_1^{-1} и k_2^{-1} – радиусы главных кривизн свободной поверхности Γ, отсчитываемые в положительном направлении вдоль вектора $\mathbf{n}_\Gamma$ единичной нормали, внешней по отношению к жидкости. Поверхность Γ, таким образом, определена уравнением в частных производных

$$\rho\omega_0^2 r^2 / 2 + c - p_0 = -\alpha(k_1 + k_2)$$

Рассматривается случай, когда Γ – часть цилиндрической поверхности $r = a$; в этом случае $k_1 = 0$ и $k_2 = a^{-1}$. Имеем тогда

$$P_0(M) = \rho\omega_0^2 / 2(r^2 - a^2) + p_0 - \alpha / a$$

Обозначим через Ω область, занятую жидкостью в относительном равновесии, S – смоченную поверхность стенки контейнера, C и C' – окружности пересечения цилиндра $r = a$ со стенкой контейнера, h и h – отклонения центров окружностей C и C' от срединной плоскости.

Предположим, что согласно закону капиллярности свободная поверхность жидкости пересекает стенку контейнера под постоянным углом. Обозначим через γ угол между векторами $\mathbf{n}'_\Gamma$ и $\mathbf{n}_S$, где $\mathbf{n}_S$ – вектор внешней по отношению к области нормали к поверхности S, направленный вовне Ω, и $\mathbf{n}'_\Gamma = -\mathbf{n}_\Gamma$. Имеем

$$a = f(h);\quad f_z(\pm h) = \mp \operatorname{tg}\gamma \quad (f_z = df/dz) \tag{1.1}$$

Выпишем уравнения малых движений жидкости в окрестности положения относительного равновесия, которое предполагается устойчивым.

Пусть $P(t, M)$ – давление в точке M в момент времени t. Введем динамическое давление

$$p(t, M) = P(t, M) - P_0(M)$$

Пусть $\mathbf{w}$ – относительное перемещение частицы жидкости. В отсутствие объемных сил уравнение Эйлера и уравнение несжимаемости могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} + 2\omega_0 \mathbf{z} \times \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{w} = 0 \tag{1.2}$$

Добавим к этим уравнениям условие проскальзывания жидкости на стенке контейнера

$$w_n|_S = \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}_S = 0 \tag{1.3}$$

Закон Лапласа на возмущенной свободной поверхности $\Gamma(t)$ записывается в виде

$$P|_{\Gamma(t)} - p_0 = -\alpha(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2)$$

где $\tilde{k}_1$ и $\tilde{k}_2$ – главные кривизны поверхности $\Gamma(t)$.

Представим уравнение поверхности $\Gamma(t)$ в виде $r = a + \zeta(z, \theta, t)$ в предположении, что функция ζ и ее производные малы по абсолютной величине. Если $M_0|_\Gamma$ – точка, принадлежащая поверхности Γ, и $M|_{\Gamma(t)}$ – точка пересечения нормали к поверхности Γ в точке $M_0|_\Gamma$ с поверхностью $\Gamma(t)$, то имеем $\overrightarrow{M_0|_\Gamma M|_{\Gamma(t)}} = -\zeta\mathbf{n}_\Gamma$.

В силу классического результата [2] получим

$$(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2) - (k_1 + k_2) = -(k_1^2 + k_2^2)\zeta - \Delta_\Gamma\zeta + O(\zeta^2)$$

где Δ_Γ – оператор Лапласа – Бельтрами, откуда следует, что с точностью до членов второго порядка малости

$$(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2) = a^{-2} - a^{-2}(\zeta_{\theta\theta} + a^2\zeta_{zz} + \zeta)$$

С другой стороны [2],

$$P(M|_{\Gamma(t)}) - P_0(M_0|_\Gamma) = p(M_0|_\Gamma) - \zeta \operatorname{grad} P_0(M_0|_\Gamma)\cdot\mathbf{n}_\Gamma$$

Тогда закон Лапласа обеспечивает выполнение условия

$$p = \alpha a^{-2}[\zeta_{\theta\theta} + a^2\zeta_{zz} - (\nu_0 - 1)\zeta] \quad \text{на } \Gamma,\ \nu_0 = \rho a^3\omega_0^2\alpha^{-1} \tag{1.4}$$

Как известно, ζ должна быть 2π-периодической функцией по θ и удовлетворять условию

$$\int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0 \quad (d\Gamma = a d\theta dz) \tag{1.5}$$

выражающему постоянство объема жидкости.

Выпишем, наконец, условие того, что поверхность $\Gamma(t)$ пересекает стенку контейнера под постоянным углом. Будем искать пересечение $\Gamma(t)$ и стенки. Пусть $\zeta = h + \varepsilon(\theta, t)$ $(\zeta = -h + \eta(\theta, t))$ – окрестность одной из точек пересечения, которая соседствует с верхней (нижней) окружностью. Тогда с точностью до первого порядка малости

$$\varepsilon = -\operatorname{ctg}\gamma\zeta(h, \theta, t); \quad \eta = \operatorname{ctg}\gamma\zeta(-h, \theta, t)$$

Выписывая теперь условие $\mathbf{n}_S \cdot \mathbf{n}'_\Gamma = \cos\gamma$ для $\zeta = \pm h + \varepsilon$ находим

$$\zeta_z = \mp \mu\zeta \quad \text{при} \quad z = \pm h, \quad \mu = f_{zz}(h)\cos^3\gamma/\sin\gamma \tag{1.6}$$

Параметр μ зависит, таким образом, от кривизны меридиана контейнера в точках $z = \pm h$. Он положителен (отрицателен), если в этих точках меридиан обращен своей выпуклостью (вогнутостью) к оси z.

Уравнение Эйлера не изменяется, когда к p добавляют произвольную функцию времени. Можно найти эту функцию таким образом, что результат будет принадлежать классу

$$\tilde{L}^2(\Gamma) = \left\{\varphi \in L^2(\Gamma): \int_\Gamma \varphi d\Gamma = 0\right\}$$

Тогда условие (1.4) можно заменить условием

$$p = \frac{\alpha}{a^2}[\zeta_{\theta\theta} + a^2\zeta_{zz} - (\nu_0 - 1)\zeta] + \frac{\mu a^2}{4\pi h}\int_0^{2\pi}[\zeta(h,\theta,t) + \zeta(-h,\theta,t)]d\theta \quad \text{на}\,\Gamma \tag{1.7}$$

причем $p \in \tilde{L}^2(\Gamma)$.

Введем область $\Omega_0 = \{(\theta, z): 0 < \theta < 2\pi, -h < z < h\}$ и неограниченный оператор B_1, действующий на функции из класса

$$\tilde{L}^2(\Omega_0) = \left\{\zeta \in L^2(\Omega_0): \int_{\Omega_0} \zeta d\theta dz = 0\right\}$$

и определенный соотношением

$$B_1\zeta = -\zeta_{\theta\theta} - a^2\zeta_{zz} + (\nu_0 - 1)\zeta - \frac{\mu a^2}{4\pi h}\int_0^{2\pi}[\zeta(h,\theta,t) + \zeta(-h,\theta,t)]d\theta$$

Его область определения такова, что

$$D(B_1) = \{\zeta \in H^2(\Omega_0); \int_{\Omega_0} \zeta d\theta dz = 0; \ \zeta_z = \mp\mu\zeta \ \text{для} \ z = \pm h;$$

следы ζ порядков 0 и 1 совпадают в точках $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$ в смысле пространства $L^2(-h, h)$.

Будем искать билинейную форму, ассоциированную с B_1. Для этого вычислим скалярное произведение $(B_1\zeta, \tilde{\zeta})_{L^2(\Gamma)}$, $\zeta, \tilde{\zeta} \in D(B_1)$. Интегрируя по частям и принимая во внимание условия (1.6), получаем искомую билинейную форму

$$b_1(\zeta, \tilde{\zeta}) = \int_{\Omega_0}[\zeta_\theta\tilde{\zeta}_\theta + a^2\zeta_z\tilde{\zeta}_z + (\nu_0 - 1)\zeta\tilde{\zeta}]d\theta dz + \mu a\int_0^{2\pi}[\zeta(h,\theta)\tilde{\zeta}(h,\theta) + \zeta(-h,\theta)\tilde{\zeta}(-h,\theta)]d\theta \tag{1.8}$$

где $\zeta(\pm h, \theta)$ означают следы ζ на сторонах $z = \pm h$ границы области Ω_0. Билинейная форма $b_1(\zeta, \tilde{\zeta})$ определена на множестве функций

$$V_0 = \{\zeta \in H^1(\Omega_0): \int_{\Omega_0} \zeta d\theta dz = 0;$$

следы ζ порядка 0 совпадают в точках $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$ в смысле пространства $L^2(-h, h)\}$

Уравнения (1.2)–(1.3), (1.5)–(1.7) описывают малые движения жидкости.

2. Достаточное условие устойчивости относительного равновесия. Домножим скалярно уравнение (1.2) на $\rho \partial w/\partial t$ и проинтегрируем по Ω. Имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{\Omega}\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 d\Omega+\int_{\Omega}\operatorname{grad} p\cdot\frac{\partial w}{\partial t}d\Omega=0$$

Принимая во внимание условия (1.2), (1.3) и (1.7), мы можем записать

$$\int_{\Omega}\operatorname{grad} p\cdot\frac{\partial w}{\partial t}d\Omega=-\int_{\Gamma}p\zeta_t d\Gamma=\frac{\alpha}{a^2}\int_{\Gamma}B_1\zeta\cdot\zeta_t d\Gamma=\frac{\alpha}{a^2}b_1(\zeta,\zeta_t)=\frac{\alpha}{a^2}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}b_1(\zeta,\zeta)$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_{\Omega}\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 d\Omega+\frac{\alpha}{2a}b_1(\zeta,\zeta)\right]=0$$

В силу теоремы об изменении энергии последнее слагаемое в квадратных скобках представляет собой потенциал центробежных и капиллярных сил[2].

Устойчивость относительного равновесия жидкости по отношению к $\|\zeta\|_{L^2(\Omega_0)}$, $\|\zeta_\theta\|_{L^2(\Omega_0)}$, $\|\zeta_z\|_{L^2(\Omega_0)}$, и таким образом, по отношению к $\|\zeta\|_{H^1(\Omega_0)}$, а также по отношению к $\|\partial w/\partial t\|_{L^2(\Omega_0)}$ обеспечивается строгой коэрцитивностью билинейной формы $b_1(\zeta,\tilde{\zeta})$ (т.е. положительной определенностью квадратичной формы $b_1(\zeta, \zeta)$ – *Прим. ред.*) на множестве V_0.

Заметим, что также имеет место устойчивость по отношению к $\|\zeta(\pm h,\theta)\|_{L^2(0,2\pi)}$ при непрерывности отображения следа $H^1(\Omega_0)$ в $L^2(0, 2\pi)$.

Задача устойчивости, таким образом, сведена к изучению коэрцитивности билинейной формы $b_1(\zeta,\tilde{\zeta})$. Необходимо различать два случая: $\mu \geqslant 0$ и $\mu < 0$.

3. Исследование коэрцитивности формы $b_1(\zeta,\tilde{\zeta})$. Случай $\mu \geqslant 0$. Пусть

$$\mathcal{T}_1=\int_{\Omega_0}[\zeta_\theta^2+a^2\zeta_z^2+\nu_0\zeta^2]d\theta dz$$

$$\mathcal{T}_2=\mu a^2\int_0^{2\pi}[\zeta^2(h,\theta)+\zeta^2(-h,\theta)]d\theta,\quad \mathcal{T}_3=\int_{\Omega_0}\zeta^2 d\theta dz$$

Обозначим через

$$F(\zeta)=(\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2)\mathcal{T}_3^{-1}$$

функцию, нижнюю грань которой

$$\nu=\inf_{\zeta\in V_0}F(\zeta) \tag{3.1}$$

требуется найти. Можно показать, что если $\nu > 1$, то билинейная форма $b_1(\zeta,\tilde{\zeta})$ коэрцитивна на V_0. Воспользуемся известным методом [4, 5].

Нижняя грань ν существует, она положительна или обращается в нуль. По определению нижней грани существует последовательность $\{\zeta_n\}\in V_0$, такая, что

$$\nu=\lim_{n\to\infty}F(\zeta_n)$$

---

[2] Этот потенциал был назван *В.В. Румянцевым* измененной потенциальной энергией – см. публикацию, цитированную в сноске 1. – *Прим. ред.*

Опираясь на теоремы Реллиха и Банаха – Сакса – Мазура [4, 5] можно доказать, что последовательность $\{\zeta_n\}$ сходится в слабом смысле в $H^1(\Omega_0)$ и в сильном смысле в $L^2(\Omega_0)$, предельная функция U принадлежит V_0, нижняя грань достигается на $\zeta = U$, величина ν строго положительна.

Найдем уравнение в частных производных и граничные условия, которым удовлетворяет величина U. По определению ν имеем

$$\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 - \nu\mathcal{T}_3 \geqslant 0, \quad \forall\zeta \in V_0$$

Положим

$$\zeta = U + \varepsilon\delta\zeta \quad \text{при } \delta\zeta \in V_0, \quad \varepsilon \in R$$

Так как $U \in V_0$, то варьирование этого неравенства с его последующим преобразованием и учетом граничных условий дает

$$U_{\theta\theta} - a^2U_{zz} + (\nu - \nu_0)U + \frac{\mu a^2}{4\pi h}\int\limits_0^{2\pi}[U(h,\theta) + U(-h,\theta)]d\theta = 0 \tag{3.2}$$

Так как коэффициенты этого эллиптического уравнения постоянны, то его решения – функции, принадлежащие классу C^∞.

Затем классическим образом выводятся граничные условия

$$U_z = \mp\mu U, \quad z = \pm h; \quad U_\theta(z, 2\pi) = U_\theta(z, 0) \tag{3.3}$$

которые в сочетании с интегральным соотношением

$$\int\limits_{\Omega_0} U d\theta dz = 0 \tag{3.4}$$

полностью определяют решение краевой задачи, для которой ν – наименьшее собственное значение.

Найдем собственные значения задачи (3.2)–(3.4) и условия, при которых наименьшее из них строго превосходит единицу.

4. Исследование вспомогательной задачи на собственные значения при $\mu \geqslant 0$. Разделим переменные

$$U = \Theta(\theta)Z(z)$$

и положим $\Theta', Z', \ldots$ вместо $\Theta_\theta, Z_z, \ldots$. Обозначим

$$\mathcal{T}_\theta = \int\limits_0^{2\pi}\Theta(\theta)d\theta, \quad \mathcal{T}_z = \int\limits_{-h}^{h} Z(z)dz$$

Тогда уравнение и условия (3.2)–(3.4) примут вид

$$\Theta''Z + a^2\Theta Z'' + (\nu - \nu_0)\Theta Z + \frac{\mu a^2}{4\pi h}[Z(h) + Z(-h)]\mathcal{T}_\theta = 0 \tag{4.1}$$

$$\Theta(\theta) \equiv \Theta(\theta + 2\pi); \quad Z'(\pm h) = -\mu Z(\mp h); \quad \mathcal{T}_\theta\mathcal{T}_z = 0 \tag{4.2}$$

Следует различать случаи $\mu > 0$ и $\mu = 0$.

Случай $\mu > 0$. 1° Пусть $\mathcal{T}_\Theta = 0$. Имеем

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -\frac{a^2Z'' + (\nu - \nu_0)Z}{Z} = -n^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

по причине периодичности.

Отсюда имеем

$$\Theta(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, \quad A_n,\ B_n \text{ – постоянные}$$

и краевые задачи

$$Z'' + \frac{\nu - n^2 - \nu_0}{a^2} Z = 0; \quad Z'(\pm h) = \mp\mu Z(\pm h), \quad n = 1,\ 2, \ldots$$

Это уравнение можно проинтегрировать, но поскольку речь идет о классической задаче Штурма – Лиувилля, в этом нет необходимости.

Если положить

$$\nu - n^2 - \nu_0 = a^2\lambda_n^2;$$

то каждая задача (4.1) имеет счетное множество собственных значений (СЗ) λ_{nm}, таких, что

$$0 < \lambda_{n1} \leqslant \lambda_{n2} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{nm} \leqslant \ldots, \quad \lambda_{nm} \to +\infty, \quad m \to +\infty$$

Функции Z_{nm} образуют для каждого n полную ортогональную систему в $L^2(-h, h)$.

СЗ, соответствующие задаче (3.4), имеют вид

$$\nu_{nm} = n^2 + \nu_0 + a^2\lambda_{nm}^2$$

Все они больше единицы.

2° Пусть теперь $\mathcal{T}_z = 0$. Интегрируя по θ от 0 до 2π уравнение (4.1) и комбинируя результат с этим условием, получаем $\Theta = \text{const}$ и задачу

$$Z'' + \frac{\nu - \nu_0}{a^2} Z + \frac{\mu}{2h}[Z(h) + Z(-h)] = 0; \quad Z'(\pm h) = \mp\mu Z(\pm h); \quad \mathcal{T}_z = 0 \tag{4.3}$$

Покажем, что (4.3) – стандартная задача на СЗ, продемонстрировав ее вариационную формулировку. Домножая обе части дифференциального уравнения на функцию $\tilde{Z}(z)$, такую что

$$\int_{-h}^{h} \tilde{Z}(z)dz = 0$$

интегрируя полученные выражения на отрезке $[-h, h]$ и выполняя затем интегрирование по частям с учетом граничных условий, получаем классическим образом вариационную формулировку: найти функцию $Z \in \tilde{H}^1(-h,h)$, такую, что

$$\int_{-h}^{h} Z'\tilde{Z}'dz + \mu a^2[Z(h)\tilde{Z}(h) + Z(-h)\tilde{Z}(-h)] = \frac{\nu - \nu_0}{a^2}(Z, \tilde{Z})_{L^2(-h,h)}$$

$$\forall \tilde{Z} \in \tilde{H}^1(-h,\ h), \quad \tilde{H}^1(-h,h) = \{Z \in H^1(-h,\ h):\ \mathcal{T}_z = 0\}$$

Введем естественным образом пространство

$$\tilde{L}^2(-h,h) = \{Z \in L^2(-h,h):\ \mathcal{T}_z = 0\}$$

Билинейная форма

$$a(Z,\tilde{Z}) = \int_{-h}^{h} Z'\tilde{Z}'dz + \mu a^2[Z(h)\tilde{Z}(h) + Z(-h)\tilde{Z}(-h)]$$

симметрична, непрерывна и коэрцитивна на $\tilde{H}^1(-h,h)$, инъекция из $\tilde{H}^1(-h,h)$ в $\tilde{L}^2(-h,h)$ непрерывна, плотна и компактна, как это легко следует из аналогичных свойств $H^1(-h, h)$ и $L^2(-h, h)$.

Задача (4.3), таким образом, имеет счетное множество положительных СЗ ν_{0m} ($m = 1, 2,\ldots$), образующих неубывающую последовательность, стремящуюся к бесконечности. Им соответствуют СЗ задачи (3.4), такие, что $\nu_{0m} - \nu_0 > 0$. Соответствующие собственные функции Z_{0m} образуют полную ортогональную систему в $\tilde{L}^2(-h, h)$.

Так как $1, \cos\theta, \sin\theta,\ldots, \cos n\theta, \sin n\theta,\ldots$ образуют полную ортогональную систему в $L^2(0, 2\pi)$, то из классической теоремы [3] следует, что $Z_{01},\ldots, Z_{0m},\ldots$ и $Z_{nm}\cos n\theta$, $Z_{nm}\sin n\theta$ образуют полную ортогональную систему в $L^2(\Omega_0)$. Метод разделения переменных доставляет, таким образом, все СЗ задачи (3.4) в случае $\mu > 0$.

СЗ значения в случае $\mathcal{T}_\theta = 0$ превосходят единицу. Будем искать, при каких условиях СЗ при $\mathcal{T}_z = 0$ обладают тем же свойством.

Положим $a^{-2}(\nu - \nu_0) = \tau^2$ и разрешим задачу (4.3), исходя из

$$Z(z) = A\cos(\tau z) + B\sin(\tau z) - \frac{\mu}{2h\tau^2}[Z(h) + Z(-h)]$$

Полагая $\tau h = \varkappa$, получаем уравнения на СЗ

$$\operatorname{tg}\varkappa = -\frac{\varkappa}{\mu h}; \quad \frac{1}{\varkappa} - \operatorname{ctg}\varkappa = -\frac{\varkappa}{\mu h}$$

Графический анализ показывает, что наименьшее значение $\varkappa_1$ неизвестной $\varkappa$ расположено между $\pi/2$ и π. Полагая $\tau_1 = \varkappa_1/h$, находим наименьшее СЗ в случае $\mathcal{T}_z = 0$

$$\nu_1 = \nu_0 + a^2\tau_1^2$$

Заключаем, что в случае $\mu > 0$, если

$$\nu_0 + a^2\tau_1^2 > 1 \tag{4.4}$$

то все СЗ задачи (3.4) больше единицы.

Случай $\mu = 0$. В этом случае рассуждения аналогичны, но несколько проще. В случае $\mathcal{T}_\theta = 0$ СЗ ν таковы, что

$$\nu \geqslant n^2 + \nu_0 > 1$$

В случае $\mathcal{T}_z = 0$ простые вычисления показывают, что при выполнении условия

$$\nu_1' = \nu_0 + \left(\frac{\pi a}{2h}\right)^2 > 1 \tag{4.5}$$

наименьшее, а вместе с ним, и все остальные СЗ больше единицы.

Достаточное условие устойчивости относительного равновесия. Покажем, что в случае $\mu \geqslant 0$, если нижняя грань ν отношения из соотношения (3.1) превосходит единицу, то билинейная форма $b_1(\zeta, \tilde{\zeta})$ коэрцитивна в V_0, откуда следует, что положение относительного равновесия жидкости устойчиво.

По определению ν имеем

$$\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 \geqslant \nu\mathcal{T}_3 \quad \forall\zeta \in V_0$$

С помощью этого неравенства заключаем, что если ε – число, такое, что $0 < \varepsilon < 1$, то

$$b_1(\zeta, \zeta) \geqslant \varepsilon\{\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2\} + [(1 - \varepsilon)\nu - 1]\mathcal{T}_3$$

Выбирая тогда $0 < \varepsilon < 1 - \nu^{-1}$, что допустимо, имеем

$$b_1(\zeta, \zeta) \geqslant \varepsilon[\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2], \quad \forall\zeta \in V_0$$

откуда следует, что форма $b_1(\zeta, \tilde{\zeta})$ коэрцитивна в V_0. Таким образом, для $\mu > 0$ (соответственно, для $\mu = 0$) неравенство (4.4) (соответственно (4.5)) – достаточное условие устойчивости относительного равновесия жидкости.

Замечание. Если контейнер неподвижен ($\omega_0 = 0$), то можно повторить аргументы предыдущего рассуждения, так как в V_0 норма

$$\left[\int_{\Omega_0} (\zeta_\theta^2 + a^2\zeta_z^2)d\theta dz\right]^{1/2}$$

эквивалентна норме $H^1(\Omega_0)$.

Для $\mu > 0$ и $\omega_0 = 0$ условие $a\tau_1 > 1$ – также достаточное условие устойчивости равновесия. Равномерное вращение, таким образом, стабилизирует движение.

Для $\mu = 0$ и $\omega_0 = 0$ имеется собственное значение $\nu = 1$ в случае $\mathcal{T}_\theta = 0$, и нельзя сделать вывод об устойчивости равновесия.

5. Исследование задачи на собственные значения при $\mu < 0$. *Редукция к задаче на собственные значения.* Пусть

$$G(\zeta) = \mathcal{T}_1(\mathcal{T}_3 - \mathcal{T}_2)^{-1}$$

Будем теперь искать

$$\nu = \inf_{\zeta \in V_0} G(\zeta) \tag{5.1}$$

Нижняя грань существует, она положительна или равна нулю. По определению нижней грани существует последовательность $\{\zeta_n \in V_0\}$, такая, что

$$\nu = \lim_{n\to\infty} G(\zeta_n)$$

Как и в случае $\mu \geqslant 0$, показывается, что последовательность $\{\zeta_n\}$ сходится в слабом смысле в $H^1(\Omega_0)$ и в сильном смысле в $L^2(\Omega_0)$, предельная функция U принадлежит V_0, нижняя грань достигается на $\theta = U$, выполнено неравенство $\nu > 0$, функция U удовлетворяет уравнению в частных производных и условиям

$$u_{\theta\theta} + a^2u_{zz} + (\nu - \nu_0)u + \frac{\nu\mu a^2}{4\pi h}\int_0^{2\pi} [u(h,\theta) + u(-h,\theta)]d\theta = 0 \tag{5.2}$$

$$u(z,0) = u(z,2\pi), \quad u_\theta(z,0) = u_\theta(z,2\pi); \quad u_z = \mp\nu\mu u \quad \text{для } z = \pm h$$

$$\int_{\Omega_0} u d\theta dz = 0$$

где ν – наименьшее СЗ задачи.

Задача (5.2) – это задача Стеклова, поскольку СЗ ν фигурирует в граничных условиях.

Покажем, что речь идет о стандартной задаче на СЗ. Умножая уравнение из (5.2) на $v \in V_0$, интегрируя по Ω_0 и принимая во внимание периодичность и граничные условия, получаем вариационную формулировку задачи: найти функцию $u \in V_0$ и вещественное число ν, такие, что

$$\int_{\Omega_0} [u_\theta v_\theta + a^2u_z v_z + \nu_0 uv]d\theta dz =$$

$$= \left[\int_{\Omega_0} uv d\theta dz - \mu a^2\int_0^{2\pi} [u(h,\theta)v(h,\theta) + u(-h,\theta)v(-h,\theta)]d\theta\right]\nu, \quad \forall \in V_0 \tag{5.3}$$

Коэффициент при ν – скалярное произведение, поскольку $\mu < 0$.

Введем таким образом пространство $\mathcal{H}$, дополняющее V_0 по отношению к норме, ассоциированной со скалярным произведением

$$(u,v)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega_0} uv d\theta dz - \mu d^2\int_0^{2\pi} [u(h,\theta)v(h,\theta) + u(-h,\theta)v(-h,\theta)]d\theta$$

Первый член в (5.3) – билинейная симметричная непрерывная и коэрцитивная форма в V_0. Инъекция V_0 в $\mathscr{H}$ плотна и непрерывна. Покажем, что она компактна. Для этого рассмотрим последовательность $\{u_n\} \in V_0$, которая слабо сходится к u в V_0. Последовательность $\{u_n\}$ сильно сходится к u в $L^2(\Omega_0)$ и последовательность $\{u_n(\pm h, \theta)\}$ сильно сходится к $u(\pm h, \theta)$ в $L^2(0, 2\pi)$ в силу теоремы Соболева – Кондрашова. Таким образом, последовательность $\{u_n\}$ сильно сходится к u в пространстве $\mathscr{H}$.

Задача (5.2) допускает счетное множество положительных СЗ, образующих неубывающую последовательность, стремящуюся к бесконечности. Соответствующие собственные функции образуют полную ортогональную систему в пространстве $\mathscr{H}$.

Исследование вспомогательной задачи на собственные значения. Отыскивая решения задачи (5.2) в виде $u = \Theta(\theta)Z(z)$, получаем

$$\Theta''Z + a^2\Theta Z'' + (\nu - \nu_0)\Theta Z + \frac{\nu\mu a^2}{4\pi h}[Z(h) + Z(-h)]\mathcal{T}_\theta = 0 \qquad (5.4)$$

$$\Theta(\theta) \equiv \Theta(\theta + \pi), \quad Z'(\pm h) = -\nu\mu Z(\pm h), \quad \mathcal{T}_\theta \mathcal{T}_z = 0$$

Случай $\mathcal{T}_\theta = 0$. Имеем

$$\Theta(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta$$

и уравнения

$$Z'' + (\nu - n^2 - \nu_0)a^{-2}Z = 0, \quad Z'(\pm h) = -\nu\mu Z(\pm h) \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (5.5)$$

Как и выше, видно, что эти задачи Стеклова – стандартные задачи на СЗ. Для каждого n СЗ $\nu_{nm} \to +\infty$ при $m \to \infty$. Найдем среди них наименьшие, которые строго меньше, чем $n^2 + \nu_0$.

Положим

$$\nu - n^2 - \nu_0 = -a^2\lambda_n^2 < 0$$

и решим задачу (5.5). Получим уравнения

$$\operatorname{th}(\lambda_n h) = -\nu\mu/\lambda_n, \quad \operatorname{cth}(\lambda_n h) = -\nu\mu/\lambda_n$$

Простой графический анализ дает следующие результаты. Первое уравнение имеет корень λ_n^0, второе уравнение не имеет корней если величина $-\mu h(n^2 + \nu_0)$ меньше единицы и имеет один корень если эта величина больше единицы. Отсюда выводим, что наименьшее СЗ равно

$$\nu_{n1} = n^2 + \nu_0 - a^2\lambda_n^{0^2}$$

Это значение превосходит единицу, если

$$\lambda_n^0 < \varkappa = a^{-1}\sqrt{n^2 - 1 + \nu_0}$$

Это условие эквивалентно неравенству $\operatorname{th}\varkappa > -\mu h/\varkappa$, так что $\varkappa > \varkappa_0(\mu h)$, где не зависящая от n величина $\varkappa_0(\mu h)$ – абсцисса точки пересечения кривых $y = \operatorname{th}(\varkappa)$, $y = -\mu h/\varkappa$. Условие $\nu_{n1} > 1$, таким образом, записывается в виде

$$n^2 - 1 + \nu_0^2 > a^2h^{-2}\varkappa_0^2(\mu h)$$

Окончательно, все СЗ ν_{nm} (n, m = 1, 2, 3...) превосходят единицу, если выполняется неравенство

$$\nu_0 > a^2h^{-2}\varkappa_0^2(\mu h) \qquad (5.6)$$

Случай $\mathcal{T}_z = 0$. В этом случае получаем, что величина Θ постоянна, и задача имеет вид

$$Z'' + \frac{1}{a^2}(\nu - \nu_0)Z + \frac{\nu\mu}{2h}[Z(h) + Z(-h)] = 0, \quad Z'(\pm h) = \mp\nu\mu Z(\pm h); \quad \mathcal{T}_z = 0 \tag{5.7}$$

Покажем, что эта задача Стеклова – стандартная задача на СЗ, и, решая задачу (5.7), изучим наименьшее из ее СЗ.

Если существует наименьшее СЗ исходной задачи, меньшее чем ν_0, то оно в то же время – СЗ задачи (5.7).

Полагая $\nu - \nu_0 = -a^2\lambda^2 < 0$ и решая задачу (5.7), получаем

$$\text{th}\,\varkappa = -\varkappa(\mu h\nu)^{-1}, \quad \text{cth}\,\varkappa - \varkappa^{-1} = -\varkappa(\mu h\nu)^{-1} \quad (\varkappa = \lambda h) \tag{5.8}$$

Простой графический анализ показывает, что если $\nu_0 \leqslant -(\mu h)^{-1}$, то эти уравнения не имеют решений и, следовательно, не существует СЗ, меньших чем ν_0. Если $\nu > -(\mu h)^{-1}$, то наименьшее СЗ равно

$$\nu_0' = \nu_0 - a^2h^{-2}\varkappa_0'^2$$

где $\varkappa_0'$ – корень первого из уравнений (5.8). Условие $\nu_0' > 1$ выполнено лишь в случае, когда

$$\varkappa_0' < ha^{-1}\sqrt{\nu_0 - 1}$$

или

$$\text{th}\,u < -u(\mu h)^{-1} \quad (u = ha^{-1}\sqrt{\nu_0 - 1})$$

Кроме того, $\nu_0' > 1$, если выполнены условия

$$-(\mu h)^{-1} \geqslant 1, \quad \nu_0 > -(\mu h)^{-1}$$

или

$$-(\mu h)^{-1} < 1, \quad \nu_0 > 1 + a^2h^{-2}\delta^2(\mu h)$$

где $\delta(\mu h)$ – корень уравнения $\text{th}\,u = -(\mu h)^{-1}u$.

Комбинируя эти условия с условием (5.6), заключаем: если выполнены условия

$$-(\mu h)^{-1} \geqslant 1, \quad \nu_0 > \max(-(\mu h)^{-1}, \quad a^2h^{-2}\varkappa_0^2(\mu h)) \tag{5.9}$$

либо условия

$$-(\mu h)^{-1} < 1, \quad \nu_0 > \max(1 + a^2h^{-2}\delta^2(\mu h), \ a^2h^{-2}\varkappa_0^2(\mu h)) \tag{5.10}$$

то все СЗ задачи (3.4) превосходят единицу.

Исследуем случай $\nu_0 \leqslant -(\mu h)^{-1}$. В этом случае наименьшее СЗ задачи (5.7) больше или равно ν_0. Полагая $\nu - \nu_0 = 0$ в (5.7), элементарным образом находим два значения ν: $\nu = -(\mu h)^{-1}$, $\nu = -3(\mu h)^{-1}$. Тогда получаем: если

$$-(\mu h)^{-1} > 1, \quad a^2h^{-2} < -(\mu h)^{-1}\varkappa_0^{-2}(\mu h) \tag{5.11}$$

и если

$$\nu_0 = -(\mu h)^{-1} \tag{5.12}$$

то все СЗ задачи (3.4) превосходят единицу.

Исследуем, наконец, случай $\nu - \nu_0 > 0$. Полагая $\nu - \nu_0 = a^2\lambda^2 > 0$ и решая систему (5.7), получаем уравнения

$$\text{tg}\,\varkappa = -\varkappa(\mu h\nu)^{-1}, \quad \varkappa^{-1} - \text{ctg}\,\varkappa = -\varkappa(\mu h\nu)^{-1} \quad (\varkappa = \lambda h)$$

Графический анализ показывает, что эти уравнения имеют счетное множество различных корней, наименьший из которых ξ_0 – это наименьший корень первого уравнения. Ему соответствует наименьшее СЗ задачи (5.7)

$$\tilde{\nu}_0 = \nu_0 + a^2 h^{-2} \xi_0^2$$

Условие $\tilde{\nu}_0 > 1$ записывается как

$$a^2 h^{-2} \xi_0^2 > 1 - \nu_0$$

Это условие выполнено если $\nu_0 \geqslant 1$. Если $\nu_0^2 < 1$, то его можно записать как

$$\xi_0 > h a^{-1} \sqrt{1 - \nu_0}$$

Действуя как и выше, видим, что $\tilde{\nu}_0 > 1$ если

$$-(\mu h)^{-1} > 1 \quad \text{и} \quad 1 - a^2 h^{-2} \beta^2(\mu, h) < \nu_0 < 1$$

где $\beta(\mu h)$ – расположенный между 0 и $\pi/2$ корень уравнения $\operatorname{tg} u = -u(\mu h)^{-1}$.

Комбинируя эти неравенства с условием (5.6), имеем следующий результат: если выполнены условия

$$-(\mu h)^{-1} > 1, \quad a^2 h^{-2} < -(\mu h)^{-1} \varkappa_0^2(\mu h)$$

$$\max(1 - a^2 h^{-2} \beta^2(\mu h),\ a^2 h^{-2} \varkappa_0^2(\mu h)) < \nu_0 < -(\mu h)^{-1} \tag{5.13}$$

то все СЗ задачи (3.4) превосходят единицу.

Достаточные условия устойчивости относительного равновесия. Докажем, что в случае $\mu < 0$, если нижняя грань ν отношения в соотношении (5.1) больше единицы, то билинейная форма $b_1(\zeta, \tilde{\zeta})$ коэрцитивна в V_0, и положение относительного равновесия жидкости устойчиво.

По определению ν имеем

$$\mathcal{T}_1 \geqslant \nu[\mathcal{T}_3 - \mathcal{T}_2], \quad \forall \zeta \in V_0$$

В силу этого неравенства для числа ε, такого, что $0 < \varepsilon < 1$, выполнено соотношение

$$b_1(\zeta, \zeta) = \varepsilon \mathcal{T}_1 + [(1 - \varepsilon)\nu - 1]\{\mathcal{T}_3 - \mathcal{T}_2\}$$

Выбирая ε так, что $0 < \varepsilon < 1 - \nu^{-1}$, имеем

$$b_1(\zeta, \zeta) \geqslant \varepsilon \mathcal{T}_1, \quad \forall \zeta \in V_0$$

что влечет за собой коэрцитивность формы $b_1(\zeta, \tilde{\zeta})$ в V_0.

Окончательно, если $\mu < 0$ и выполнено либо одно из условий (5.9), (5.10), либо условия (5.11), (5.12), либо условия (5.13), то относительное положение равновесия жидкости устойчиво.

Таким образом, знак параметра μ, а вместе с ним – и кривизны меридиана в точке контакта с поверхностью жидкости оказывает существенное влияние на характер устойчивости относительного равновесия. При этом можно указать формы контейнеров, для которых $-(\mu h)^{-1} > 1$, $-(\mu h)^{-1} < 1$ и $-(\mu h)^{-1} = 1$ при $\mu < 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука. 1965. 439 с.
2. *Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д.* и др. Гидромеханика невесомости. М.: Наука. 1976. 504 с.
3. *Courant R., Hilbert D.* Methods of mathematical Physics. V. 1. New-York: Intersci. Publ. 1965.
4. *Riesz F., Sz. Nagy B.* Leçons d'analyse fonctionnelle. Paris: Gauthier Villars. 1968. 448 p.
5. *Roseau M.* Vibrations of Mechanical Systems. Berlin: Springer. 1987. 530 p.

Безансон, Франция

Поступила в редакцию
1.VIII.2000