УДК 531.36:532.5

© 2001 г. В.В. Козлов, С.М. Рамоданов

О ДВИЖЕНИИ ИЗМЕНЯЕМОГО ТЕЛА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Изучается динамика деформируемого тела в безграничном объеме идеальной жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности. Предполагается, что изменение геометрии масс и формы тела происходит за счет действия внутренних сил и в некоторой подвижной системе отсчета перемещения частиц тела считаются известными функциями времени. Уравнения движения подвижного трехгранника представлены в виде уравнений Кирхгофа. В отсутствие внешних сил указаны законы сохранения. С их помощью уравнения движения приведены к неавтономной системе дифференциальных уравнений первого порядка на группе перемещений конфигурационного пространства. В случае плоскопараллельного движения тела эти уравнения явно интегрируются в квадратурах. Рассмотрен частный случай, когда граница тела не меняется. Установлено, что при неравных присоединенных массах за счет изменения геометрии масс тело можно переместить из любого положения в любое другое.

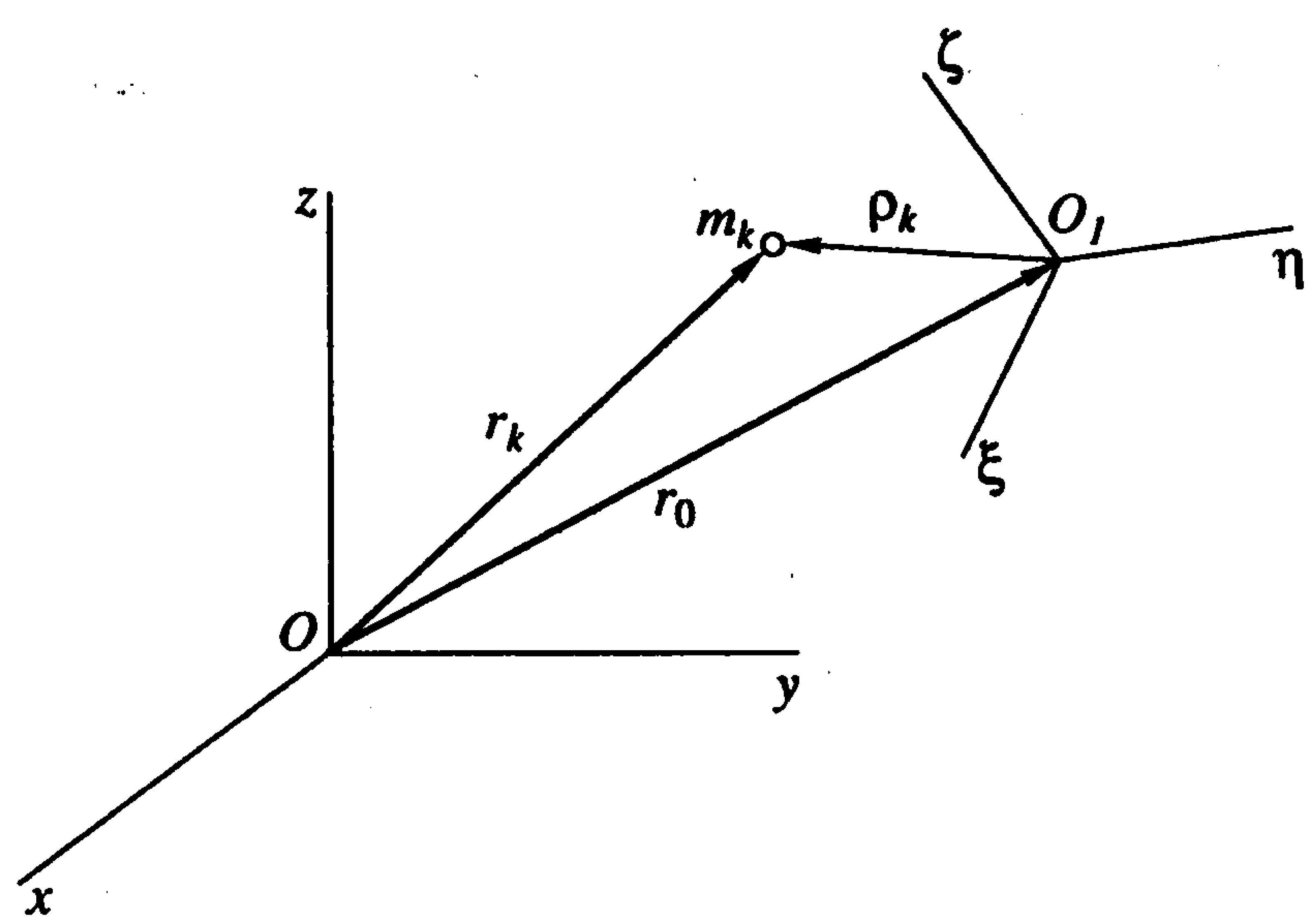
1. Обобщенные уравнения Лиувилля. В 1858 г. Лиувилль [1] рассмотрел общую задачу о вращении деформируемого тела вокруг неподвижной точки, геометрия масс которого изменяется только под действием внутренних сил. Им получены обобщенные динамические уравнения Эйлера, отнесенные к подвижным осям, которые в каждый момент времени совпадают с главными осями инерции тела. Различные аспекты уравнений Лиувилля обсуждаются в книге Рауса [2]. Можно расширить задачу Лиувилля, рассматривая пространственные движения изменяемого тела. Оказывается, обобщенные уравнения Лиувилля допускают естественное представление в форме уравнений Кирхгофа, что удобно с точки зрения более общей задачи о движении изменяемого тела в жидкости.

Итак, отнесем движение системы материальных точек с массами m_k к двум декартовым системам отсчета: неподвижной (инерциальной) $Oxyz$ и подвижной $O_1\xi\eta\zeta$ (фиг. 1). Подчеркнем, что (в отличие от известного подхода [1]) точке O_1 не обязана совпадать с центром масс системы точек и в общем случае оси ξ, η, ζ не являются осями инерции этой системы. Пусть r_k – радиус-векторы k-й точки относительно неподвижной системы отсчета, F_k и Φ_k – соответственно внешняя и внутренняя силы, действующие на k-ю точку, r_0 – радиус-вектор точки O_1 относительно точки O. Положим $r_k = r_0 + \rho_k$.

Напомним, что любую вектор-функцию времени $f(t)$ можно рассматривать также в подвижной системе отсчета. Ее производную относительно подвижной системы (относительную скорость) будем обозначать точкой. Абсолютная и относительная скорость связаны формулой Эйлера

$$df/dt = \dot{f} + [\omega, f]$$

где ω – угловая скорость подвижной системы отсчета.



Фиг. 1

Введем в рассмотрение кинетическую энергию системы точек

$$T=\frac{1}{2}\sum m_k\left(\frac{dr_k}{dt},\ \frac{dr_k}{dt}\right),\quad \frac{dr_k}{dt}=v+\dot{\rho}+[\omega,\rho_k] \tag{1.1}$$

где $v = dr_0/dt$ – скорость начала подвижной системы отсчета. В дальнейшем предполагается, что изменение геометрии масс системы точек под действием внутренних сил происходит по известному заранее закону. Другими словами, предполагается, что ρ_k – известные функции времени. Отметим, что возможны и другие постановки задачи; например, Зейлигер и Четаев (см. [3]) изучали вращение тела вокруг неподвижной точки с учетом его лучистого расширения.

Из соотношений (1.1) вытекает, что

$$\frac{\partial T}{\partial v}=mv+\sum m_k\dot{\rho}_k+\sum m_k[\omega,\rho_k],\quad m=\sum m_k$$

– этом импульс P изменяемого тела. По теореме об изменении импульса $dP/dt = F = \sum F_k$. В подвижной системе это уравнение приобретает вид

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^{\cdot}+\left[\omega,\ \frac{\partial T}{\partial v}\right]=F \tag{1.2}$$

Воспользуемся теперь теоремой об изменении кинетического момента относительно точки O

$$\frac{d}{dt}\sum m_k\left[r_k,\ \frac{dr_k}{dt}\right]=\sum\,[r_k,F_k+\Phi_k] \tag{1.3}$$

При учете принятых обозначений кинетический момент тела равен

$$\frac{\partial T}{\partial \omega}+[r_0,P] \tag{1.4}$$

где

$$\frac{\partial T}{\partial \omega}=\sum m_k[\rho_k,[\omega,\rho_k]]+\sum m_k[\rho_k,\dot{\rho}_k]+\left[\sum m_k\rho_k,\ v\right] \tag{1.5}$$

Первое и второе слагаемые в этой формуле имеют смысл кинетического момента системы относительно точки O_1 при переносном и относительном движениях тела.

Третье слагаемое обращается в нуль, если точка O_1 совпадает с центром масс изменяемого тела.

Так как момент внутренних сил равен нулю, то из соотношений (1.3) и (1.4) получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega}+\left[v,\frac{\partial T}{\partial v}\right]=\sum\,[r_k,F_k]-[r_0,F]$$

В подвижных осях оно принимает следующий вид:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^{\cdot}+\left[\omega,\frac{\partial T}{\partial \omega}\right]+\left[v,\;\frac{\partial T}{\partial v}\right]=M \tag{1.6}$$

где M – момент внешних сил относительно подвижной системы отсчета. Уравнения (1.2) и (1.6) по форме совпадают с известными уравнениями Кирхгофа [4], описывающими движение твердого тела в идеальной жидкости.

В качестве примера рассмотрим частный случай, когда O_1 – центр масс тела. Тогда $\sum m_k\rho_k=0$ и поэтому $P=mv$, а величина (1.5) будет кинетическим моментом тела относительно центра масс $I\omega+\lambda$, где

$$I\omega=\sum\,m_k[\rho_k,[\omega,\rho_k]],\quad \lambda=\sum\,m_k[\rho_k,\dot\rho_k]$$

Симметричный линейный оператор I – оператор инерции; ясно, что I и λ в общем случае зависят от времени. В этом случае уравнения (1.6) переходит в уравнение Лиувилля [1]

$$(I\omega+\lambda)^{\cdot}+[\omega,I\omega+\lambda]=M$$

2. Уравнения движения изменяемого тела в жидкости. Предположим теперь, что изменяемое тело движется в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости, совершающей потенциальное течение и покоящейся на бесконечности. Чтобы получить уравнения движения в этом случае, надо в явном виде записать правые уравнения (1.2) и (1.6). Пусть S – граница деформируемого тела. Предположим, что тело под действием только внутренних сил деформируется по заранее известному закону. Снова свяжем с телом подвижную декартову систему отсчета $O_1\xi\eta\zeta$.

Заметим, что скорость любой точки поверхности тела S равна сумме переносной и относительной скоростей. Переносная скорость определяется формулой Эйлера $v+[\omega,\rho]$, где ρ – радиус-вектор этой точки относительно O_1. Относительная скорость определяется чистой деформацией тела в подвижной системе отсчета. Следуя [5], представим потенциал течения в виде суммы

$$\varphi=\sum_{i=1}^{3}v_i\varphi_i+\sum_{i=1}^{3}\omega_i\varphi_{i+3}+\varphi_* \tag{2.1}$$

где v_1, v_2, v_3 (ω_1, ω_2, ω_3) – компоненты вектора скорости центра масс (угловой скорости) в подвижной системе отсчета. Потенциалы $\varphi_1\ldots,\varphi_6$ и φ_* – гармонические функции вне тела, определяемые условием непроницания: в каждой точке границы тела $\partial\varphi/\partial n$ (n – внешняя нормаль к границе S) равна нормальной составляющей скорости этой точки. Поэтому указанные потенциалы находятся как решения соответствующей внешней задачи Неймана. В частности, φ_1, φ_2, φ_3 – потенциалы, отвечающие поступательному движению тела с единичной скоростью вдоль осей ξ, η, ζ, а φ_4, φ_5, φ_6 – потенциалы, отвечающие вращению тела с единичной угловой скоростью вокруг этих осей. Если граница тела S деформируются, то (в отличие от классического случая) потенциалы $\varphi_1,\ldots,\varphi_6$ зависят еще явно от времени. Функция φ_* – потенциал, описывающий течение жидкости, возникающее при чистой деформации тела.

Как известно (см., например, [6]), кинетическая энергия жидкости находится по формуле

$$T_L = -\iint\limits_S \frac{\rho}{2} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \tag{2.2}$$

где ρ – плотность жидкости, $n = (n_1, n_2, n_3)$ – внешняя нормаль к S, $d\sigma$ – элемент площади поверхности S. Ясно, что $T_L = T_2 + T_1 + T_0$, где T_s – однородная форма по v_i, ω_i степени s. Если граница тела не деформируется, то $T_1 = T_0 = 0$ и коэффициенты квадратичной формы T_2 (присоединенные массы) постоянны. В общем случае коэффициенты однородных форм T_s зависят от времени.

Хорошо известно [6], что сила R и момент L относительно точки O_1, действующие со стороны жидкости на тело, имеют вид

$$R = \frac{d}{dt} \iint\limits_S \rho \varphi n d\sigma, \quad L = \frac{d}{dt} \iint\limits_S \rho \varphi [r, n] d\sigma \tag{2.3}$$

Здесь r – радиус-вектор точки поверхности S относительно точки O_1. Оказывается силу R и момент L можно представить в следующей форме:

$$R = -\frac{d}{dt} \frac{\partial T_L}{\partial v}, \quad L = -\frac{d}{dt} \frac{\partial T_L}{\partial \omega} - \left[v, \frac{\partial T_L}{\partial v} \right] \tag{2.4}$$

Этот результат хорошо известен в случае, когда чистая деформация отсутствует (см., например, [6]). При этом, очевидно, $T = T_2$.

Подставляя формулы (2.4) в уравнения (1.2) и (1.6), получим уравнение движения изменяемого тела в жидкости в форме уравнений Кирхгофа (1.2), (1.6), причем T имеет смысл полной кинетической энергии системы "тело плюс жидкость".

Докажем, например, первое равенство (2.4). Для этого достаточно проверить справедливость векторного равенства

$$\frac{\partial T}{\partial v} = -\iint\limits_S \rho \varphi n \, d\sigma \tag{2.5}$$

Докажем его в проекции на ось ξ. Ясно, что

$$\frac{\partial T_L}{\partial v_1} = -\frac{\rho}{2} \iint\limits_S \left[\varphi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right] d\sigma \tag{2.6}$$

Пусть Σ – сфера достаточно большого радиуса с центром в точке O_1. Применим формулу Гаусса–Остроградского к области V, заключенной между поверхностями S и Σ

$$\iint\limits_\Sigma \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) d\sigma - \iint\limits_S \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) d\sigma = \iiint\limits_V (\varphi_1 \Delta \varphi - \varphi \Delta \varphi_1) d\tau \tag{2.7}$$

Правая часть этого равенства равна нулю, так как φ и φ_1 – гармонические функции. Пусть a – радиус сферы Σ. Тогда подынтегральная функция в первом интеграле левой части равенства (2.7) убывает как $O(a^{-3})$ при $a \to \infty$ (см., например, [5]). Поэтому интеграл по сфере обращается в нуль, когда $a \to \infty$. Таким образом, из (2.7) вытекает равенство

$$\iint\limits_S \varphi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \iint\limits_S \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\sigma$$

При учете этого равенства, а также в силу того, что $\partial \varphi_1 / \partial n = n_1$ в точках поверхности S, равенство (2.6) запишем в виде

$$\frac{\partial T_L}{\partial v_1} = -\rho \iint\limits_S \varphi n_1 d\sigma$$

Таким образом, равенство первых компонент векторов (2.5) доказано.

3. Законы сохранения. Рассмотрим важный частный случай, когда на изменяемое тело в жидкости не действуют внешние силы. Тогда главный вектор сил F и главный момент M в уравнениях (1.2), (1.6) равны нулю. В этом случае можно указать два векторных интеграла – закона сохранения

$$P=\frac{\partial T}{\partial v},\quad K=\frac{\partial T}{\partial \omega}+\left[r,\ \frac{\partial T}{\partial v}\right] \tag{3.1}$$

Здесь r – радиус-вектор точки O_1 относительно начала неподвижной системы отсчета O. Утверждается, что P и K как векторы в неподвижном пространстве остаются неизменными.

Действительно, уравнение (1.6) имеет вид $dP/dt = 0$, а

$$\frac{dK}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega}+\left[\frac{dr}{dt},\ \frac{\partial T}{\partial v}\right]=0$$

ввиду уравнения (1.2) и соотношения $dr/dt = v$. Вектор P есть суммарный импульс системы "тело плюс жидкость", а K – кинетический момент этой системы относительно точки O.

Стоит подчеркнуть, что P и K не является интегралами только динамических уравнений (1.2), (1.6). Для того чтобы их представить в явном виде в подвижной системе отсчета, надо использовать матрицу перехода к подвижному реперу. В итоге получим шесть скалярных первых интегралов относительно v_i и ω_i. Приравнивая эти интегралы произвольным постоянным, получим шесть независимых уравнений, из которых можно найти v и ω как функции от положения подвижной системы отсчета. Этот прием, использованный ранее в обычной задаче Лиувилля [7], позволяет вдвое понизить порядок уравнений движения изменяемого тела без внешних сил.

Покажем, как это можно сделать в практически важном частном случае, когда векторы P и K равны нулю (можно считать, что изменяемое тело на́чало движение из состояния покоя). Как уже отмечалось, кинетическая энергия системы "тело плюс жидкость" имеет вид

$$T=(Av,v)/2+(Bv,\omega)+(C\omega,\omega)/2+(\lambda,v)+(\mu,\omega)+\varkappa \tag{3.2}$$

Матрицы A, B, C (A и C симметричны), векторы λ, μ и скаляр $\varkappa$ – известные функции времени. Однородная квадратичная форма по ω и v кинетической энергии положительно определена при всех значениях t. В частности, симметричные матрицы A и C положительные и потому невырожденные. Поскольку $P = 0$ и $K = 0$, то

$$Av+B^T\omega+\lambda=0,\qquad Bv+C\omega+\mu=0$$

Отсюда

$$(A-B^TC^{-1}B)v=B^TC^{-1}\mu\quad (C-BA^{-1}B^T)\omega=BA^{-1}\lambda \tag{3.3}$$

Ввиду положительной определенности квадратичной формы T_2 симметричные матрицы

$$A-B^TC^{-1}B,\quad C-BA^{-1}B^T$$

положительные (см. [8]). Следовательно, из (3.3) векторы ω и v (угловая скорость и скорость центра масс тела в подвижной системе) находятся как явные функции времени.

Чтобы найти движение подвижной системы отсчета, введем неподвижные единичные векторы α, β, γ, направленные вдоль осей x, y, z. Их компоненты в подвижном репере образуют ортогональную матрицу перехода. Эти векторы как функции времени удовлетворяют уравнениям Пуассона

$$\dot\alpha+[\omega,\alpha]=\dot\beta+[\omega,\beta]=\dot\gamma+[\omega,\gamma]=0 \tag{3.4}$$

с уже известной угловой скоростью $\omega(t)$. Решения этой линейной системы $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ с некоторыми начальными данными однозначно определяют ориентацию подвижной системы в текущий момент времени. Наконец, движение центра масс тела находится простым интегрированием следующих уравнений:

$$\dot{x}=(v,\alpha),\quad \dot{y}=(v,\beta),\quad \dot{z}=(v,\gamma) \tag{3.5}$$

с известными правыми частями как функциями времени.

Эти замечания имеют непосредственное отношение к задаче о движении рыб: как может двигаться тело в жидкости, изменяя свою форму за счет действия внутренних сил? Модельная задача такого рода о движении в твердом канале рассмотрена ранее [9] (см. также [10]). Была показана [11] возможность создания тяговой силы при движении изменяемого тела в идеальной жидкости без вихрей. Подход основан на использовании известных формул (2.3), однако явный вид уравнений движения тела не приводится. Соотношения (3.2)–(3.5) дают алгоритм решения задачи в самом общем случае. Более того, как будет показано в разд. 5, силу тяги можно создать, не меняя формы тела, а лишь управляя его геометрией масс.

4. Плоскопараллельное движение изменяемого тела. Формулы разд. 3 сильно упрощаются в случае плоскопараллельного движения тела без воздействия внешних сил. Пусть тело движется так, что в каждый момент времени его форма и распределение масс симметричны относительно некоторой неподвижной плоскости П. Пусть x, y – декартовы координаты точки O_1 – начала подвижной системы отсчета на плоскости П, а α – угол поворота подвижных осей. Известно, что в каждый момент времени подвижную систему отсчета можно выбрать так, чтобы кинетическая энергия (3.2) системы "тело плюс жидкость" имела вид

$$T=(a_1v_1^2+a_2v_2^2+b\omega^2)/2+\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\mu\omega+\varkappa \tag{4.1}$$

Здесь $\omega=\dot{\alpha}$ – угловая скорость подвижного репера. Коэффициенты в этой формуле считаются неизвестными функциями времени.

Уравнения Кирхгофа (1.2) и (1.6) принимают более простой вид

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v_1}\right)^{\cdot}-\omega\frac{\partial T}{\partial v_2}=0,\quad \left(\frac{\partial T}{\partial v_2}\right)^{\cdot}+\omega\frac{\partial T}{\partial v_1}=0$$
$$\left(\frac{\partial T}{\partial \omega}\right)^{\cdot}+v_1\frac{\partial T}{\partial v_2}-v_2\frac{\partial T}{\partial v_1}=0 \tag{4.2}$$

Добавляя к этим уравнениям простые кинематические соотношения

$$\dot{x}=v_1\cos\alpha-v_2\sin\alpha,\quad \dot{y}=v_1\sin\alpha+v_2\cos\alpha,\quad \dot{\alpha}=\omega \tag{4.3}$$

получим замкнутую систему дифференциальных уравнений, которая описывает движение подвижного репера.

Первые интегралы (3.1) системы (4.2), (4.3) имеют вид

$$P_1\frac{\partial T}{\partial v_1}\cos\alpha-\frac{\partial T}{\partial v_2}\sin\alpha,\quad P_2=\frac{\partial T}{\partial v_1}\sin\alpha+\frac{\partial T}{\partial v_2}\cos\alpha$$
$$K=xP_2-yP_1+\frac{\partial T}{\partial \omega} \tag{4.4}$$

Отсюда, с учетом (4.1),

$$v_1=(c_1\cos\alpha+c_2\sin\alpha)/a_1-\lambda_1/a_1$$
$$v_2=(-c_1\sin\alpha+c_2\cos\alpha)/a_2-\lambda_1/a_2$$
$$\omega=(c_3-xc_2+yc_1)/b-\mu/b$$

где c_1, c_2, c_3 – постоянные значения P_1, P_2, K. Подставляя эти формулы в кинематические соотношения (4.3), получим замкнутую систему дифференциальных уравнений на группе движений плоскости П. Особенно просто эти уравнения выглядят в случае, когда $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (например, если движение в результате деформации началось из состояния покоя):

$$\dot{x} = -\frac{\lambda_1 \cos\alpha}{a_1} + \frac{\lambda_2 \sin\alpha}{a_2}, \quad \dot{y} = -\frac{\lambda_1 \sin\alpha}{a_1} - \frac{\lambda_2 \cos\alpha}{a_2}, \quad \dot{\alpha} = \frac{\mu}{b} \tag{4.5}$$

Обсудим условия, при которых периодические изменения геометрии масс и формы тела приводят к ненулевым средним значениям скоростей $\dot{x}$ и $\dot{y}$. Положим для простоты записи $\xi_k = -\lambda_k/a_k$ ($k = 1, 2$) и $\eta = -\mu/b$. Из (4.5) получим уравнение для изменения комплексной переменной $z = x + iy$

$$\dot{z} = \xi e^{i\alpha}, \quad \xi = \xi_1 + i\xi_2 \tag{4.6}$$

Предположим, что $\xi(t)$ и $\eta(t)$ периодичны по t с периодом $2\pi/\omega$. Поскольку $\dot{\alpha} = \eta$, то

$$\alpha(t) = \Omega t + \Phi(t) \tag{4.7}$$

где Ω – среднее значение функции $\eta(t)$, а $\Phi(t)$ – $2\pi/\omega$-периодична по t.

Покажем, что если $\Omega \neq n\omega$, n – целое, то средние значения $\dot{x}$ и $\dot{y}$ равны нулю. В частности, тело будет двигаться в ограниченной области. Действительно, из (4.6) и (4.7) вытекает равенство $\dot{z} = Z(t)\exp i\Omega t$, где Z периодична по t с периодом $2\pi/\omega$. Разлагая эту функцию в ряд Фурье и интегрируя по t, получим координаты тела

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Z_n}{i(n\omega + \Omega)} e^{i(n\omega+\Omega)t} + \text{const} \tag{4.8}$$

где Z_n – коэффициенты Фурье функции $Z(t)$. Если $\Omega \neq n\omega$, то ряд (4.8) сходится и представляет ограниченную функцию t.

Равенство $\Omega = 0$ является простейшим резонансным соотношением между частотами Ω и ω, при котором может быть создана тяговая сила: если $Z_0 \neq 0$ (типичная ситуация), то среднее значение $\dot{z}$ отлично от нуля. Этот случай представляет особый интерес с точки зрения задачи о движении рыб. Сходный результат другим путем получен ранее в [11] для модельного примера о движении неограниченного тела периодической формы.

5. Движение тела с жесткой границей. Рассмотрим частный случай плоскопараллельного движения тела, форма границы S которого не меняется в подвижной системе отсчета. Покажем, что при неравных присоединенных массах за счет перемещения точек внутри S под действием внутренних сил может быть создана тяговая сила. Более того, при подходящем управлении геометрией масс внутри S тело можно переместить из любого положения в любое другое. Этот эффект проявляется уже в простейшем случае, когда внутри материальной оболочки перемещается всего одна материальная точка.

Итак, свяжем с твердым телом подвижную систему координат $O_1\xi\eta$ так, чтобы кинетическая энергия системы "тело плюс жидкость" имела вид

$$T' = (a_1 v_1^2 + a_2 v_2^2 + b\omega^2)/2$$

Поскольку граница S не деформируется, то коэффициенты этой формы постоянны. Движение точки массы m задается некоторыми известными функциями $\xi(t)$ и $\eta(t)$. Проекции абсолютной скорости этой точки на подвижные оси ξ, η имеют вид

$$u_1 = v_1 + \dot{\xi} - \omega\eta, \quad u_2 = v_2 + \dot{\eta} + \omega\xi \tag{5.1}$$

Полная кинетическая энергия изменяемого тела равна

$$T = T' + m(u_1^2 + u_2^2)/2 \tag{5.2}$$

и уравнения Кирхгофа имеют вид (4.2).

Предположим, что тело на́чало движение из состояния покоя. Тогда интегралы (4.4) примут вид:

$$\frac{\partial T}{\partial v_1} = \frac{\partial T}{\partial v_2} = \frac{\partial T}{\partial \omega} = 0$$

Используя выражение (5.2) и формулы (5.1), получаем

$$v_1 = -\varkappa_1(\dot{\xi} - \omega\eta), \quad v_2 = -\varkappa_2(\dot{\eta} + \omega\xi)$$

$$\omega = \frac{\varkappa_3[(1-\varkappa_1)\eta\dot{\xi} - (1-\varkappa_2)\xi\dot{\eta}]}{1 + \varkappa_3[(1-\varkappa_1)\eta^2 + (1-\varkappa_2)\xi^2]} \tag{5.3}$$

$$\varkappa_1 = \frac{m}{m+a_1}, \quad \varkappa_2 = \frac{m}{m+a_2}, \quad \varkappa_3 = \frac{m}{b}$$

Из соотношения (4.3) при учете равенств (5.3) вытекают соотношения

$$\dot{x} = X_1(\xi, \eta, \alpha)\dot{\xi} + X_2(\xi, \eta, \alpha)\dot{\eta}, \quad \dot{y} = Y_1(\xi, \eta, \alpha)\dot{\xi} + Y_2(\xi, \eta, \alpha)\dot{\eta}$$

$$\dot{\alpha} = \Phi_1(\xi, \eta)\dot{\xi} + \Phi_2(\xi, \eta)\dot{\eta} \tag{5.4}$$

Явный вид коэффициентов X_k, Y_k, Φ_k $(k = 1, 2)$ легко получить при помощи формул (5.3).

Ясно, что положение твердого тела однозначно задается элементом $z = (x, y, \alpha \bmod 2\pi)$ группы движений плоскости. Если ξ и η – заданные функции времени t, то положение $z(t)$ тела находится при помощи обычных квадратур.

Оказывается, если $a_1 \neq a_2$, то для любого $\varepsilon > 0$ и любых двух положений тела z_1 и z_2 найдутся кусочно-гладкие "управляющие" функций $\xi(t)$, $\eta(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, такие, что

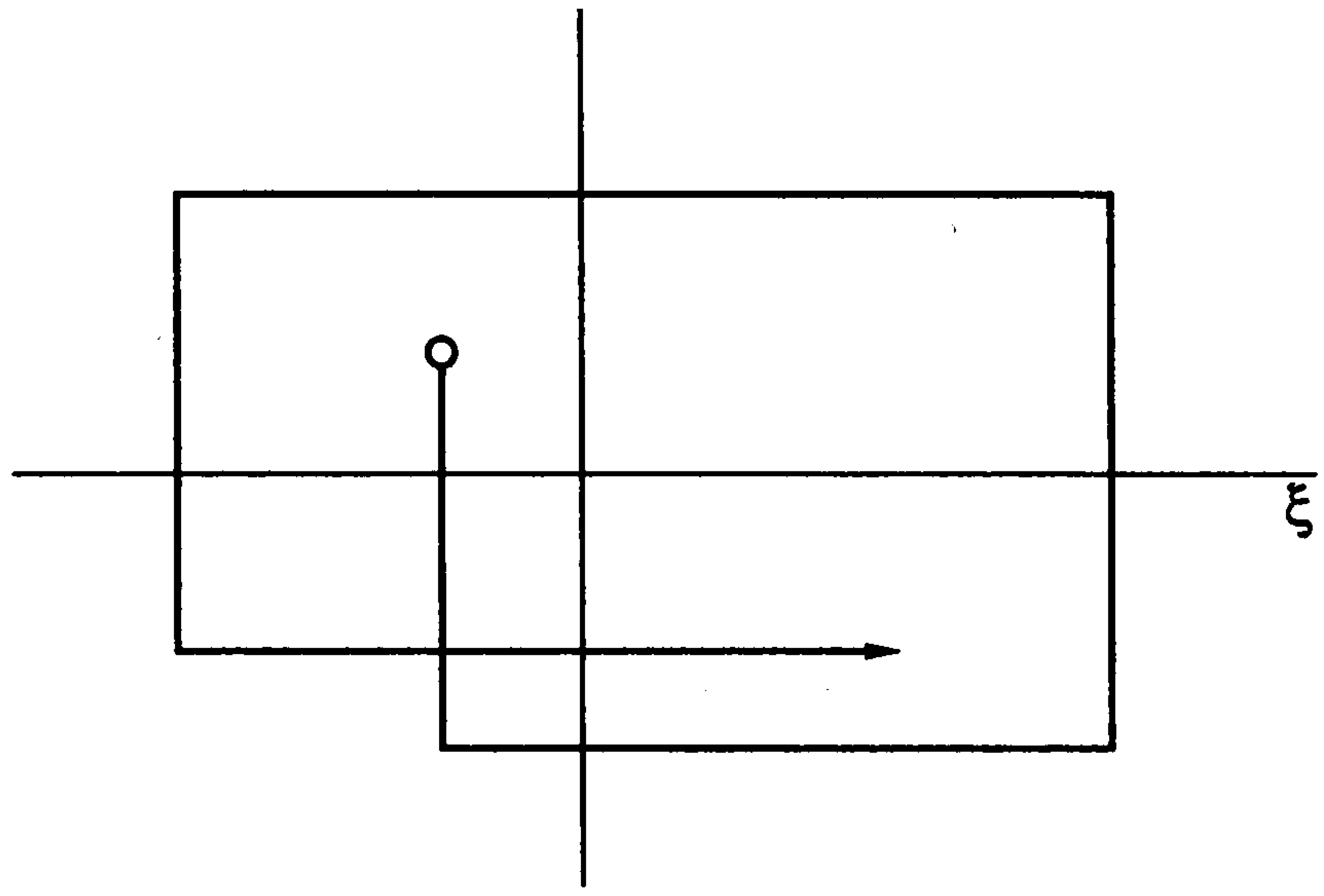
$$|\xi(t)| \leqslant \varepsilon, \quad |\eta(t)| \leqslant \varepsilon; \quad z(t_1) = z_1, \quad z(t_2) = z_2$$

Другими словами, за счет подходящего перемешивания материальной точки в заданной ограниченной области тело в жидкости с неравными присоединенными массами можно переместить из любого положения в любое другое. Время движения $t_2 - t_1$ существенно зависит от параметра ε.

Замечание. Условие $a_1 \neq a_2$ является существенным. Действительно, если $a_1 = a_2 = a$, то из соотношений (4.3) и (4.5) вытекают два первых интеграла

$$\begin{aligned} &ax + m(x + \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha) = c_1 \\ &ay + m(y + \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha) = c_2; \quad c_1, c_2 = \mathrm{const} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Выражения в круглых скобках – это координаты точки m в неподвижных осях. Если точку O_1 интерпретировать как центр масс системы "тело плюс жидкость", то соотношение (5.5) означает неподвижность центра масс полной системы "тело плюс жидкость плюс материальная точка". Из соотношений (5.5) вытекает, в частности, что твердое тело остается все время в ограниченной области (надо учесть, что поскольку точка m остается внутри оболочки твердого тела, то координаты ξ, η ограничены).



Фиг. 2

Чтобы доказать сформулированное выше утверждение, введем расширенное пятимерное пространство M с координатами x, y, $\alpha \bmod 2\pi$, ξ, η и распределение двумерных касательных плоскостей, определенное независимыми уравнениями

$$\begin{aligned} &dx = X_1 d\xi + X_2 d\eta, \quad dy = Y_1 d\xi + Y_2 d\eta \\ &d\alpha = \Phi_1 d\xi + \Phi_2 d\eta \end{aligned} \tag{5.6}$$

Введем еще два независимых допустимых векторных поля V_1 и V_2 с компонентами $X_1, Y_1, \Phi_1, 1, 0$ и $X_2, Y_2, \Phi_2, 0, 1$ соответственно. Эти векторы, очевидно, удовлетворяют уравнениям (5.6). Следуя известному подходу [12], рассмотрим пять векторных полей

$$V_1,\ V_2,\ [V_1, V_2],\ [V_1,[V_1, V_2]],\ [V_2,[V_1, V_2]] \tag{5.7}$$

где [,] – скобка Якоби. Оказывается, если $a_1 \neq a_2$, то при малых значениях ξ, η эти векторы линейно независимы в каждой точке.

Действительно, условие линейной независимости состоит в том, что определитель матрицы 5×5, составленной из компонент векторов (5.7), отличен от нуля. Значение этого определителя при $\xi = \eta = 0$ равно

$$-(2\varkappa_1 + \varkappa_2 - 3)(2\varkappa_2 + \varkappa_1 - 3)(\varkappa_1 + \varkappa_2 - 2)(\varkappa_1 - \varkappa_2)^2 \varkappa_3^3$$

Интересно отметить, что это выражение не зависит от угла поворота α. Легко проверить, что первые три сомножителя положительны. Следовательно, если $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$ (или, что то же самое, $a_1 \neq a_2$), при малых значениях ξ, η векторы (5.7) линейно независимы.

Это обстоятельство позволяет воспользоваться теоремой П.К. Рашевского [12], согласно которой любые две точки области в M, заданной неравенством $|\xi(t)| \leqslant \varepsilon$, $|\eta(t)| \leqslant \varepsilon$ (ε мало), можно соединить кусочно-гладкой кривой, составленной из отрезков интегральных кривых полей V_1 и V_2. Остается заметить, что движение по фазовым траекториям полей V_1 и V_2, параметризованные временем t, удовлетворяют соотношениям (5.4).

Отметим, что координата $\xi(\eta)$ является интегралом векторного поля $V_2(V_1)$. Поэтому для реализации наперед заданного перемещения твердого тела можно ограничиться перемещениями материальной точки m, вид которых изображен на фиг. 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта "Ведущие научные школы" (00-15-96146).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Liouville J.* Développements sur un chapitre de la "Mechanique" de Poisson // J. Math. Pures et Appl. 1858. V. 3. P. 1–25.
2. *Routh E.J.* Dynamics of a System of Rigid Bodies. Pt II. N.Y.; Dover; L.: MacMillan, 1882. = *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.
3. *Četayev N.* Sur les équations de Poincaré // C.r. Acad. sci. Paris. 1927. V. 185. P. 1577–1578.
4. *Kirchoff G.* Vorlesungen über mathematiche Physik. Mechanik. Leipzig: Teubner, 1897. = *Кирхгоф Г.* Механика. Лекции по математической физике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
5. *Lamb H.* Hydrodynamics. N.Y.: Dover, 1945. = *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
6. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 560 с.
7. *Козлов В.В.* Общая теория вихрей. Ижевск: Изд. дом "Удмурт. ун-т", 1998. 238 с.
8. *Horn R.A., Johnson Ch.R.* Matrix Analysis. Cambridge etc.: Univ. Press, 1986. = *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
9. *Лаврентьев М.А., Лаврентьев М.М.* Об одном принципе создания тяговой силы для движения // ПМТФ. 1962. № 4. С. 3–9.
10. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
11. *Kuznetsov V.M., Lugovtsov B.A., Sher Y.N.* On the motive mechanism of snakes and fish // Arch. Rath. Mech. Analysis. 1967. V. 25. № 5. P. 367–387.
12. *Рашевский П.К.* О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Уч. зап. Моск. пед. ин-та им. Либкнехта. Сер. физ.-мат. наук. 1938. № 2. С. 83–94.

Москва

Поступила в редакцию
16.X.2000