ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 65. Вып. 4, 2001

УДК 531.36:532.5

© 2001 г. А.А. Буров, Д.П. Шевалье

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИЛ НЬЮТОНОВСКОГО ПРИТЯЖЕНИЯ

Обсуждается структура сил и моментов, возникающих при движении твердого тела в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости под действием сил центрального ньютоновского тяготения, выписываются в явном виде уравнения движения, указываются их первые интегралы, изучаются свойства этих интегралов. Исследуется вопрос о возможных упрощениях в постановке задачи, основанных на аналогии с классическим "спутниковым приближением" и справедливых в случае, когда поступательное движение тела можно рассматривать вне зависимости от его вращательного движения. В рамках спутникового приближения исследуется вопрос о существовании и устойчивости установившихся движений, в данном случае – относительных равновесий.

Движение твердого тела в центральном ньютоновском поле сил – классический объект исследования теоретической механики (см., например, [1, 2]). Многочисленные исследования в этой области позволили составить довольно полное представление о свойствах движения такой системы. Вместе с тем свойства движения той же системы в пространстве, заполненном идеальной несжимаемой покоящейся на бесконечности жидкостью, имеют существенные отличия. Причина тому – взаимодействие жидкости и тела в ходе движения, проявляющееся в зависимости в теле векторов поступательной и угловой скоростей.

1. Лагранжева структура и первые интегралы уравнений движения. Рассмотрим движение твердого тела $\mathcal{S}$ в идеальной несжимаемой жидкости, занимающей все пространство и находящейся в покое на бесконечности. Предположим, что система совершает движение под действием центральных сил ньютоновского тяготения с центром в точке N, фиксированным в абсолютном пространстве. Пусть $NX_\alpha X_\beta X_\gamma$ – абсолютная система координат (АСК), C – точка, фиксированная в теле, $Cx_1x_2x_3$ – связанный с телом подвижный репер (ПР). Пусть также

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad \boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

– единичные векторы инерциальной системы координат $NX_\alpha X_\beta X_\gamma$ и $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ – вектор $\overrightarrow{NC}$. Пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – абсолютная угловая скорость тела, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – абсолютная скорость точки C. Здесь и далее, если иное не оговорено, все векторы и тензоры задаются своими координатами в ПР. Уравнения, выражающие теоремы об изменении количества движения и об изменении момента количества движения, могут быть записаны в виде уравнений Лагранжа – Эйлера – Пуанкаре

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{r} \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}
\end{aligned} \qquad (1.1)$$

Эти уравнения должны быть дополнены кинематическими уравнениями

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} \tag{1.2}$$

выражающими вариацию вектора $\mathbf{r}$ по отношению к ПР.

Функция Лагранжа выписывается, как обычно, как разница между кинетической и потенциальной энергией

$$L(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}, \mathbf{r}) = T(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) - U(\mathbf{r}) \tag{1.3}$$

После того как уравнения (1.1) и (1.2) проинтегрированы, можно найти изменение ориентации тела интегрированием уравнений Пуассона

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} \tag{1.4}$$

Уравнения (1.1) и (1.2) с функцией Лагранжа, не зависящей явно от времени, допускают первый интеграл энергии – Пенлеве – Якоби

$$\mathcal{J}_0 = \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\omega}\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}, \mathbf{v}\right) - L = h \tag{1.5}$$

Кроме того, в силу уравнений (1.1) и (1.2) имеет место соотношение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right) = \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right) \times \boldsymbol{\omega} \tag{1.6}$$

выражающее закон изменения вектора кинетического момента системы по отношению к ПР. Другими словами, полный кинетический момент неизменен в абсолютном пространстве, так что его проекция на любое направление, фиксированное в абсолютном пространстве, также остается неизменной. Каждая из этих проекций – первый интеграл уравнений движения. Выберем из них три независимых

$$\mathcal{J}_i = \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}},\ \mathbf{i}\right), \quad \mathbf{i} \in \{\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}\} \tag{1.7}$$

выражающих проекции вектора полного кинетического момента на оси АСК. Для каждого движения оси этого репера можно выбрать таким образом, чтобы в начальный момент вектор полного кинетического момента был бы направлен, скажем, вдоль оси $\boldsymbol{\beta}$. Получим

$$\mathcal{J}_\alpha = 0, \quad \mathcal{J}_\beta = p_\psi, \quad \mathcal{J}_\gamma = 0 \tag{1.8}$$

Интегралы $\mathcal{J}_\alpha$, $\mathcal{J}_\beta$, $\mathcal{J}_\gamma$ и шесть геометрических интегралов уравнений Пуассона, выражающих ортонормированность репера $NX_\alpha X_\beta X_\gamma$ и имеющих вид

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_{ii} = (\mathbf{i}, \mathbf{i}) - 1 = 0, \quad \mathbf{i} \in \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}, \\ &\mathcal{J}_{ij} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 0, \quad \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}, \quad \mathbf{i} \neq \mathbf{j} \end{aligned} \tag{1.9}$$

позволяют понизить порядок системы уравнений движения и свести задачу к интегрированию уравнений Лагранжа с пятью степенями свободы. Для ее интегрирования помимо интеграла энергии надо знать еще четыре независимых коммутирующих между собой интеграла.

Уравнения движения допускают также интеграл

$$\mathcal{J}_1 = \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}},\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right) \tag{1.10}$$

выражающий собой квадрат вектора полного кинетического момента или, что то же самое, сумму квадратов интегралов $\mathcal{J}_\alpha$, $\mathcal{J}_\beta$, и $\mathcal{J}_\gamma$. Значение этого интеграла, существование которого видно из системы (1.6), в отличие от значений интегралов (1.7) не зависят от выбора АСК.

2. Кинетическая энергия. Исследуем более детально структуру функции Лагранжа (1.3). Как известно, движение твердого тела описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_c}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial T_c}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial T_c}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{v} + \mathbf{M} \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_c}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial T_c}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F} \tag{2.2}$$

где T_c – кинетическая энергия тела, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M}$ – сила и момент сил, действующих на тело. В рассматриваемом случае

$$T_c = \frac{1}{2}((\mathbf{I}_{\mathscr{G}}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + 2(\mathbf{B}_{\mathscr{G}}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) + M_{\mathscr{G}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}))$$

где $\mathbf{I}_{\mathscr{G}}$ – тензор инерции тела по отношению к точке C. Если $\mathscr{R} = (\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \mathscr{R}_3)$ – вектор $\overrightarrow{CG}$, где G – центр масс тела, $\mathbf{E}$ – единичная матрица 3×3, $M_{\mathscr{G}}$ – масса тела, то

$$\mathbf{B}_{\mathscr{G}} = M_{\mathscr{G}} \begin{Vmatrix} 0 & -\mathscr{R}_3 & \mathscr{R}_2 \\ \mathscr{R}_3 & 0 & -\mathscr{R}_1 \\ -\mathscr{R}_2 & \mathscr{R}_1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.3}$$

Силы и моменты, действующие на тело, представимы как

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_L, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_N + \mathbf{M}_L$$

где $\mathbf{F}_N$ и $\mathbf{M}_N$ – сила и момент, обусловленные наличием притягивающего центра, $\mathbf{F}_L$ и $\mathbf{M}_L$ – сила и момент, обусловленные наличием жидкости.

Если $\mathscr{U}(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ – объемная плотность сил притяжения, то потенциал ньютоновского притяжения имеет вид

$$U_{\mathscr{G}}(r) = \int_{\mathscr{G}} \rho_{\mathscr{G}}(\mathbf{x})\mathscr{U}(\mathbf{x}, \mathbf{r})d\tau(\mathbf{x})$$

где $\rho_{\mathscr{G}}(\mathbf{x})$ – плотность тела. При этом

$$\mathbf{F}_N = -\frac{\partial U_{\mathscr{G}}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{M}_N = \mathbf{r} \times \frac{\partial U_{\mathscr{G}}}{\partial \mathbf{r}} \tag{2.4}$$

В рассматриваемом случае

$$\mathscr{U}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = -f_N M_N |\mathbf{X}|^{-1}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{x} + \mathbf{r} \tag{2.5}$$

Сила и момент, действующие на тело со стороны жидкости, имеют вид

$$\mathbf{F}_L = -\int_{\partial\mathscr{G}} p(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{M}_L = -\int_{\partial\mathscr{G}} p(\mathbf{x})\mathbf{x} \times \mathbf{n}(\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{x}) \tag{2.6}$$

где $p(\mathbf{x})$ – давление жидкости в точке $\mathbf{x}$ поверхности тела, а $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ – вектор единичной внешней нормали в этой же точке (см., например, [3–5]).

Пусть род поверхности $\partial\mathscr{G}$ равен нулю и течение жидкости потенциально. Тогда существует однозначная функция $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$, определяющая поле скоростей жидкости

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \partial\phi/\partial\mathbf{x} \tag{2.7}$$

и удовлетворяющая уравнению Лапласа с граничными условиями

$$\Delta\phi = 0$$

$$\partial\phi/\partial\mathbf{n} = (\partial\phi/\partial\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})) = (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \partial\mathscr{G}$$

$$\partial\phi/\partial\mathbf{x} \to 0, \quad |\mathbf{x}| \to \infty$$

Таким образом, определение потенциала течения жидкости сводится к решению внешней задачи Неймана.

Заметим, что если род поверхности тела $\partial\mathcal{G}$ больше нуля, то нужно искать многозначный потенциал с помощью, например, метода мнимых перегородок. Но тем не менее формулы (2.7) для определения поля скоростей будут опять применимы (см. детали в [3, 4]).

После того как задача Неймана решена, давление можно определить из интеграла Коши – Лагранжа

$$p - p_0 = -\rho_L\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{x}}\right) + \mathcal{U}(x)\right) \tag{2.8}$$

Выражения $\mathbf{F}_L$ и $\mathbf{M}_L$ могут быть представлены в виде сумм

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_S, \quad \mathbf{M}_L = \mathbf{M}_D + \mathbf{M}_S$$

Величины с индексами D отвечают первым двум слагаемым в правой части интеграла Коши – Лагранжа и имеют гидродинамическое происхождение, в то время как величины с индексом S, соответствующие последнему слагаемому, имеют гидростатическое происхождение; эти сила и момент в дальнейшем будут называться архимедовыми.

В силу известных рассуждений (см., например, [5]) гидродинамические составляющие сил и моментов имеют вид

$$\mathbf{F}_D = -\frac{d\mathbf{K}}{dt} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}, \quad M_D = -\frac{d\mathbf{L}}{dt} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{L} - \mathbf{v}\times\mathbf{K}$$

где

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}_L\boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}_L\mathbf{v} = \frac{\partial T_L}{\partial \mathbf{v}}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{A}_L\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}_L^T\mathbf{v} = \frac{\partial T_L}{\partial \boldsymbol{\omega}}$$

а функция

$$T_L = \frac{1}{2}((\mathbf{A}_L\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + 2(\mathbf{B}_L\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) + (\mathbf{C}_L\mathbf{v}, \mathbf{v}))$$

– кинетическая энергия жидкости. Матрицы $\mathbf{A}_L$, $\mathbf{B}_L$ и $\mathbf{C}_L$ определяют тензор присоединенных масс тела. Тогда в ПР

$$T = T_C + T_L = \frac{1}{2}((\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + 2(\mathbf{B}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) + (\mathbf{C}\mathbf{v}, \mathbf{v}))$$

где матрицы **A**, **B**, и **C** постоянны. При этом уравнения представимы в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\omega} + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}}\times\mathbf{v} + \mathbf{M}_E, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}}\times\boldsymbol{\omega} + \mathbf{F}_E \tag{2.9}$$

$$\mathbf{F}_E = \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_S, \quad \mathbf{M}_E = \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_S$$

3. Потенциальная энергия. В силу интеграла Коши – Лагранжа гидростатическая составляющая давления имеет вид $p_S = -\rho_L\mathcal{U}(x)$, где ρ_L – плотность жидкости. Отсюда в силу формулы (2.6) и формулы Гаусса – Остроградского имеем

$$\mathbf{F}_S = -\int_{\partial\mathcal{G}} p_S\mathbf{n}d\sigma(\mathbf{x}) = \rho_L\int_{\partial\mathcal{G}} \mathcal{U}(\mathbf{x})\mathbf{n}d\sigma(\mathbf{x}) = \rho_L\int_{\mathcal{G}} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathbf{X}}(\mathbf{X})d\tau(\mathbf{X})$$

В рассматриваемом случае единственная особенность в подынтегральном выражении оказывается вне тела. Однако

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \mathcal{U}(\mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathcal{U}(\mathbf{r}+\mathbf{x})$$

откуда

$$\mathbf{F}_S = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[\rho_L \int_{\mathcal{G}} \mathcal{U}(\mathbf{r}+\mathbf{x}) d\tau(\mathbf{x}) \right] = -\frac{\partial U_A}{\partial \mathbf{r}} \tag{3.1}$$

где

$$U_A = -\rho_L \int_{\mathcal{G}} \mathcal{U}(\mathbf{x}+r) d\tau(\mathbf{x}) \left(= f_N M_N \rho_L \int_{\mathcal{G}} |\mathbf{X}|^{-1} d\tau(\mathbf{x}) \right)$$

Момент гидростатических (архимедовых) сил записывается в виде

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \frac{\partial U_A}{\partial \mathbf{r}} \tag{3.2}$$

Окончательно полный потенциал имеет вид

$$U(\mathbf{r}) = U_N(\mathbf{r}) + U_A(\mathbf{r}) = -f_N M_N \int_{\mathcal{G}} |\mathbf{X}|^{-1} dm_a(\mathbf{x}) \tag{3.3}$$

где $dm_a(\mathbf{x}) = (\rho_{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) - \rho_L) d\tau(\mathbf{x})$ – распределение присоединенных масс тела в жидкости.

Замечание. Если бы тело совершало движение в области конечных размеров ν, то выражение для потенциальной энергии можно было бы представить как

$$U(\mathbf{r}) = -f_N M_N \int_{\mathcal{G}} |\mathbf{X}|^{-1} dm_{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) - f_N M_N \int_{\nu \setminus \mathcal{G}} |\mathbf{X}|^{-1} dm_L(\mathbf{x}) =$$

$$= -f_N M_N \int_{\mathcal{G}} |\mathbf{X}|^{-1} dm_{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) + f_N M_N \int_{\mathcal{G}} |\mathbf{X}|^{-1} dm_L(\mathbf{x}) - f_N M_N \int_{\nu} |\mathbf{X}|^{-1} dm_L(\mathbf{x}) \tag{3.4}$$

Если плотность потенциала не имеет особенностей в области ν, то последнее слагаемое конечно и не зависит от $\mathbf{r}$. Оно не дает вклада в выражения для сил и моментов. Однако в случае, когда жидкостью заполнено все пространство, такие рассуждения не могут рассматриваться как строгое обоснование структуры потенциала.

В явной форме уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}^T\mathbf{v}) = (\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}^T\mathbf{v}) \times \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{B}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}\mathbf{v}) \times \mathbf{v} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{r} \tag{3.5}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}\mathbf{v}) = (\mathbf{B}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}\mathbf{v}) \times \boldsymbol{\omega} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$$

и их следует дополнить кинематическими уравнениями (1.2).

4. Приближения для потенциала. В уравнениях (1.1) и (1.2) можно использовать как точные выражения для потенциала (3.3), так и из различные приближения. Эти приближения могут быть связаны, например, с гипотезой о малости тела по сравнению с удаленностью тела от притягивающего центра. В таком случае величины $\varepsilon(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|/r$, где $r = (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^{1/2}$, малы по сравнению с единицей: $\sup_{x\in\mathscr{G}}|\varepsilon(\mathbf{x})| \ll 1$ и можно воспользоваться асимптотическим разложением

$$\frac{1}{(\mathbf{r}+\mathbf{x},\mathbf{r}+\mathbf{x})^{1/2}} = \frac{1}{r}(1 + u_1(\mathbf{r},\mathbf{x}) + u_2(\mathbf{r},\mathbf{x})) + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

для получения приближенных значений потенциала. Имеем

$$u_1(\mathbf{r},\mathbf{x}) = -\frac{(\mathbf{r},\mathbf{x})}{r^2}, \quad u_2(\mathbf{r},\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^2}{r^2} - \frac{3}{2}\frac{(\mathbf{r}\times\mathbf{x})^2}{r^4}$$

Интегрируя первое соотношение по точкам тела, имеем

$$\int_{\mathscr{G}} u_1(\mathbf{r},\mathbf{x})dm_a(\mathbf{x}) = -\frac{1}{r^2}\left(\mathbf{r}, \int_{\mathscr{G}} \mathbf{x}dm_a(\mathbf{x})\right)$$

Интеграл в правой части связан с барицентром распределения присоединенных масс. Точнее, пусть $M_a = \int_{\mathscr{G}} dm_a(\mathbf{x})$ – полная присоединенная масса тела (которая может быть как положительной, так и отрицательной или равной нулю) и C_a – барицентр распределения присоединенных масс, существующий, если $M_a \neq 0$. Имеем

$$\int_{\mathscr{G}} \mathbf{x}dm_a(\mathbf{x}) = \begin{cases} M_a\overrightarrow{CC_a} & \text{при } M_a \neq 0 \\ \boldsymbol{\mu} & \text{при } M_a = 0 \end{cases}$$

Вектор $\boldsymbol{\mu}$, не зависящий от выбора начала координат и существующий лишь при $M_a = 0$, будем называть *дипольным моментом*. Окончательно

$$\int_{\mathscr{G}} u_1(\mathbf{r},\mathbf{x})dm_a(\mathbf{x}) = \begin{cases} -M_a\dfrac{1}{r^2}(\mathbf{r},\overrightarrow{CC_a}) & \text{при } M_a \neq 0 \\ -\dfrac{1}{r^2}(\mathbf{r},m) & \text{при } M_a = 0 \end{cases}$$

Если $M_{\mathscr{G}}$ – масса тела, M_L – масса вытесненной им жидкости, $C_{\mathscr{G}}$ – центр масс тела, а C_L – центроид этого тела, т.е. центр масс жидкости, вытесненной телом, то $M_a = M_{\mathscr{G}} - M_L$ и

$$M_a\overrightarrow{CC_a} = M_{\mathscr{G}}\overrightarrow{CC_{\mathscr{G}}} - M\overrightarrow{CC_L} \text{ при } M_a \neq 0, \quad \boldsymbol{\mu} = M_{\mathscr{G}}\overrightarrow{C_LC_{\mathscr{G}}} \text{ при } M_a = 0$$

Интегрирование членов второго порядка малости дает

$$\int_{\mathscr{G}} u_2(\mathbf{r},\mathbf{x})dm_a(\mathbf{x}) = \frac{3}{2}\frac{1}{r^4}\int_{\mathscr{G}}\left\{\frac{2}{3}\mathbf{r}^2\mathbf{x}^2 - (\mathbf{r}\times\mathbf{x})^2\right\}dm_a(\mathbf{x}) = -\frac{3}{2}\frac{1}{r^4}\mathbf{I}_a^*(\mathbf{r},\mathbf{r})$$

$$\mathbf{I}_a^* = \mathbf{I}_a - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mathbf{I}_a)\mathbf{E}$$

($\mathbf{I}_a^*$ – девиатор тензора инерции присоединенных масс $\mathbf{I}_a$).

Окончательно выражение для потенциала имеет вид

$$U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}) + U_1(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r}) + o(1/r^3) \tag{4.1}$$

$$U_0(\mathbf{r}) = -f_N M_N \frac{M_a}{r}, \quad U_2(\mathbf{r}) = \frac{\varkappa}{2}\frac{(\mathbf{Dr},\mathbf{r})}{r^5}$$

$$U_1(\mathbf{r}) = \begin{cases} f_N M_N M_a \dfrac{(\mathbf{r}, \overrightarrow{CC_a})}{r^3} & \text{при } M_a \neq 0 \\ f_N M_N \dfrac{(\mathbf{r}, \boldsymbol{\mu})}{r^3} & \text{при } M_a = 0 \end{cases}$$

($\mathbf{D} = 3\mathbf{I}_a^*$ – тензор с нулевым следом, $\varkappa$ – постоянная). Таким образом, оказываются существенно различными два случая.

Случай $M_a \neq 0$. Выбирая точку C_a в качестве начала ПР, потенциал можно привести к виду

$$U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r}) + o\left(\frac{1}{r^3}\right) = -f_N M_N \frac{M_a}{r} + \frac{\varkappa}{2}\frac{(\mathbf{Dr},\mathbf{r})}{r^5} + \ldots$$

В первом приближении потенциал равен U_0, и этот потенциал порождает притягивающую или отталкивающую силу, направленную на центр N или от центра N в зависимости от того, положительна или отрицательна присоединенная масса M_a. Заметим, что потенциал первого приближения оказывает влияние лишь на поступательные движения тела и не оказывает никакого влияния на его вращения. Решающей для определения ориентации тела оказывается компонента U_2.

Случай $M_a = 0$. Потенциал принимает вид

$$U(\mathbf{r}) = U_1(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r}) + o\left(\frac{1}{r^3}\right) = f_N M_N \frac{(\mathbf{r},\boldsymbol{\mu})}{r^3} + \frac{\varkappa}{2}\frac{(\mathbf{Dr},\mathbf{r})}{k^5} + \ldots$$

В первом приближении, таким образом, ситуация нейтральна. Однако в следующем приближении компонента U_1 оказывает решающее влияние как на поступательное движение тела, так и на его вращения. Подобная ситуация не имеет места в орбитальной динамике твердых тел под действием лишь сил тяготения, так что данный случай заслуживает отдельного рассмотрения. Заметим лишь, что он имеет место только для неоднородного тела, так как из равенства нулю присоединенной массы в случае однородного тела вытекает совпадение плотностей тела и жидкости и, как следствие, тождественное равенство нулю потенциала $U(\mathbf{r})$.

5. Спутниковое приближение. В орбитальной механике твердых и деформируемых тел известно так называемое "спутниковое приближение", позволяющее упростить задачу и разделить движение центра масс системы и ее движение вокруг центра масс. Возникает вопрос о том, можно ли указать такие значения параметров в задаче о движении тела и жидкости, при которых может быть использован аналог спутникового приближения.

Рассмотрим вопрос о малости тела следующим образом. Предположим, что существует семейство гомотетичных между собой тел с общим центром гомотетии в точке C и это семейство параметризовано отношением гомотетии ε. Пусть

$$f(x_1/\varepsilon, x_2/\varepsilon, x_3/\varepsilon) = 0$$

– параметрическое уравнение поверхностей этих тел. Если $\varepsilon \to 0$, то размеры тела также стремятся к нулю. Плотность тела предполагается не зависящей от размеров тела, т.е. от параметра ε. Тогда решение уравнения Лапласа может быть выражено как функция ε. Подставляя это решение в формулы для компонент матрицы кинетической энергии, получаем их зависимость от этого параметра. Имеем

$$M_k(\varepsilon)=\varepsilon^3 M_k(1),\quad k\in\{\mathcal{G},L\},\quad B_{\mathcal{G}}(\varepsilon)=\varepsilon^4 B_{\mathcal{G}}(1),\quad I_{\mathcal{G}}(\varepsilon)=\varepsilon^5 I_{\mathcal{G}}(1)$$

$$\mathbf{A}_L(\varepsilon)=\varepsilon^5\mathbf{A}_L(1),\quad \mathbf{B}_L(\varepsilon)=\varepsilon^4\mathbf{B}_L(1),\quad \mathbf{C}_L(\varepsilon)=\varepsilon^3\mathbf{C}_L(1)$$

Тогда

$$\mathbf{A}(\varepsilon)=\varepsilon^5\mathbf{A}(1),\quad \mathbf{B}(\varepsilon)=\varepsilon^4\mathbf{B}(1),\quad \mathbf{C}(\varepsilon)=\varepsilon^2\mathbf{C}(1) \tag{5.1}$$

По тем же соображениям

$$\mathbf{D}(\varepsilon)=\varepsilon^5\mathbf{D}(1) \tag{5.2}$$

$$U(\mathbf{r},\varepsilon)=U_0(\mathbf{r},\varepsilon)+U_1(\mathbf{r},\varepsilon)+U_2(\mathbf{r},\varepsilon)+\ldots=\varepsilon^3U_0(\mathbf{r},1)+\varepsilon^4U_1(\mathbf{r},1)+\varepsilon^5U_2(\mathbf{r},1)+\ldots \tag{5.3}$$

Рассмотрим, например, тело в форме эллипсоида. Пусть его центр и главные оси совпадают соответственно с центром и главными осями подвижного репера, а полуоси a_i зависят от параметра ε

$$\alpha_i=\varepsilon a_i',\quad a_i'=O(1) \tag{5.4}$$

Структура компонент тензора присоединенных масс хорошо известна [4]. Имеем

$$\mathbf{C}_L=\operatorname{diag}(C_{L1},C_{L2},C_{L3}),\quad C_{Li}=\frac{\delta_i}{2-\delta_i}\rho_L v,\quad i=1,2,3 \tag{5.5}$$

$$\delta_i(a_1,a_2,a_3)=a_1a_2a_3\int\limits_0^\infty\frac{d\lambda}{(a_i^2+\lambda)\Delta}\quad \Delta=((a_1^2+\lambda)(a_2^2+\lambda)(a_3^2+\lambda))^{1/2}$$

($v={}^4/_3\pi a_1a_2a_3$ – объем тела). Матрица $\mathbf{B}_L$ равна нулю. Матрица $\mathbf{A}_L$ имеет вид

$$\mathbf{A}_L=\operatorname{diag}(A_{L1},A_{L2},A_{L3}),\quad A_{L1}=\frac{1}{5}\frac{(a_2^2-a_3^2)^2(\delta_3-\delta_2)}{2(a_2^2-a_3^2)+(a_2^2+a_3^2)(\delta_2-\delta_3)}\rho_L v\ (1\ 2\ 3)$$

Подставляя выражения (5.4) и $\lambda=\lambda'\varepsilon^2$ в соотношение (5.5) и считая плотность жидкости ρ_L постоянной, имеем

$$\delta_i(a_1,a_2,a_3)=\delta_i(a_1',a_2',a_3')$$

$$C_{Li}(a_1,a_2,a_3)=\varepsilon^3C_{Li}(a_1',a_2',a_3'),\quad A_{Li}(a_1,a_2,a_3)=\varepsilon^5A_{Li}(a_1',a_2',a_3')$$

Пусть $\varepsilon\neq 0$. Тогда, подставив выражения (5.1), (5.3) в уравнения движения, разделив их левые и правые части на $\varepsilon^2\neq 0$ и отбросив аргумент единица при матрицах, имеем

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon^2\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}+\varepsilon\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v})=(\varepsilon^2\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}+\varepsilon\mathbf{B}^T\mathbf{v})\times\boldsymbol{\omega}+(\varepsilon\mathbf{B}\boldsymbol{\omega}+\mathbf{C}\mathbf{v})\times\mathbf{v}-\left(\varepsilon\frac{\partial U_1}{\partial\mathbf{r}}+\varepsilon^2\frac{\partial U_2}{\partial\mathbf{r}}+\ldots\right)\times\mathbf{r} \tag{5.6}$$

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon\mathbf{B}\boldsymbol{\omega}+\mathbf{C}\mathbf{v})=(\varepsilon\mathbf{B}\boldsymbol{\omega}+\mathbf{C}\mathbf{v})\times\boldsymbol{\omega}-\left(\frac{\partial U_0}{\partial\mathbf{r}}+\varepsilon\frac{\partial U_1}{\partial\mathbf{r}}+\ldots\right) \tag{5.7}$$

Будем искать решения в виде формальных рядов

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_0+\varepsilon\boldsymbol{\omega}_1+\ldots,\quad \mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\varepsilon\mathbf{v}_1+\ldots,\quad \mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\varepsilon\mathbf{r}_1+\ldots$$

Поскольку дальнейшие рассуждения касаются лишь членов наинизшего порядка, нулевой индекс всюду далее будет опущен.

Предположим, что тензор $\mathbf{C}$ – несферический. Тогда в первой группе уравнений (5.6) параметр ε^2 остается множителем при старшей производной и прямая аналогия со спутниковым приближением в общем случае не имеет места. Возможные способы преодоления возникающей трудности в данной работе рассматриваться не будут.

Предположим теперь, что тензор C сферический: $\mathbf{C} = c\mathbf{E}$. Тогда $\mathbf{C}\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$ и обе части уравнений (5.6) можно разделить на $\varepsilon \neq 0$. В пределе при $\varepsilon \to 0$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B}^T\mathbf{v} = \mathbf{B}^T\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} - \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}}\times\mathbf{r} \tag{5.8}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{c}\frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}} \tag{5.9}$$

Выпишем уравнения (5.9) по отношению к АСК. В ней $\mathbf{R}$ – вектор $\overrightarrow{NC}$, и уравнения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = \frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{R}} \tag{5.10}$$

с лагранжианом

$$L_0(\dot{\mathbf{R}},\mathbf{R}) = \frac{c}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + f_N M_N (M_{\mathscr{G}} - M_L)\frac{1}{r}, \quad r = (\mathbf{r},\mathbf{r})^{1/2} = (\mathbf{R},\mathbf{R})^{1/2}$$

Они в явном виде записываются как

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -\frac{1}{c} f_N M_N (M_{\mathscr{G}} - M_L)\frac{\mathbf{R}}{r^3} \tag{5.11}$$

Эти уравнения интегрируются так же, как и уравнения в задаче Кеплера, но качественные свойства движения при определенных условиях оказываются совершенно другими. Например, если $M_L > M_{\mathscr{G}}$, то не существует замкнутых орбит. Если $M_L = M_{\mathscr{G}}$, то в этом приближении точка C движется с постоянной скоростью вдоль прямой, не обязательно проходящей через начало координат, что не наблюдается в задаче Кеплера. Наконец, если $M_L < M_{\mathscr{G}}$, то, как и в задаче Кеплера, имеются гиперболические, параболические и эллиптические орбиты. Но параметры этих орбит зависят как от масс $M_{\mathscr{G}}$ и M_L, так и от коэффициента c тензора присоединенных масс.

После того как уравнения (5.11) проинтегрированы, т.е. найдены зависимости

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(t), \quad \mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{V}(t)$$

величины $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ могут быть представлены как функции времени и ориентации тела

$$\mathbf{r} = \mathbf{S}^T\mathbf{R}(t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{S}^T\mathbf{V}(t), \quad \mathbf{S} = \begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{Vmatrix} \tag{5.12}$$

Подставляя указанные выражения в уравнения (5.8), получаем алгебраическую систему уравнений относительно $\boldsymbol{\omega}$. При выполнении условий, обеспечивающих совместность системы и единственность ее решения, подстановка этого решения в систему уравнений Пуассона дает замкнутую систему для определения изменения ориентации тела. Не будем здесь останавливаться на деталях.

По причинам, указанным выше, гравитационный момент не играет решающей роли в системе (5.8), кроме как в случае, когда $M_{\mathscr{G}} = M_L$. Но в этом случае в силу уравнений (5.11) точка C движется вдоль прямой и задача не может быть рассмотрена как задача о движении спутника. Если $M_{\mathscr{G}} \neq M_L$, то точка C движется по кеплеровской орбите, но в рамках рассматриваемого приближения силы притяжения не играют роли в движении тела вокруг точки C.

Наконец, пусть $\mathbf{C} = c\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = 0$ и $M_{\mathscr{G}} \neq M_L$. Тогда, после деления на $\varepsilon^2 \neq 0$ уравнений (5.6), получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} - \frac{\partial U_2}{\partial \mathbf{r}}\times\mathbf{r} = \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} - \frac{\varkappa}{r^5}\mathbf{D}\mathbf{r}\times\mathbf{r} \tag{5.13}$$

которое вместе с уравнениями Пуассона описывает изменение ориентации тела. В общем случае эти уравнения – вновь уравнения Эйлера – Лагранжа – Пуанкаре

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\omega} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{r}}\times\mathbf{r}, \quad \mathscr{L}(\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\omega}) - U_2(\mathbf{r}) \tag{5.14}$$

Движение точки C снова определено уравнением (5.11). Подставляя $\mathbf{r} = \mathbf{S}^T\mathbf{R}(t)$ из (5.12) в систему (5.13) и рассматривая последнюю совместно с уравнениями Пуассона, имеем замкнутую, в общем случае неавтономную систему из 12 уравнений относительно 12 неизвестных для определения ориентации тела и изменения угловой скорости.

По аналогии с задачей Кеплера заключаем, что в рассматриваемом приближении точка C движется в плоскости, фиксированной в абсолютном пространстве и перпендикулярной составляющей вектора кинетического момента, соответствующего уравнениям (5.11). В силу интегралов (1.8) эта плоскость совпадает с плоскостью $NX_\alpha X_\gamma$. Чтобы проинтегрировать уравнения (5.11), предположим, что движение точки C осуществляется в этой же плоскости. Введем в этой плоскости полярные координаты

$$R_\gamma = r\cos\psi, \quad R_\alpha = r\sin\psi$$

Функция Лагранжа (5.10) тогда записывается как

$$L(\dot r,\ \dot\psi,\ r) = \frac{c}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\psi^2) + f_N M_N(M_{\mathscr{G}} - M_L)\frac{1}{r}$$

Координата ψ – циклическая и соответствующий первый интеграл имеет вид

$$cr^2\dot\psi = p_\psi \tag{5.15}$$

откуда

$$\dot\psi = p_\psi/(cr^2)$$

и функция Рауса может быть представлена как

$$R(\dot r,\ r,\ p_\psi) = c\dot r^2/2 - U_A(r,\ p_\psi), \quad U_A(r,\ p_\psi) = p_\psi^2/(2cr^2) + U(r) \tag{5.16}$$

где $U_A(r, p_\psi)$ – приведенный потенциал. Критические точки этого потенциала соответствуют радиусам круговых орбит. Имеем

$$\frac{\partial U_A}{\partial r} = -\frac{p_\psi^2}{cr^3} + f_N M_N(M_{\mathscr{G}} - M_L)\frac{1}{r^2} = 0$$

откуда выводим, что на этих орбитах

$$r = \frac{p_\psi^2}{cf_N M_N(M_{\mathscr{G}} - M_L)} = \left(\frac{f_N M_N(M_{\mathscr{G}} - M_L)}{c\dot\psi^2}\right)^{1/3} \tag{5.17}$$

или в форме "закона Кеплера"

$$r^3\dot\psi^2 = f_N M_N(M_{\mathscr{G}} - M_L)/c$$

Отсюда следует соотношение между радиусом орбиты, массами и присоединенными массами.

Так как $c \geqslant M_{\mathscr{G}}$, а $M_L \geqslant 0$, то в общем случае постоянная в правой части последнего равенства меньше, чем постоянная в правой части в случае отсутствия жидкости. Иными словами, для данного орбитального радиуса орбитальная угловая скорость движения в пространстве, заполненном жидкостью, меньше орбитальной скорости в пустоте.

Можно использовать истинную аномалию ψ в качестве независимой переменной вместо времени. В случае эллиптической орбиты такая замена позволяет отыскать уравнение орбиты

$$r = p/(1 - e\cos\psi) \tag{5.18}$$

где p – параметр эллипса, e – его эксцентриситет. Подстановкой выражения (5.18) в равенство (5.15) получаем уравнение, определяющее ψ как функцию времени. За исключением случая кругового движения, решение этого уравнения, называемого уравнением Кеплера, не может быть выражено в конечном виде. Для того чтобы избежать его решения в явном виде, при описании изменения ориентации тела также используют истинную аномалию в качестве независимой переменной.

6. Динамика системы относительно равномерно вращающейся "орбитальной" системы координат. Рассмотрим теперь орбитальную систему координат $NX'_\alpha X'_\beta X'_\gamma$, совершающую вращение вокруг оси NX'_β, совпадающей с осью NX_β. Пусть NX'_γ – ось, направленная вдоль вектора $\overrightarrow{NC}$, ось NX'_β ортогональна плоскости орбиты, ось NX'_α находится в плоскости орбиты и дополняет NX'_γ и NX'_β до правой тройки. Пусть

$$\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha'_1,\ \alpha'_2,\ \alpha'_3),\quad \boldsymbol{\beta}' = (\beta'_1,\ \beta'_2,\ \beta'_3),\quad \boldsymbol{\gamma}' = (\gamma'_1,\ \gamma'_2,\ \gamma'_3)$$

– единичные векторы этой системы координат. Тогда

$$\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}\cos\psi - \boldsymbol{\gamma}\sin\psi,\quad \boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta},\quad \boldsymbol{\gamma}' = \boldsymbol{\alpha}\sin\psi + \boldsymbol{\gamma}\cos\psi$$

В общем случае этот репер вращается неравномерно. Ограничимся лишь случаем кругового движения, тогда орбитальная угловая скорость $\dot\psi = \mathrm{const}$. Пусть $\boldsymbol{\Omega}$ – угловая скорость относительно репера $NX'_\alpha X'_\beta X'_\gamma$. Эта скорость и абсолютная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ связаны соотношением

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \dot\psi\boldsymbol{\beta} \tag{6.1}$$

Положим

$$\mathscr{L}_r(\boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}) = \mathscr{L}(\boldsymbol{\Omega} + \dot\psi\boldsymbol{\beta},\ r\boldsymbol{\gamma})$$

Здесь и далее в этом и следующих разделах всюду опущены штрихи.

Имеем

$$\frac{\partial\mathscr{L}_r}{\partial\boldsymbol{\Omega}} \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\omega}},\quad \frac{\partial\mathscr{L}_r}{\partial\boldsymbol{\beta}} = \dot\psi\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\omega}},\quad \frac{\partial\mathscr{L}_r}{\partial\boldsymbol{\gamma}} = r\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\mathbf{r}}$$

Отсюда в силу уравнений (5.14)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}_r}{\partial\boldsymbol{\Omega}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\omega}}\times(\boldsymbol{\Omega} + \dot\psi\boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{r}\frac{\partial\mathscr{L}_r}{\partial\boldsymbol{\gamma}}\times(r\boldsymbol{\gamma}) = \frac{\partial\mathscr{L}_r}{\partial\boldsymbol{\Omega}}\times\boldsymbol{\Omega} + \frac{\partial\mathscr{L}_r}{\partial\boldsymbol{\beta}}\times\boldsymbol{\beta} + \frac{\partial\mathscr{L}_r}{\partial\boldsymbol{\gamma}}\times\boldsymbol{\gamma} \tag{6.2}$$

Запишем функцию Лагранжа для рассматриваемой задачи

$$\mathcal{L}_r = \frac{1}{2}(\mathbf{A}(\boldsymbol{\Omega}+\dot{\psi}\boldsymbol{\beta}),\ \boldsymbol{\Omega}+\dot{\psi}\boldsymbol{\beta}) - \frac{\varkappa}{r^3}(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\gamma}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{\Omega}) + \dot{\psi}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta}) - \frac{1}{2}K(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\gamma}),\ K = \frac{\varkappa}{r^3} \tag{6.3}$$

В силу уравнений Пуассона для репера $NX'_\alpha X'_\beta X'_\gamma$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\Omega},\quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\Omega},\quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\Omega} \tag{6.4}$$

уравнения Эйлера – Лагранжа – Пуанкаре принимают вид

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Omega} + \dot{\psi}[\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\beta} - \mathbf{A}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\Omega})] + \dot{\psi}^2\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta} + K\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\gamma} \tag{6.5}$$

Помимо геометрических интегралов

$$\mathcal{F}_{ii} = (\mathbf{i},\ \mathbf{i}) - 1 = 0,\quad \mathbf{i}\in\{\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}\} \tag{6.6}$$

$$\mathcal{F}_{ij} = (\mathbf{i},\ \mathbf{j}) = 0,\quad \mathbf{i},\ \mathbf{j}\in\{\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}\},\quad \mathbf{i}\neq\mathbf{j}$$

система (6.4) и (6.5) допускает интеграл энергии (Пенлеве – Якоби)

$$\mathcal{F}_I = \left(\frac{\partial\mathcal{L}_r}{\partial\boldsymbol{\Omega}},\ \boldsymbol{\Omega}\right) - \mathcal{L}_r = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{\Omega}) + \frac{1}{2}[K(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\gamma}) - \dot{\psi}^2(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta})] \tag{6.7}$$

Функция

$$U_a(\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}) = -\mathcal{L}_r(0,\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}) = -\dot{\psi}^2(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta})/2 + K(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\gamma})/2 \tag{6.8}$$

называется измененным потенциалом рассматриваемой системы.

Для полной интегрируемости уравнений спутникового приближения в случае круговой орбиты недостает двух дополнительных коммутативных независимых первых интегралов.

7. Относительные равновесия в рамках спутникового приближения. С помощью метода Рауса можно найти установившиеся движения и исследовать достаточные условия их устойчивости в рамках спутникового приближения. Рассмотрим функцию Рауса

$$W = \mathcal{F}_I + \lambda\mathcal{F}_\beta/2 + \mu\mathcal{F}_\gamma/2 + \nu\mathcal{F}_{\beta\gamma} \tag{7.1}$$

и положим

$$\tau = r^3\dot{\psi}^2/\varkappa = \dot{\psi}^2/K$$

Поскольку вектор α не входит явно в функцию Лагранжа, интегралы с α не включены в эту линейную комбинацию. Критические точки функции (7.1) соответствуют установившимся движениям рассматриваемой системы и могут быть найдены из уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial\boldsymbol{\Omega}} = \frac{\partial^2\mathcal{L}_r}{\partial\boldsymbol{\Omega}^2}\boldsymbol{\Omega} + \frac{\partial\mathcal{L}_r}{\partial\boldsymbol{\Omega}} - \frac{\partial\mathcal{L}_r}{\partial\boldsymbol{\Omega}} = \frac{\partial^2\mathcal{L}_r}{\partial\boldsymbol{\Omega}^2}\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega} = 0 \tag{7.2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial\boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial^2\mathcal{L}_r}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{\Omega} - \frac{\partial\mathcal{L}_r}{\partial\boldsymbol{\beta}} + \lambda\boldsymbol{\beta} + \nu\boldsymbol{\gamma} = 0 \tag{7.3}$$

$$\frac{\partial W}{\partial\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\partial^2\mathcal{L}_r}{\partial\boldsymbol{\gamma}\partial\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{\Omega} - \frac{\partial\mathcal{L}_r}{\partial\boldsymbol{\gamma}} + \nu\boldsymbol{\beta} + \mu\boldsymbol{\gamma} = 0 \tag{7.4}$$

Для того чтобы определить относительные равновесия, надо рассмотреть эти уравнения совместно с не зависящими от α интегралами из (6.6) как систему относительно $\mathbf{\Omega}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ и множителей Лагранжа λ, μ и ν.

Уравнение (7.2) всегда допускает решение $\mathbf{\Omega} = 0$ и если матрица $\partial^2\mathcal{L}_r/\partial\mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{A}$ невырождена, что имеет место в механике, то это решение – единственное. С точки зрения механики равенство $\mathbf{\Omega} = 0$ означает, что эти движения – установившиеся, т.е. на них твердое тело неподвижно относительно орбитальной системы координат $NX'_\alpha X'_\beta X'_\gamma$. Иными словами, на этих движениях система находится в равновесии относительно репера, равномерно вращающегося вокруг оси NX_β, этими движениями в данном случае являются относительные равновесия (ОР).

Из уравнений (7.3) и (7.4) выводим

$$(\lambda\mathbf{E} - \dot\psi^2\mathbf{A})\boldsymbol{\beta} + \nu\boldsymbol{\gamma} = 0 \tag{7.5}$$

$$\nu\boldsymbol{\beta} + (K\mathbf{D} + \mu\mathbf{E})\boldsymbol{\gamma} = 0 \tag{7.6}$$

Уравнения (7.5), (7.6) имеют более общий вид, нежели классические уравнения, описывающие ОР спутника, совершающего движение в пустоте (см., например, [1, 2, 6]).

Домножая скалярно уравнение (7.5) на $\boldsymbol{\gamma}$ и уравнение (7.6) на $\boldsymbol{\beta}$ и используя геометрические интегралы, получаем

$$\nu = \dot\psi^2(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}) = -K(\mathbf{D}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}) \tag{7.7}$$

Домножая скалярно уравнение (7.5) на $\boldsymbol{\beta}$ и уравнение (7.6) на $\boldsymbol{\gamma}$, получаем

$$\lambda = \dot\psi^2(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta}), \quad \mu = -K(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\gamma}) \tag{7.8}$$

Тем не менее этим способом исключения множителей Лагранжа не удается получить замкнутую подсистему уравнений относительно $\boldsymbol{\beta}$ или $\boldsymbol{\gamma}$. Однако можно воспользоваться способом, изложенным ранее [6]. Переписывая уравнение (7.5), получаем

$$(\dot\psi^2\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\boldsymbol{\beta} = \nu\boldsymbol{\gamma}$$

Скалярное произведение левых и правых частей, единственность $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ и выражение для λ из (7.8) влекут за собой соотношения

$$\begin{aligned}\nu &= \varepsilon_1((\dot\psi^2\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\boldsymbol{\beta},\ (\dot\psi^2\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\boldsymbol{\beta})^{1/2} = \varepsilon_1(\lambda^2 - 2\lambda\dot\psi^2(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta}) + \dot\psi^4(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta},\ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}))^{1/2} = \\ &= \varepsilon_1\dot\psi^2((\mathbf{A}\boldsymbol{\beta},\ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}) - (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta})^2)^{1/2} = \\ &= \varepsilon_1\dot\psi^2(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta},\ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta})^{1/2} = \varepsilon_1\dot\psi^2\,|\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta}|,\quad \varepsilon_1 = \pm 1\end{aligned} \tag{7.9}$$

Тогда в силу того же уравнения (7.5)

$$\boldsymbol{\gamma} = \varepsilon_1(\mathbf{A} - (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta})\mathbf{E})\boldsymbol{\beta}\,|\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta}|^{-1} = -\varepsilon_1\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{A}\boldsymbol{\beta})\,|\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta}|^{-1} \tag{7.10}$$

если вектор $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}$ не коллинеарен вектору $\boldsymbol{\beta}$ или если $\nu \neq 0$.

Используя равенство (7.6), находим таким же образом, что

$$\nu = \varepsilon_2 K|\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\gamma}|,\quad \varepsilon_2 = \pm 1 \tag{7.11}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \varepsilon_2 \operatorname{sign} K((\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\gamma})\mathbf{E} - \mathbf{D})\boldsymbol{\gamma}\,|\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\gamma}|^{-1} = -\varepsilon_2 \operatorname{sign} K\boldsymbol{\gamma}\times(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\gamma})\,|\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\gamma}|^{-1} \tag{7.12}$$

Подставляя выражение для $\boldsymbol{\beta}$ из первого равенства (7.12) в уравнение (7.10), получаем уравнение

$$(\mathcal{B}(\boldsymbol{\gamma}) - \mathcal{C}(\boldsymbol{\gamma}))\boldsymbol{\gamma} = 0$$

Таким образом, вектор $\boldsymbol{\gamma}$ должен принадлежать ядру матрицы $(\mathcal{B}(\boldsymbol{\gamma}) - \mathcal{C}(\boldsymbol{\gamma}))$, и существование решения влечет равенство $\det(\mathcal{B}(\boldsymbol{\gamma}) - \mathcal{C}(\boldsymbol{\gamma})) = 0$, что вновь говорит о том, что решения расположены на некоторой поверхности в пространстве $\boldsymbol{\gamma}$. Кроме того, эти решения располагаются на пересечении этой поверхности со сферой $\boldsymbol{\gamma}^2 - 1 = 0$. Такие же условия можно получить и в пространстве переменных $\boldsymbol{\beta}$.

8. Исследование относительных равновесий с помощью уравнений относительного движения. Понятно, что ОР могут быть также найдены непосредственно из уравнений относительного движения. Полагая $\boldsymbol{\Omega} = 0$ в уравнениях (6.5), получаем систему алгебраических уравнений

$$\dot{\psi}^2 \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta} = K\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma} \tag{8.1}$$

выражающих равенство моментов активных и центробежных сил. Проекции этих моментов на оси орбитальной системы координат дают систему уравнений

$$-\dot{\psi}^2(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}) = K(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\beta}), \quad 0 = -K(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\alpha}), \quad \dot{\psi}^2(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\alpha}) = 0 \tag{8.2}$$

которую также нужно рассматривать совместно с интегралами (6.6).

Заметим, что первое из уравнений (8.2) эквивалентно уравнению (7.7).

Пользуясь геометрическим соотношением $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}$, исключим $\boldsymbol{\alpha}$ из уравнений (8.2). Теперь вместо всех интегралов (6.6) достаточно рассмотреть лишь те, которые не зависят от $\boldsymbol{\alpha}$. Выделяя из получившейся системы однородную и неоднородную подсистемы, окончательно имеем

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \ (\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) = 0, \ (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) = 0, \ \tau(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) + (\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) = 0 \tag{8.3}$$

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) = 1, \ (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1 \tag{8.4}$$

Таким образом, если удается найти некоторое ненулевое решение однородной подсистемы (8.3), то с помощью неоднородной подсистемы (8.4) можно осуществить нормировку этого решения.

В силу уравнений (7.5) (соответственно (7.6)) вектор $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}$ (соответственно вектор $\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}$) должен находиться в плоскости, порожденной векторами $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, для чего необходимо и достаточно, чтобы вектор $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}$ (соответственно $\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}$) был ортогонален вектору $\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}$. Дополнительное ограничение, связанное с единственностью значения множителя Лагранжа ν, состоит в выполнении четвертого из условий (8.3).

В силу этого же условия величины $(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\beta})$ и $(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})$ либо одновременно обращаются в нуль, либо одновременно отличны от нуля (предполагается, что $\tau \neq 0$).

Решения, таким образом, могут быть двух типов (уточним, что под главными осями инерции здесь понимаются собственные векторы тензора $\mathbf{A}$):

Решения первого типа: вектор $\boldsymbol{\beta}$ – несобственный вектор тензора $\mathbf{A}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ – несобственный вектор тензора $\mathbf{D}$ (и $(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \neq 0$, $(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) \neq 0$). Для каждого из этих решений главные оси инерции находятся в общем положении по отношению к вектору $\boldsymbol{\beta}$ и к вектору $\overrightarrow{NC}$ (при необходимости ориентированных в главных плоскостях, но не расположенных вдоль главных осей) и значение произведения $r^3\dot{\psi}^2$ фиксировано (что устанавливает соотношение между радиусом орбиты и угловой скоростью).

Решения второго типа: вектор $\boldsymbol{\beta}$ – собственный вектор тензора $\mathbf{A}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ – собственный вектор тензора $\mathbf{D}$, постоянная τ – некоторое число (и $(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) = 0$). Для этих решений одна из главных осей инерции ориентирована вдоль нормали к плоскости орбиты, а одно из главных направлений тензора $\mathbf{D}$ ориентировано вдоль вектора $\overrightarrow{NC}$, значения радиуса орбиты и угловой скорости произвольны.

Рассмотрим первое, третье и четвертое соотношения из (8.3) как подсистему относительно $\boldsymbol{\gamma}$. Принимая во внимание симметрию тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ и свойства смешанного произведения, представим условия существования вектора $\boldsymbol{\gamma} \neq 0$, удовлетворяющего этой системе, в виде

$$(\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}), \mathbf{D}\boldsymbol{\beta} + \tau\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}) = 0 \tag{8.5}$$

При этом само решение записывается как (7.10). Условие того, что γ удовлетворяет оставшемуся из уравнений (8.3), имеет вид

$$(\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta})), \mathbf{D}(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta})) = 0 \tag{8.6}$$

В итоге для того, чтобы система (8.3) имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (8.5) и (8.6).

Условие (8.5) определяет в пространстве $\boldsymbol{\beta}$ конус четвертого порядка, в то время как условие (8.6) определяет конус пятого порядка, причем оба конуса содержат собственные векторы тензора **A**. Каждому ненулевому вектору $\boldsymbol{\beta}$ (длину которого можно считать равной единице), принадлежащему данному конусу (8.6) и не коллинеарному ни одному из главных направлений инерции, отвечает одно решение первого рода ($\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \tau$) (и ортонормированный базис $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$ с вектором $\boldsymbol{\alpha}$, имеющим то же направление, что и $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}$). Напротив, векторы $\boldsymbol{\beta}$, коллинеарные хотя бы одному из главных направлений, могут как быть, так и не быть с необходимостью решениями второго рода. Пересечение этих конусов со сферой $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) = 1$ составлено из точек, определяющих возможные положения осей в пространстве $\boldsymbol{\beta}$.

Если рассмотреть первое, второе и четвертое соотношения из (8.3) как подсистему относительно $\boldsymbol{\beta}$, то сходные рассуждения дают условия существования $\boldsymbol{\beta} \neq 0$, которые можно представить в виде

$$(\boldsymbol{\gamma} \times (\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}), \ \mathbf{A}(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})) = 0, \ \ (\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})^2 + \tau(\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}, \ \mathbf{D}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}) = 0 \tag{8.7}$$

При этом само решение имеет вид (7.12).

Исследование решений системы уравнений (8.5) и (8.6) или (8.7) достаточно громоздко и требует применения методов алгебраической геометрии.

9. Простейшие относительные равновесия и достаточные условия их устойчивости. Пусть тензоры **A** и **D** соосны. Тогда существуют простейшие ОР, на которых собственные векторы матриц **A** и **D** совпадают с осями орбитальной системы координат. Пусть одна из главных осей матриц **A** и **D** направлена вдоль $\boldsymbol{\beta}$, а другая – вдоль $\boldsymbol{\gamma}$. Тогда, например,

$$\boldsymbol{\alpha} = (\pm 1, 0, 0), \quad \boldsymbol{\beta} = (0, \pm 1, 0), \quad \boldsymbol{\gamma} = (0, 0, \pm 1) \tag{9.1}$$

В этом случае

$$\nu = 0, \quad \lambda = \dot{\psi}^2 a_2, \quad \mu = -K d_3 \tag{9.2}$$

Чтобы найти достаточные условия устойчивости ОР, достаточно изучить [6, 7] сигнатуру ограничения второй вариации функции W на линейное многообразие

$$\delta\mathcal{F} = \{(\delta\boldsymbol{\beta}, \ \delta\boldsymbol{\gamma}): \ (\boldsymbol{\beta}, \ \delta\boldsymbol{\beta}) = 0, \ (\boldsymbol{\gamma}, \delta\boldsymbol{\gamma}) = 0, \ (\boldsymbol{\beta}, \ \delta\boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\gamma}, \ \delta\boldsymbol{\beta}) = 0\}$$

Вторая вариация на ОР может быть представлена в виде

$$2\delta^2 W = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_r}{\partial \boldsymbol{\Omega}^2}\delta\boldsymbol{\Omega}, \ \delta\boldsymbol{\Omega}\right) + \left(\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_r}{\partial \boldsymbol{\beta}^2} + \lambda\mathbf{E}\right)\delta\boldsymbol{\beta}, \ \delta\boldsymbol{\beta}\right) +$$
$$+ \left(\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_r}{\partial \boldsymbol{\gamma}^2} + \mu\mathbf{E}\right)\delta\boldsymbol{\gamma}, \ \delta\boldsymbol{\gamma}\right) + 2\left(\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_r}{\partial \boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\gamma}} + \nu\mathbf{E}\right)\delta\boldsymbol{\gamma}, \ \delta\boldsymbol{\beta}\right) =$$
$$= (\mathbf{A}\delta\boldsymbol{\Omega}, \ \delta\boldsymbol{\Omega}) + ((\lambda\mathbf{E} - \dot{\psi}^2\mathbf{A})\delta\boldsymbol{\beta}, \ \delta\boldsymbol{\beta}) + ((\mu\mathbf{E} + K\mathbf{D})\delta\boldsymbol{\gamma}, \ \delta\boldsymbol{\gamma}) + \nu(\delta\boldsymbol{\beta}, \ \delta\boldsymbol{\gamma})$$

На рассматриваемых ОР линейное многообразие определено равенствами

$$\delta\beta_2 = 0, \quad \delta\gamma_3 = 0, \quad \beta_2\delta\gamma_2 + \gamma_3\delta\beta_3 = 0 \Leftrightarrow \delta\gamma_2 = \pm\delta\beta_3 = \delta \tag{9.3}$$

Ограничение второй вариации на линейное многообразие дает, таким образом

$$\begin{aligned} 2\delta^2 W|_{(9.3)} &= (\mathbf{A}\delta\mathbf{\Omega},\ \delta\mathbf{\Omega}) + \dot\psi^2(a_2 - a_1)\delta\beta_1^2 + \dot\psi^2(a_2 - a_3)\delta\beta_3^2 + \\ &+ K(d_1 - d_3)\delta\gamma_1^2 + K(d_2 - d_3)\delta\gamma_2^2 = \\ &= (\mathbf{A}\delta\mathbf{\Omega},\ \delta\mathbf{\Omega}) + \dot\psi^2(a_2 - a_1)\delta\beta_1^2 + K(d_1 - d_3)\delta\gamma_1^2 + \\ &+ [\dot\psi^2(a_2 - a_3) + K(d_2 - d_3)]\delta^2 \end{aligned} \tag{9.4}$$

Первое слагаемое – квадратичная форма, всегда положительно определенная в силу положительной определенности кинетической энергии системы. Второе слагаемое положительно определено, если

$$a_2 - a_1 > 0$$

т.е. если обобщенный момент инерции по отношению к оси, нормальной к плоскости орбиты, больше, чем обобщенный момент инерции по отношению к оси, касательной к орбите. Третье слагаемое положительно, если

$$d_1 - d_3 > 0$$

т.е. если собственное значение матрицы **D**, соответствующее собственному вектору, направленному по касательной к орбите, больше, чем собственное значение матрицы **D**, соответствующее собственному вектору, направленному по локальной вертикали. Последнее условие положительной определенности имеет вид

$$\dot\psi^2(a_2 - a_3) + K(d_2 - d_3) > 0$$

Невыполнение любого из этих условий влечет за собой бифуркацию рассматриваемого решения. Если индекс квадратичной формы (9.4) нечетен, иными словами, степень неустойчивости нечетна, имеем неустойчивость рассматриваемого движения. Если индекс этой формы четен и отличен от нуля, то существует возможность гироскопической стабилизации, т.е. устойчивости в первом приближении. Эта возможность будет реализована, если все корни характеристического уравнения будут чисто мнимыми.

Работа выполнена при поддержке Австрийского фонда научных исследований (FWF) в виде стипендии Лизы Майтнер (M00282TEC), Учебно-научного центра математики, информатики и научных вычислений (C.E.R.M.I.C.S.) Национальной школы Шоссе и Мостов (ENPC, Франция), Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (93–1621–ext), Российского фонда фундаментальных исследований (99–01–00785, 00–015–96150), Федеральной целевой программы "Интеграция". Университетскими факультетами Божией Матери Мира (FUNDP, Бельгия) для первого автора, который хотел бы также выразить свою благодарность Х. Трогеру (Технический Университет, Вена) и Г. Плотниковой (Университет, Намюр) за гостеприимство.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движения спутников. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 141 с.
3. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932. 738 p.
4. *Thomson W., Tait P.G.* Elements of natural philosophy. Oxford: Clarendon Press, 1873. 272 p.
5. *Хаскинд М.Д.* Неустановившееся движение твердого тела в ускоренном потоке безграничной жидкости // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 120–123.
6. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость движения в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.
7. *Карапетян А.В., Степанов С.Я.* Стационарные движения и относительные равновесия механических систем с симметриями // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 736–743.

Москва, Париж
e-mail: aburov@ccas.ru
chevalli@cermics.enpc.fr

Поступила в редакцию
8.XII.2000