

УДК 531.391:62–50

© 2001 г. Ф.Л. Черноусько

УПРАВЛЯЕМЫЕ ДВИЖЕНИЯ ДВУЗВЕННИКА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассматриваются управляемые плоские движения двузвенника по горизонтальной плоскости. Между двузвенником и плоскостью действуют силы сухого трения. Управление осуществляется при помощи управляющего момента, создаваемого двигателем, ось которого совпадает с осью шарнира двузвенника. Построены периодические законы управления, обеспечивающие продольное перемещение двузвенника как целого. Оценена скорость этих движений. Показана возможность осуществить любое заданное перемещение двузвенника в плоскости, указано соответствующее движение. Построенные движения могут служить упрощенной моделью движения змей и других животных, не имеющих конечностей. Предложенный способ перемещения может быть использован при создании мобильных роботов, в особенности для роботов малых размеров.

Обсуждались (см., например, [1–4]) различные аспекты механики змей, а также вопросы механики роботов, использующих принцип движения змей, причем обычно предполагается, что змея имеет возможность использовать неровности поверхности, вертикальные стенки, камни, траву и т.д., упираясь в которые, она создает горизонтальную компоненту нормальной реакции. Это дает возможность получить компоненту силы трения, направленную вперед по ходу движения змеи. Аналогичный результат достигается в робототехнических системах, состоящих из отдельных звеньев, снабженных колесами [4]. Для этих неголономных механических систем упор в боковые стенки заменяется реакцией, нормальной к плоскости колес. Однако оставалось неясным, как осуществить движение по горизонтальной плоскости многозвенника, лишенного колес.

На примере трехзвенника было показано [5, 6], что за счет управления двумя внутренними моментами, приложенными в шарнирах, можно обеспечить движение по шероховатой горизонтальной плоскости в любом заданном направлении. При этом чередуются медленные и быстрые фазы движений. Была показана [7] возможность перемещения многозвенника при использовании только медленных (квазистатических) движений.

В данной работе исследуется движение по шероховатой горизонтальной плоскости простейшего вида многозвенника – двузвенника, состоящего из двух твердых тел и снабженного двигателем, установленным в его шарнире. Показано, что за счет управления единственным двигателем можно осуществить продольное движение двузвенника, а также его произвольное перемещение в горизонтальной плоскости. Оцениваются смещения и скорости движения для различных механических моделей двузвенника.

1. Механическая модель. Двузвенник состоит из двух абсолютно твердых тел, соединенных цилиндрическим шарниром (фиг. 1). Оба тела совершают плоское движение по неподвижной горизонтальной плоскости, так что ось шарнира вертикальна. Введем неподвижную декартову систему координат $Oxuz$, ось Oz которой направлена вертикально вверх, а плоскость Oxy совпадает с плоскостью, по которой движется двузвенник; O^* – точка пересечения оси шарнира с плоскостью Oxy .

Введем обозначения: m_i – массы твердых тел, J_i – их моменты инерции относительно оси шарнира, C_i – проекции их центров масс на плоскость Oxy , $a_i = O^*C_i$ – расстояния от оси шарнира O^* до точек C_i . Значения индекса $i = 1, 2$ отвечают двум

твердым телам, которые будем называть корпусом ($i = 1$) и хвостом ($i = 2$) соответственно. Предположим, что шарнир представляет собой точечную массу m_0 , не входящую ни в одно из двух твердых тел. Это предположение отражает реальную ситуацию, когда на оси шарнира установлен электродвигатель, создающий управляющий момент и имеющий значительную массу. Таким образом, полная масса двузвенника равна

$$m = m_0 + m_1 + m_2 \quad (1.1)$$

Управляющий момент, создаваемый двигателем относительно оси шарнира и приложенный к хвосту, обозначим через M . Тогда на корпус действует момент, равный $-M$.

В точках контакта двузвенника с плоскостью действуют силы сухого трения, подчиняющиеся закону Кулона. Для движущихся точек контакта сила трения направлена против скорости точки и по величине равна Pk , где P – нормальная реакция в данной точке, k – постоянный коэффициент трения. Для неподвижных точек контакта сила трения по величине не превосходит Pk и может быть направлена произвольно. Коэффициенты трения для точек корпуса, хвоста и точечной массы m_0 обозначим соответственно через k_1, k_2 и k_0 . Трудность состоит в том, что при наличии более чем трех точек контакта нормальные реакции не определяются однозначно в силу статической неопределимости. Поэтому и силы трения также не определяются однозначно даже для движущихся точек. С этой трудностью предстоит иметь дело в дальнейшем.

Пусть x_0, y_0 – декартовы координаты точки O^* , θ – угол наклона оси корпуса O^*C_1 к оси Ox , α – угол между осью хвоста C_2O^* и осью корпуса O^*C_1 , см. фиг. 1. Тогда координаты точек C_1 и C_2 запишутся в виде

$$x_1 = x_0 + a_1 \cos \theta, \quad y_1 = y_0 + a_1 \sin \theta \quad (1.2)$$

$$x_2 = x_0 - a_2 \cos(\theta + \alpha), \quad y_2 = y_0 - a_2 \sin(\theta + \alpha)$$

Запишем нужные для дальнейшего координаты x_c, y_c центра масс C всего двузвенника

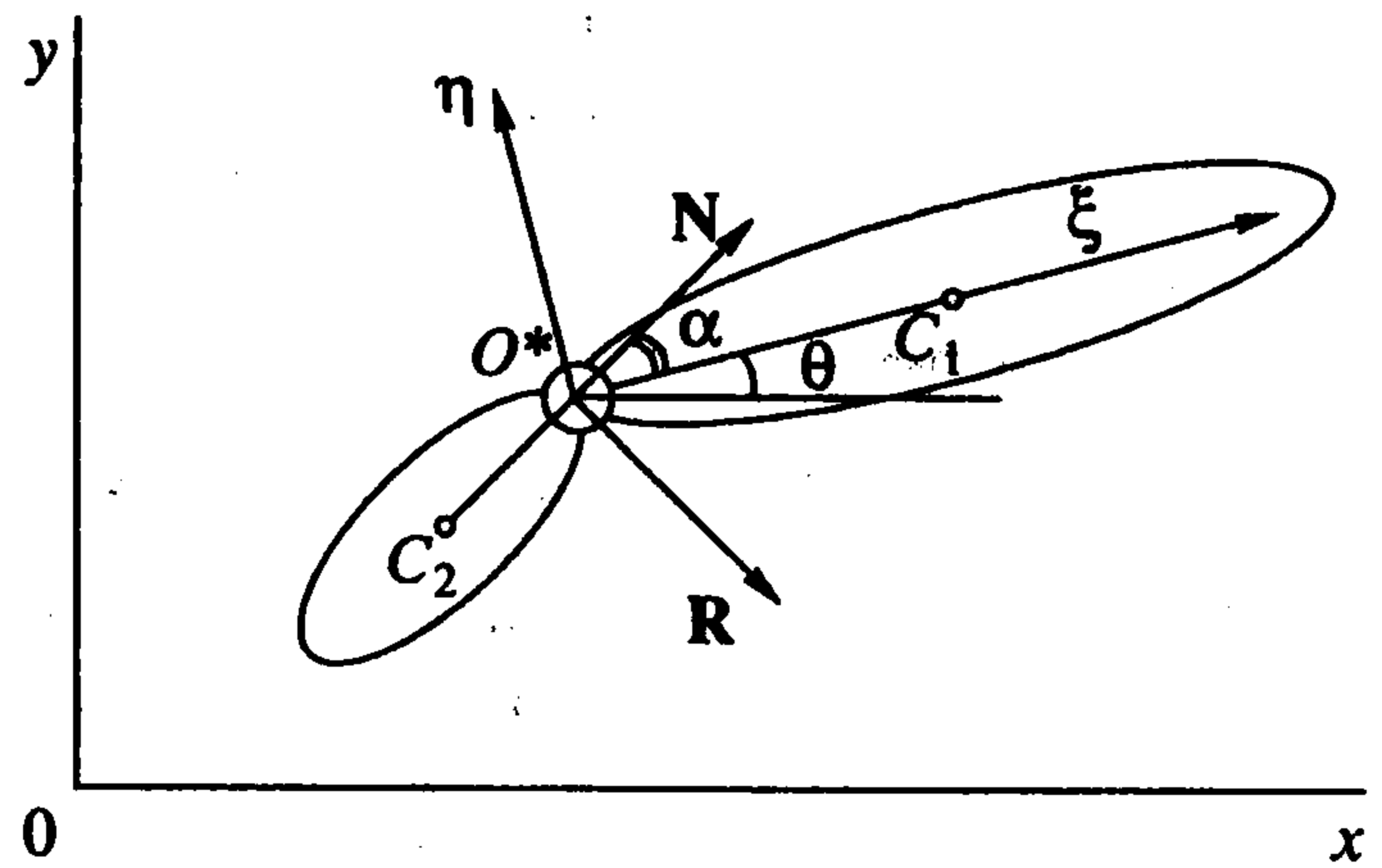
$$mx_c = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_0 x_0 = mx_0 + m_1 a_1 \cos \theta - m_2 a_2 \cos(\theta + \alpha) \quad (1.3)$$

$$my_c = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_0 y_0 = my_0 + m_1 a_1 \sin \theta - m_2 a_2 \sin(\theta + \alpha)$$

Здесь использованы соотношения (1.1) и (1.2).

Введя вектор v_0 скорости точки O^* и векторы угловой скорости корпуса ω_1 и хвоста ω_2 , составим выражение для кинетического момента двузвенника относительно точки O

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= m_0 \overline{OO^*} \times v_0 + m_1 [\overline{OC_1} \times v_0 + \overline{OO^*} \times (\omega_1 \times \overline{O^*C_1})] + \\ &+ m_2 [\overline{OC_2} \times v_0 + \overline{OO^*} \times (\omega_2 \times \overline{O^*C_2})] + J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2 = \\ &= m \overline{OO^*} \times v_0 + (m_1 \overline{O^*C_1} + m_2 \overline{O^*C_2}) \times v_0 + [m_1 (\overline{OO^*} \cdot \overline{O^*C_1}) + J_1] \omega_1 + \\ &+ [m_2 (\overline{OO^*} \cdot \overline{O^*C_2}) + J_2] \omega_2 \end{aligned} \quad (1.4)$$



Фиг. 1.

Векторы, фигурирующие в (1.4), имеют следующие компоненты (см. фиг. 1):

$$\overline{OO^*} = (x_0, y_0, 0), \quad \overline{O^*C_1} = (a_1 \cos \theta, a_1 \sin \theta, 0) \quad (1.5)$$

$$\overline{O^*C_2} = (-a_2 \cos(\theta + \alpha), -a_2 \sin(\theta + \alpha), 0)$$

$$\mathbf{v}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, 0), \quad \boldsymbol{\omega}_1 = (0, 0, \dot{\theta}), \quad \boldsymbol{\omega}_2 = (0, 0, \dot{\theta} + \dot{\alpha})$$

Подставляя выражения (1.5) в равенство (1.4), определим величину кинетического момента двузвенника в виде (вектор \mathbf{K} направлен по оси Oz)

$$\begin{aligned} K = & m(x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0) + m_1 a_1 (x_0 \dot{\theta} \cos \theta + y_0 \dot{\theta} \sin \theta) - \\ & - m_2 a_2 [x_0 (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \cos(\theta + \alpha) + y_0 (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \sin(\theta + \alpha)] + m_1 a_1 (\dot{y}_0 \cos \theta - \dot{x}_0 \sin \theta) - \\ & - m_2 a_2 [\dot{y}_0 \cos(\theta + \alpha) - \dot{x}_0 \sin(\theta + \alpha)] + J_1 \dot{\theta} + J_2 (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

2. Элементарные движения. Движения двузвенника будем строить как последовательность простейших движений, которые назовем элементарными движениями (ЭД). Все ЭД начинаются из состояния покоя двузвенника и заканчиваются также в состоянии покоя. Угол α между корпусом и хвостом в каждом ЭД изменяется монотонно в интервале $(-\pi, \pi)$ по некоторому произвольному закону $\alpha(t)$, включающему фазы разгона и торможения. Обозначим начальное и конечное значения этого угла в ЭД через α^0 и α^1 соответственно.

ЭД подразделяются на медленные и быстрые. Время медленного движения обозначим через T , быстрого – через τ .

Медленные движения – это такие движения, при которых корпус остается неподвижным, а хвост поворачивается на некоторый угол. Ниже выводятся достаточные условия, обеспечивающие реализацию медленных движений.

Быстрыми назовем такие движения, при которых величина управляющего момента M много больше моментов, создаваемых силами трения, а время движения τ мало. Имеем для быстрых движений

$$|M| \gg m' g k a', \quad m' = \max(m_1, m_2), \quad a' = \max(a_1, a_2), \quad \tau \ll T \quad (2.1)$$

В силу условий (2.1) при рассмотрении быстрых движений можно не учитывать силы трения. Следовательно, для этих движений имеют место законы сохранения количества движения и кинетического момента. Но в начале движения двузвенник находится в состоянии покоя; следовательно, имеем для быстрого движения

$$x_c \equiv \text{const}, \quad y_c \equiv \text{const}, \quad K \equiv 0 \quad (2.2)$$

Выражения для x_c, y_c, K даны соотношениями (1.3) и (1.6).

3. Анализ медленных движений. Для вывода условий неподвижности корпуса при медленных движениях используется следующая схема рассуждений. Сначала, считая корпус неподвижным, определим силы взаимодействия корпуса и хвоста. При этом будем полагать, что хвост опирается на горизонтальную плоскость в точках, лежащих на прямой O^*C_2 . Затем рассмотрим баланс сил и моментов, действующих на корпус, и найдем достаточные условия, при которых силы трения (в условиях статической неопределимости) могут уравновесить остальные силы, действующие на корпус (силы взаимодействия с хвостом и управляющий момент).

Обозначим через N и R проекции силы, с которой корпус действует на хвост, на направление отрезка C_2O^* и на перпендикулярное к нему направление (фиг. 1) соответственно. Составим уравнения движения центра масс хвоста в проекциях на эти направления при условии, что корпус неподвижен

$$m_2 a_2 \dot{\alpha}^2 = N, \quad m_2 a_2 \ddot{\alpha} = R - k_2 \text{sign } \dot{\alpha} \Sigma G_i \quad (3.1)$$

Последнее слагаемое есть сумма сил трения, действующих на хвост, G_i – нормальные к плоскости Oxy реакции в точках контакта хвоста с плоскостью. Суммирование в (3.1) и ниже распространяется на все точки контакта. В случае контакта по целым отрезкам суммирование следует заменить интегрированием, однако все окончательные результаты останутся неизменными.

Уравнение моментов для вращения хвоста вокруг точки O^* имеет вид

$$J_2 \ddot{\alpha} = M - k_2 \operatorname{sign} \dot{\alpha} \Sigma G_i s_i \quad (3.2)$$

где s_i – расстояние от точки O^* до i -й точки контакта, взятое со знаком плюс, если эта точка лежит с той же стороны от O^* , что и точка C_2 , и со знаком минус в противном случае.

Нормальные реакции удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\Sigma G_i = m_2 g, \quad \Sigma G_i s_i = m_2 g a_2$$

Подставляя их в уравнения (3.1) и (3.2), получим

$$N = m_2 a_2 \dot{\alpha}^2, \quad R = m_2 (a_2 \ddot{\alpha} + g k_2 \operatorname{sign} \dot{\alpha})$$

$$M = J_2 \ddot{\alpha} + m_2 g k_2 a_2 \operatorname{sign} \dot{\alpha} \quad (3.3)$$

Введем обозначения для максимальных величин угловой скорости и углового ускорения хвоста при медленных движениях

$$\omega_0 = \max |\dot{\alpha}|, \quad \varepsilon_0 = \max |\ddot{\alpha}| \quad (3.4)$$

Максимум берется по всему медленному движению.

Из соотношений (3.3) и (3.4) следуют оценки

$$|N| \leq m_2 a_2 \omega_0^2, \quad |R| \leq m_2 a_2 (\varepsilon_0 + g k_2 a_2^{-1}), \quad |M| \leq J_2 \varepsilon_0 + m_2 g k_2 a_2 \quad (3.5)$$

Рассмотрим равновесие тела, состоящего из корпуса и массы m_0 , расположенной в точке O^* . На это тело в плоскости Oxy действуют силы $(-N)$ и $(-R)$, приложенные в точке O^* , момент $(-M)$, а также силы трения. Тело будет находиться в равновесии, если для любой точки Q в плоскости Oxy величина момента M_1 относительно этой точки всех сил, кроме сил трения, действующих на тело, не превосходит максимально возможной (по закону Кулона) величины M_f момента сил трения относительно той же точки. Данное условие означает, что если точку Q рассматривать как мгновенный центр скоростей для тела, то приложенные силы не вызовут вращения тела вокруг этой точки, так как момент сил трения способен парировать приложенные моменты. Отметим, что данная формулировка условий равновесия предусматривает невозможность не только вращательных, но и поступательных движений; в последнем случае точку Q следует устремить в бесконечность.

Введем декартову систему координат $O^* \xi \eta$, ось $O^* \xi$ которой направлена вдоль отрезка $O^* C_1$, а ось $O^* \eta$ ему перпендикулярна. Координаты точки Q в системе $O^* \xi \eta$ обозначим через ξ, η .

Необходимое и достаточное условие неподвижности корпуса имеет вид неравенства

$$|M_1| \leq M_f, \quad \forall \xi, \eta \quad (3.6)$$

справедливого для всех ξ, η включая бесконечные значения.

Момент M_1 равен

$$M_1 = -M + \xi(N \sin \alpha - R \cos \alpha) - \eta(N \cos \alpha + R \sin \alpha) \quad (3.7)$$

Используя неравенство Коши – Буняковского и оценки (3.5), получим из (3.7)

$$|M_1| \leq |M| + (N^2 + R^2)^{1/2} (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} \leq J_2 \varepsilon_0 + m_2 g k_2 a_2 + m_2 a_2 [\omega_0^4 + (\varepsilon_0 + g k_2 a_2^{-1})^2]^{1/2} r \quad (3.8)$$

Здесь введено обозначение

$$r = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = O^*Q \quad (3.9)$$

Подсчитаем величину M_f максимально возможного момента относительно точки Q сил трения, действующих на корпус и массу m_0 . Величину M_f получим, если в каждой точке контакта сила трения максимальна по величине и направлена перпендикулярно отрезку, соединяющему точку Q с точкой контакта. Получим

$$M_f = k_1 \sum P_i r_i + k_0 m_0 g r, \quad r_i = [(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2]^{1/2} \quad (3.10)$$

Здесь P_i – нормальная реакция в некоторой точке контакта корпуса с плоскостью Oxy , (ξ_i, η_i) – координаты этой точки контакта в системе $O^*\xi\eta$, r_i – расстояние от данной точки до точки Q , r определено равенством (3.9). Суммирование по i в (3.10) и далее ведется по всем точкам контакта корпуса с плоскостью Oxy , причем в случае контакта по целым областям суммирование следует заменить интегрированием.

Нормальные реакции P_i удовлетворяют следующим уравнениям и неравенствам:

$$\sum P_i = m_1 g, \quad \sum P_i \xi_i = m_1 g a_1, \quad \sum P_i \eta_i = 0, \quad P_i > 0 \quad (3.11)$$

Уравнения (3.11) отражают тот факт, что масса корпуса равна m_1 , а его центр масс имеет координаты $(a_1, 0)$ в системе $O^*\xi\eta$. Если число точек контакта корпуса с плоскостью больше трех, то из уравнений (3.11) нельзя однозначно определить нормальные реакции P_i (имеет место статическая неопределимость).

Выведем достаточные условия неподвижности корпуса, для чего получим нижнюю оценку для M_f , справедливую для любых ξ, η и любого распределения нормальных реакций, удовлетворяющих соотношениям (3.11), а затем потребуем, чтобы эта оценка была не менее, чем верхняя оценка (3.8) для $|M_1|$. Из соотношений (3.10), (3.11) следуют оценки

$$M_f \geq k_1 \sum P_i |\xi - \xi_i| + k_0 m_0 g r \geq k_1 |\xi \sum P_i - \sum P_i \xi_i| + k_0 m_0 g r = k_1 m_1 g |\xi - a_1| + k_0 m_0 g r \quad (3.12)$$

Используя оценки (3.8) и (3.12), из неравенства (3.6) получим достаточное условие неподвижности корпуса в виде неравенства

$$b_0 \leq b_1 |\xi - a_1| + b_2 r \quad (3.13)$$

в котором введены обозначения

$$b_0 = J_2 \varepsilon_0 + m_2 g k_2 a_2, \quad b_1 = m_1 g k_1, \quad (3.14)$$

$$b_2 = m_0 g k_0 - m_2 a_2 [\omega_0^4 + (\varepsilon_0 + g k_2 a_2^{-1})^2]^{1/2}$$

Неравенство (3.13) должно иметь место при всех ξ, η . Положим в (3.13) сначала $\xi = \eta = 0$, а затем $\xi = a_1, \eta = 0$. Принимая во внимание равенство (3.9), получим

$$b_0 \leq b_1 a_1, \quad b_0 \leq b_2 a_1 \quad (3.15)$$

Пусть выполнены оба неравенства (3.15). Тогда $b_2 > 0$ и справедлива оценка

$$b_1 |\xi - a_1| + b_2 r \geq b_1 |\xi - a_1| + b_2 |\xi|$$

Правая часть последнего неравенства есть кусочно-линейная функция ξ , которая достигает своего минимума либо при $\xi = a_1$, либо при $\xi = 0$. Следовательно, имеем в силу (3.15)

$$b_1 |\xi - a_1| + b_2 r \geq \min(b_1 a_1, b_2 a_1) \geq b_0$$

Таким образом, выполнение двух неравенств (3.15) обеспечивает справедливость неравенства (3.13) при всех ξ, η . Следовательно, совокупность неравенств (3.15) – достаточное условие неподвижности корпуса.

В развернутой форме при учете обозначений (3.14) достаточные условия неподвижности корпуса имеют вид

$$J_2 \varepsilon_0 + m_2 g k_2 a_2 \leq m_1 g k_1 a_1 \quad (3.16)$$

$$J_2 \varepsilon_0 + m_2 g k_2 a_2 + m_2 a_1 a_2 [\omega_0^4 + (\varepsilon + g k_2 a_2^{-1})^2]^{1/2} \leq m_0 g k_0 a_1$$

Пусть медленные движения совершаются с достаточно малыми угловыми скоростями и ускорениями, так что ω_0 и ε_0 весьма малы. Тогда условия (3.16) приобретают вид

$$m_2 k_2 a_2 < m_1 k_1 a_1, \quad m_2 k_2 (a_1 + a_2) < m_0 k_0 a_1 \quad (3.17)$$

Если неравенства (3.17) выполнены, то всегда можно обеспечить неподвижность корпуса достаточно медленными вращениями хвоста (с малыми ω_0 и ε_0).

4. Анализ быстрых движений. Воспользуемся законами сохранения (2.2). Для этого сначала продифференцируем по t соотношения (1.2)

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_0 - \dot{\theta} a_1 \sin \theta, \quad \dot{y}_1 = \dot{y}_0 + \dot{\theta} a_1 \cos \theta \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_0 + (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) a_2 \sin(\theta + \alpha), \quad \dot{y}_2 = \dot{y}_0 - (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) a_2 \cos(\theta + \alpha)$$

Затем продифференцируем соотношения (1.3), подставим в них равенства (4.1) и воспользуемся тем, что $\dot{x}_c = \dot{y}_c = 0$ в силу соотношений (2.2). Получим два соотношения, из которых найдем производные

$$\dot{x}_0 = m^{-1} [m_1 a_1 \dot{\theta} \sin \theta - m_2 a_2 (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \sin(\theta + \alpha)]$$

$$\dot{y}_0 = m^{-1} [-m_1 a_1 \dot{\theta} \cos \theta + m_2 a_2 (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \cos(\theta + \alpha)]$$

Подставим эти производные в выражение (1.6) для K и примем во внимание, что $K = 0$ в силу (2.2). Получим линейное однородное соотношение для производных $\dot{\theta}$ и $\dot{\alpha}$, которое после ряда преобразований приводится к виду

$$d\theta/d\alpha = -\varphi(\alpha) \quad (4.2)$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{m J_2 - m_2^2 a_2^2 + m_1 m_2 a_1 a_2 \cos \alpha}{m(J_1 + J_2) - m_1^2 a_1^2 - m_2^2 a_2^2 + 2m_1 m_2 a_1 a_2 \cos \alpha}$$

Из соотношений (4.2) следует, что изменение $\Delta\theta$ угла θ за время быстрого движения зависит только от начального и конечного значений α^0, α^1 угла α в этом движении и не зависит от закона изменения угла α . Имеем

$$\Delta\theta = - \int_{\alpha^0}^{\alpha^1} \varphi(\alpha) d\alpha = \gamma(\alpha_0) - \gamma(\alpha_1), \quad \gamma(\beta) = \int_0^{\beta} \varphi(\alpha) d\alpha \quad (4.3)$$

Вычислим интеграл $\gamma(\beta)$. Получим [8]

$$\gamma(\beta) = \frac{\beta}{2} + \frac{A_0}{A_+ A_-} \operatorname{arctg} \left(\frac{A_+}{A_-} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) \quad (4.4)$$

$$A_0 = m(J_2 - J_1) + m_1^2 a_1^2 - m_2^2 a_2^2,$$

$$A_{\pm} = [m(J_1 + J_2) - (m_1 a_1 \pm m_2 a_2)^2]^{1/2}$$

При изменении β от 0 до π функция $\gamma(\beta)$ монотонно возрастает от 0 до значения

$$\gamma(\pi) = (\pi/2)(A_0 + A_+ A_-)(A_+ A_-)^{-1}$$

Интегрируя соотношения (4.2), подсчитаем еще приращения координат шарнира O^* за время быстрого движения

$$\Delta x_0 = m^{-1} [-m_1 a_1 \Delta \cos \theta + m_2 a_2 \Delta \cos(\theta + \alpha)] \quad (4.5)$$

$$\Delta y_0 = m^{-1} [-m_1 a_1 \Delta \sin \theta + m_2 a_2 \Delta \sin(\theta + \alpha)]$$

5. Продольное перемещение двузвенника. Опишем последовательность элементарных движений, реализующих продольное перемещение двузвенника. Пусть в начальный момент двузвенник покоится и представляет собой отрезок, параллельный оси x (состояние 0 на фиг. 2). Имеем $\theta = \alpha = 0$ в состоянии 0. Кроме того, примем, не нарушая общности, что $x_0 = y_0 = 0$ в этом состоянии.

1. Выполним медленное движение, при котором хвост повернется на угол β , а корпус останется неподвижным. Двузвенник перейдет в состояние 1 на фиг. 2, в котором

$$\theta = 0, \quad \alpha = \beta, \quad x_0 = y_0 = 0$$

2. Выполним быстрое движение, при котором угол α изменится от β до 0. Двузвенник перейдет в состояние 2 на фиг. 2. В этом состоянии, согласно соотношениям (4.3), (4.5), имеем

$$\theta = \gamma(\beta), \quad x_0 = m^{-1} [m_1 a_1 (1 - \cos \gamma) + m_2 a_2 (\cos \gamma - \cos \beta)] \quad (5.1)$$

$$y_0 = m^{-1} [-m_1 a_1 \sin \gamma + m_2 a_2 (\sin \gamma - \sin \beta)]$$

На фиг. 2 отмечены лишь изменения угла α , а изменения угла θ и координат x_0, y_0 не показаны.

3. При помощи медленного движения изменим угол α от 0 до $-\beta$. Двузвенник перейдет в состояние 3 на фиг. 2. Угол θ и координаты x_0, y_0 останутся прежними и определяются соотношениями (5.1).

4. При помощи быстрого движения изменим угол α от $-\beta$ до 0. Двузвенник перейдет в состояние 4 на фиг. 2. В этом состоянии, согласно соотношениям (4.3), (4.5), имеем

$$\theta = 0, \quad x_0 = m^{-1} m_2 a_2 [\cos \gamma - \cos \beta + 1 - \cos(\gamma - \beta)] \quad (5.2)$$

$$y_0 = m^{-1} m_2 a_2 [\sin \gamma - \sin \beta - \sin(\gamma - \beta)]$$

В результате выполненных движений двузвенник стал снова отрезком, параллельным оси x , однако получил боковое смещение ($y_0 \neq 0$). Чтобы избавиться от этого смещения, повторим сделанные движения, изменив их порядок, а именно выполним движения 3, 4, 1, 2.

5. При помощи медленного движения изменим угол α от 0 до $-\beta$. Двузвенник перейдет в состояние 5 на фиг. 2, в котором переменные θ, x_0, y_0 определяются соотношениями (5.2).

6. При помощи быстрого движения изменим угол α от $-\beta$ до 0. Двухзвенник перейдет в состояние 6 на фиг. 2, в котором, согласно соотношениям (4.3), (4.5), (5.2), получим

$$x_0 = m^{-1} \{m_1 a_1 (1 - \cos \gamma) + m_2 a_2 [2 \cos \gamma - 2 \cos \beta + 1 - \cos(\gamma - \beta)]\} \quad (5.3)$$

$$\theta = -\gamma, \quad y_0 = m^{-1} [-m_1 a_1 \sin \gamma + m_2 a_2 \sin(\gamma - \beta)]$$

7. При помощи медленного движения изменим угол α от 0 до β . Двухзвенник придет в состояние 7 на фиг. 2, в котором переменные θ , x_0 , y_0 определяются соотношениями (5.3).

8. При помощи быстрого движения изменим угол α от β до 0. Двухзвенник придет в состояние 8 на фиг. 2. Согласно соотношениям (4.3), (4.5), (5.3), получим в этом состоянии

$$\theta = 0, \quad x_0 = 2m^{-1} m_2 a_2 [\cos \gamma - \cos \beta + 1 - \cos(\gamma - \beta)], \quad y_0 = 0 \quad (5.4)$$

Состояние 8 отличается от состояния 0 на фиг. 2 лишь тем, что двухзвенник продвинулся вдоль оси x на расстояние, определяемое соотношением (5.4). Это смещение можно представить в виде

$$l = 8m^{-1} m_2 a_2 \sin(\beta/2) \times \cos(\gamma/2) \sin[(\beta - \gamma)/2] \quad (5.5)$$

Зависимость $\gamma(\beta)$ определена соотношением (4.4).

Цикл из четырех медленных и четырех быстрых движений, переводящий двухзвенник из состояния 1 в состояние 8 на фиг. 2, можно повторять любое число n раз. Выбирая число n , а также угол поворота хвоста β , можно осуществить любое продольное перемещение двухзвенника.

Средняя скорость продольного движения равна

$$v = l[4(T + \tau)]^{-1} \quad (T \gg \tau) \quad (5.6)$$

где T и τ — длительности медленного и быстрого движений соответственно.

6. Произвольное перемещение двухзвенника. Покажем, как при помощи элементарных движений осуществить произвольное перемещение двухзвенника в плоскости Oxy . Пусть в начальном и в конечном состояниях двухзвенник прямолинеен и покоится. Примем, не нарушая общности, что в начальном состоянии

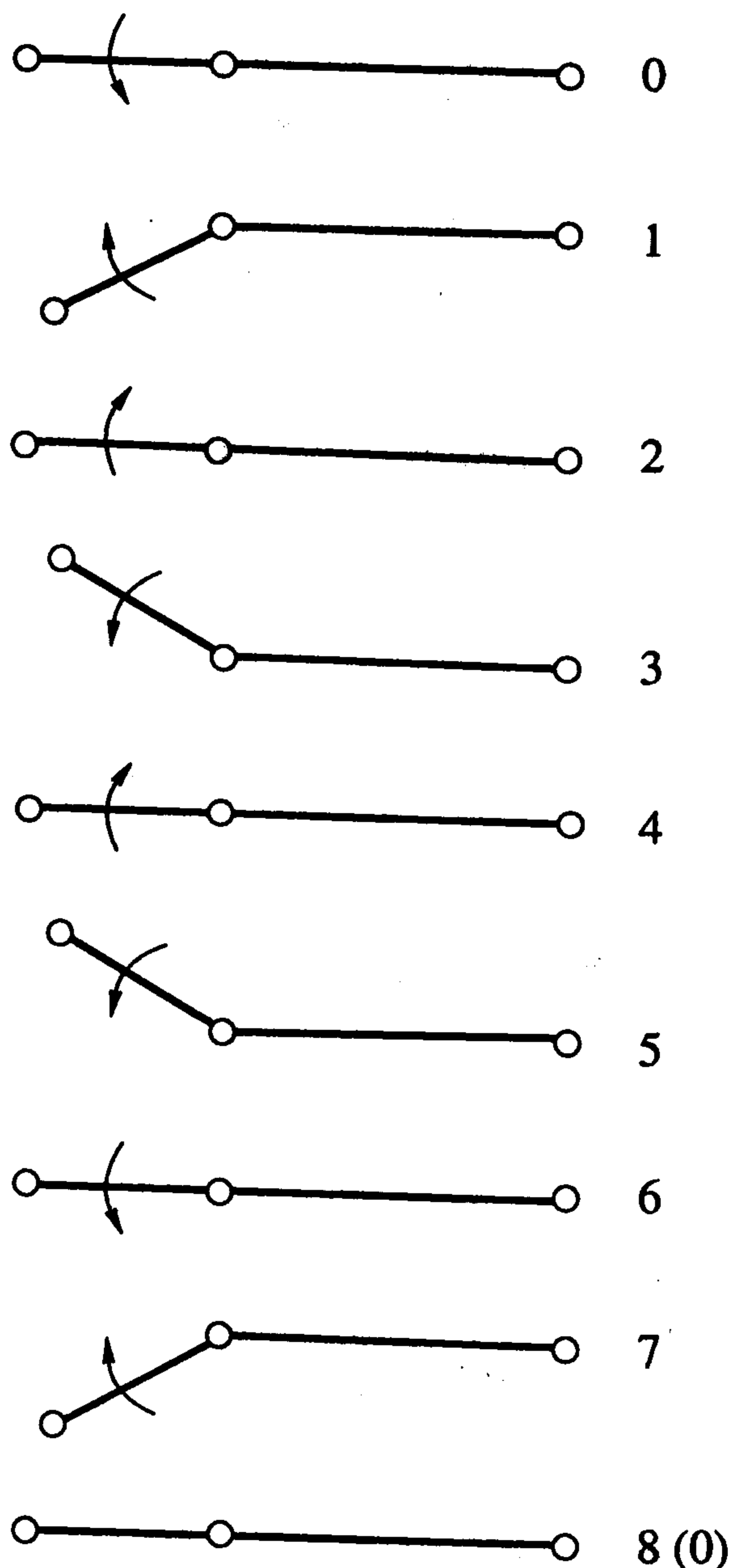
$$x_0 = y_0 = 0, \quad \theta = \alpha = 0$$

Конечное состояние зададим в виде

$$x_0 = x^*, \quad y_0 = y^*, \quad \theta = \theta^*, \quad \alpha = 0 \quad (6.1)$$

Требуемое перемещение построим из следующих этапов.

1. При помощи медленного движения изменим угол α от 0 до β_1 .



Фиг. 2

2. При помощи быстрого движения изменим угол α от β_1 до $-\beta_1$. В результате, согласно соотношениям (4.3), (4.5), угол θ и координаты x_0, y_0 станут такими:

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_1 = 2\gamma(\beta_1) \\ x_0 &= m^{-1}\{m_1 a_1(1 - \cos \theta_1) + m_2 a_2[\cos(\theta_1 - \beta_1) - \cos \beta_1]\} \\ y_0 &= m^{-1}\{-m_1 a_1 \sin \theta_1 + m_2 a_2[\sin(\theta_1 - \beta_1) - \sin \beta_1]\}\end{aligned}\quad (6.2)$$

3. При помощи медленного движения изменим угол α от $-\beta_1$ до β_1 .

4. Выполним n_1 раз последовательность движений 2 и 3, после чего при помощи медленного движения изменим угол α от $-\beta_1$ до 0. Двухзвенник примет снова прямолинейную форму, а его положение и ориентация, согласно (6.2), будут определяться соотношениями

$$x_0 = x' = \Sigma_{x1}, \quad y_0 = y' = \Sigma_{y1}, \quad \theta = \theta' = n_1 \theta_1, \quad \theta_1 = 2\gamma(\beta_1) \quad (6.3)$$

Здесь

$$\Sigma_{xi} = m^{-1}\{m_1 a_1[1 - \cos(n_i \theta_i)] + m_2 a_2 \sum_{j=1}^{n_i} [\cos(j\theta_i - \beta_i) - \cos(j\theta_i - \theta_i + \beta_i)]\}$$

$$\Sigma_{yi} = m^{-1}\{-m_1 a_1 \sin(n_i \theta_i) + m_2 a_2 \sum_{j=1}^{n_i} [\sin(j\theta_i - \beta_i) - \sin(j\theta_i - \theta_i + \beta_i)]\}$$

5. Осуществим прямолинейное перемещение двухзвенника, описанное в разд. 5, с некоторым параметром β . После n циклов такого перемещения координаты шарнира O^* будут

$$x_0 = x'' = x' + nl \cos \theta', \quad y_0 = y'' = y' + nl \sin \theta' \quad (6.4)$$

а угол θ останется равным θ' . Величина l определена соотношением (5.5), а x', y', θ' — равенствами (6.3). Двухзвенник останется прямолинейным.

6. Выполним последовательность движений 1–4, заменяя в них угол β_1 на β_2 , а число n_1 на n_2 . В результате двухзвенник снова примет прямолинейную форму. Его новое положение и ориентацию определим по формулам, аналогичным (6.3),

$$x_0 = x'' + \Sigma_{x2}, \quad y_0 = y'' + \Sigma_{y2}, \quad \theta = \theta' + n_2 \theta_2, \quad \theta_2 = 2\gamma(\beta_2) \quad (6.5)$$

Переменные x_0, y_0, θ в конце движения, определяемые соотношениями (6.5), должны быть равны заданным значениям (6.1). Подставим в соотношения (6.1) выражения (6.5), а также (6.3) и (6.4), и вычислим входящие в (6.3) и (6.5) тригонометрические суммы [8]. После некоторых упрощений получим уравнения

$$\theta' + \theta'' = \theta^* \quad (6.6)$$

$$B_1(1 - \cos \theta') + B_2(1 - \cos \theta'') + nl \cos \theta' = x^*$$

$$-B_1 \sin \theta' - B_2 \sin \theta'' + nl \sin \theta' = y^*$$

Здесь обозначено

$$\theta' = n_1 \theta_1, \quad \theta'' = n_2 \theta_2, \quad \theta_i = 2\gamma(\beta_i), \quad i = 1, 2 \quad (6.7)$$

$$B_i = m^{-1}\{m_1 a_1 + m_2 a_2 \sin(\beta_i - \theta_i / 2)[\sin(\theta_i / 2)]^{-1}\}$$

Если подставить выражения (6.7) в соотношения (6.6), то получим три трансцендентных уравнения для трех целочисленных неизвестных n_1, n_2, n и трех углов β_1, β_2, β , от которых зависят углы θ_1, θ_2 и смещение l соответственно (см. (6.7) и (5.5)).

Покажем разрешимость этих уравнений для важного случая, когда конечная точка отстоит достаточно далеко от начальной, т.е. при условии

$$\max(a_1, a_2)/d = \varepsilon \ll 1, \quad d = [(x^*)^2 + (y^*)^2]^{1/2} \quad (6.8)$$

Будем считать углы β_1 , β_2 и β достаточно малыми, а числа n_1 , n_2 и n достаточно большими, так что величины θ_1 , θ_2 и l — также малые, а произведения $n_1\theta_1$, $n_2\theta_2$ и nl — конечные величины. Из соотношения (4.4) при малых углах β получим

$$\gamma(\beta) = A\beta, \quad A = (1 + A_0A^{-2})/2 < 1 \quad (6.9)$$

Тогда из соотношений (5.5), (6.7) имеем

$$l = D\beta^2, \quad D = 2m^{-1}m_2a_2(1 - A), \quad \theta_i = 2A\beta_i \quad (6.10)$$

$$B_i = b = m^{-1}[m_1a_1 + m_2a_2(A^{-1} - 1)], \quad i = 1, 2$$

Подставляя выражения (6.10) в (6.6), получим

$$\theta' + \theta'' = \theta^*, \quad b(2 - \cos \theta' - \cos \theta'') + L \cos \theta' = x^* \quad (6.11)$$

$$-b(\sin \theta' + \sin \theta'') + L \sin \theta' = y^*, \quad L = nl$$

Из первого уравнения (6.11) выразим $\theta'' = \theta^* - \theta'$, а затем исключим L из второго и третьего уравнений (6.11). Получим трансцендентное уравнение для θ'

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{y^* + b[\sin \theta' + \sin(\theta^* - \theta')]}{x^* - b[2 - \cos \theta' - \cos(\theta^* - \theta')]} \quad (6.12)$$

Из соотношений (6.10) и (6.8) следует, что

$$b \sim \max(a_1, a_2) \sim \varepsilon d$$

Так как $\varepsilon \ll 1$, решение уравнения (6.12) будем искать в виде

$$\theta' = \theta'_0 + \theta'_1, \quad \theta'_0 = \operatorname{arctg}(y^*/x^*) \quad (6.13)$$

где θ'_1 — малая величина порядка ε . Подставим θ' из (6.13) в уравнение (6.12) и проведем необходимые упрощения, считая $b \sim \varepsilon d$, $\theta'_1 \sim \varepsilon$. Получим

$$\theta'_1 = bd^{-1}[2 \sin \theta'_0 + \sin(\theta^* - 2\theta'_0)] \quad (6.14)$$

Равенства (6.13) и (6.14) определяют решение θ' уравнения (6.12) с погрешностью порядка ε^2 . Из соотношений (6.11) с той же точностью найдем

$$\theta'' = \theta^* - \theta', \quad L = d + b[1 - 2 \cos \theta'_0 + \cos(\theta^* - 2\theta'_0)] \quad (6.15)$$

Равенства (6.13) — (6.15) определяют искомое решение θ' , θ'' , L системы (6.11). С другой стороны, из соотношений (6.7), (6.10), (6.11) имеем

$$\theta' = 2An_1\beta_1, \quad \theta'' = 2An_2\beta_2, \quad L = Dn\beta^2 \quad (6.16)$$

Постоянные A и D даны равенствами (6.9) и (6.10). Выбирая достаточно малые значения углов β_1 , β_2 и β и соответствующие большие целые n_1 , n_2 и n , можно с любой точностью аппроксимировать выражениями (6.16) найденное решение для θ' , θ'' и L . При этом оказывается, что $n_i \sim \beta_i^{-1}$, $i = 1, 2$ и $n \sim \beta^{-2}$, см. (6.16).

Таким образом, установлено, что при выполнении условия (6.8) двузвенник можно переместить из любого начального состояния в любое конечное состоя-

ние (6.1) с любой наперед заданной точностью. Указан конструктивный способ управления, реализующий данное перемещение. Конечно, построенный способ далеко не единствен; он был выбран потому, что для него расчет проводится до конца в явном виде. Можно указать способы перемещения, требующие меньшего времени; их расчет требует решения системы трансцендентных уравнений.

Построенные движения состоят из медленных и быстрых движений. Для осуществимости быстрых движений должны выполняться условия (2.1), а достаточные условия осуществимости медленных движений даны неравенствами (3.16). В случае достаточно медленных движений можно применить условия (3.17).

7. Частные случаи. Рассмотрим два простых и важных частных случая двузвенника. Пусть корпус и хвост представляют собой материальные точки массы m_1 и m_2 соответственно, соединенные с шарниром массы m_0 невесомыми жесткими стержнями. В этом случае в соотношениях (4.4), (3.16) нужно положить

$$J_1 = m_1 a_1^2, \quad J_2 = m_2 a_2^2 \quad (7.1)$$

Второй случай отвечает двузвеннику, состоящему из двух однородных прямолинейных стержней одинаковой линейной плотности ρ , соединенных шарниром, масса которого пренебрежимо мала. Стержни соприкасаются с плоскостью по всей своей длине, и на каждый их элемент действуют нормальная реакция и сила трения, пропорциональные длине элемента. Коэффициент трения каждого элемента считаем равным k . Данная модель схематически соответствует змее, изгибающейся в одной точке.

Обозначая длины корпуса и хвоста через l_1 и l_2 соответственно, получим в принятых выше обозначениях

$$m_i = \rho l_i, \quad a_i = l_i / 2, \quad J_i = \rho l_i^3 / 3, \quad i = 1, 2 \quad (7.2)$$

$$m_0 = 0, \quad m = m_1 + m_2$$

Подставляя выражения (7.2) в соотношения (4.4), конкретизируем и упростим формулы для A_0, A_{\pm} :

$$A_0 = (l_2^2 - l_1^2)(l_1^2 + l_2^2 + 4l_1 l_2) \quad (7.3)$$

$$A_+ = [(l_1 + l_2)^4 - 12l_1^2 l_2^2]^{1/2}, \quad A_- = (l_1 + l_2)^2$$

Все соотношения для быстрых движений остаются справедливыми; в них нужно лишь подставить равенства (7.2) и (7.3).

По-иному обстоит дело с условиями осуществимости медленных движений: неравенства (3.16) и (3.17) не выполняются при $m_0 = 0$. Для того чтобы показать осуществимость медленных движений для рассматриваемой модели, потребуются более тонкие оценки.

Неравенство (3.8) при учете соотношений (7.2) имеет вид

$$|M_1| \leq \rho l_2^2 \{ l_2 \varepsilon_0 / 3 + gk / 2 + [\omega_0^4 + (\varepsilon_0 + 2gkl_2^{-1})^2]^{1/2} r / 2 \} \quad (7.4)$$

Соотношение (3.10) для величины момента сил трения в рассматриваемом случае примет вид

$$M_f = k\rho g l, \quad I = \int_0^{l_1} [(\xi - s)^2 + \eta^2]^{1/2} ds \quad (7.5)$$

Оценим интеграл I снизу двумя способами. Используя очевидное неравенство $|a| + |b| \leq (2a^2 + 2b^2)^{1/2}$, получим

$$I \geq (I_0 + |\eta| l_1) / \sqrt{2}$$

$$I_0 = \int_0^{l_1} |\xi - s| ds = \begin{cases} |\xi| l_1 + l_1^2 / 2, & \xi < 0 \\ l_1^2 / 2 + \xi(\xi - l_1), & 0 \leq \xi \leq l_1 \\ \xi l_1 - l_1^2 / 2, & \xi > l_1 \end{cases} \quad (7.6)$$

Из очевидного неравенства

$$l_1^2 / 2 + \xi(\xi - l_1) \geq (\sqrt{2} - 1) l_1 \xi$$

следует оценка

$$I_0 \geq (\sqrt{2} - 1) |\xi| l_1 \quad (7.7)$$

справедливая, как нетрудно проверить, для всех трех случаев (7.6), т.е. для любых ξ . Из соотношений (7.6) и (7.7) вытекает оценка

$$I \geq (1 - 1/\sqrt{2})(|\xi| + |\eta|) l_1 \geq (1 - 1/\sqrt{2}) l_1 r, \quad r = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} \quad (7.8)$$

С другой стороны, в силу соотношений (7.5), (7.6) имеем

$$I \geq I_0 \geq l_1^2 / 4 \quad (7.9)$$

В результате, на основании соотношений (7.5), (7.8) и (7.9) имеем оценку

$$M_f \geq (krg l_1 / 4) \max(l_1, 2(2 - \sqrt{2})r) \quad (7.10)$$

Принимая во внимание оценки (7.4) для $|M_1|$ и (7.10) для M_f , получим, что для выполнения условия (3.6) достаточно, чтобы для всех $r \geq 0$ имело место неравенство

$$c_1 + c_2 r \leq c_3 \max(c_0 l_1, r) \quad (7.11)$$

Здесь обозначено

$$c_1 = (2/3)\epsilon_0 l_2^3 + gkl_2^2, \quad c_2 = [\omega_0^4 + (\epsilon_0 + 2gkl_2^{-1})^2]^{1/2} l_2^2 \quad (7.12)$$

$$c_3 = (2 - \sqrt{2})gkl_1, \quad c_0 = (2 + \sqrt{2})/4$$

В левой части неравенства (7.11) стоит линейная возрастающая функция r , а в правой части — кусочно-линейная выпуклая функция r , имеющая излом при $r = c_0 l_1$. Чтобы неравенство (7.11) выполнялось при всех $r \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы оно выполнялось в точке излома и при $r \rightarrow \infty$. Получим условия

$$c_1 + c_2 c_0 l_1 \leq c_3 c_0 l_1, \quad c_2 \leq c_3 \quad (7.13)$$

Нетрудно видеть, что второе условие (7.13) следует из первого. Следовательно, первое неравенство представляет собой достаточное условие осуществимости медленных движений для рассматриваемой модели. В развернутом виде, при учете обозначений (7.12), это условие запишем следующим образом:

$$(2/3)\epsilon_0 l_2^3 + gkl_2^2 + (2 + \sqrt{2})[\omega_0^4 + (\epsilon_0 + 2gkl_2^{-1})^2]^{1/2} l_1 l_2^2 / 4 \leq gkl_1^2 / 2 \quad (7.14)$$

При исчезающе малых угловых скоростях и ускорениях ω_0 и ϵ_0 неравенство (7.14) принимает вид

$$2\lambda^2 + (2 + \sqrt{2})\lambda - 1 \leq 0, \quad \lambda = l_2 / l_1 \quad (7.15)$$

Неравенство (7.15) при $\lambda > 0$ имеет место, если

$$\lambda = l_2 / l_1 \leq \lambda_0 = [(14 + 4\sqrt{2})^{1/2} - 2 - \sqrt{2}] / 4 = 0.255 \quad (7.16)$$

Если условие (7.16) выполнено, то достаточное условие неподвижности корпуса (7.14) всегда можно обеспечить за счет выбора достаточно малых ω_0 и ϵ_0 , т.е. за счет достаточно медленных вращений хвоста.

8. Примеры. Примем, что медленные движения состоят из фаз разгона и торможения с одинаковым по величине угловым ускорением ϵ_0 . Величина угловой скорости $\omega(t) = |\dot{\alpha}(t)|$ при этом изменяется по закону

$$\omega(t) = \epsilon_0 t, \quad t \in [0, T/2]; \quad \omega(t) = \epsilon_0(T - t), \quad t \in [T/2, T] \quad (8.1)$$

а угол поворота хвоста β при медленных движениях и максимальная величина угловой скорости ω_0 таковы:

$$\beta = \epsilon_0 T^2 / 4, \quad \omega_0 = \epsilon_0 T / 2 \quad (8.2)$$

Параметры движения (8.1), (8.2) зададим в виде

$$\epsilon_0 = 4 \text{ с}^{-2}, \quad T = 1 \text{ с}, \quad \beta = 1 \text{ рад}, \quad \omega_0 = 2 \text{ с}^{-1} \quad (8.3)$$

Рассмотрим два варианта двузвенника, совершающего движения с характеристиками (8.1)–(8.3).

1°. Двузвенник состоит из двух точечных масс и имеет следующие параметры:

$$m_0 = 0.6 \text{ кг}, \quad m_1 = 0.3 \text{ кг}, \quad m_2 = 0.3 \text{ кг}, \quad m = 1.2 \text{ кг}$$

$$a_1 = 1 \text{ м}, \quad a_2 = 0.2 \text{ м}, \quad k_0 = k_1 = k_2 = 0.2$$

Проверка с учетом равенств (7.1) показывает, что условия (3.16) при этом выполняются. Продольное смещение за цикл, подсчитанное по формулам (5.5) и (4.4), оказывается равным $l = 0.085 \text{ м}$, а средняя скорость продольного движения, согласно формуле (5.6), равна $v = 0.021 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$.

2°. Двузвенник состоит из двух однородных стержней и имеет ту же массу и те же размеры, что и в первом примере. В обозначениях (7.2) положим

$$m_1 = 1 \text{ кг}, \quad m_2 = 0.2 \text{ кг}, \quad m = 1.2 \text{ кг}$$

$$l_1 = 1 \text{ м}, \quad l_2 = 0.2 \text{ м}, \quad \rho = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1}, \quad k = 0.2$$

Проверка показывает, что условие осуществимости движений (7.14) здесь выполняется. Продольное смещение l подсчитаем по формуле (5.5), принимая во внимание также соотношения (4.4), (7.2) и (7.3). Получим

$$l = 0.028 \text{ м}$$

Средняя скорость продольного движения, согласно формуле (5.6), равна

$$v_0 = 0.007 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$$

Величина управляющего момента, потребного для реализации движений, для обоих примеров двузвенника составляет, согласно соотношениям (2.1), величину порядка $8 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

9. Заключение. Проведенное исследование показывает возможность движения двузвенника по шероховатой горизонтальной плоскости. Двузвенник может двигаться по прямой как целое, поворачиваться и совершать любое перемещение в плоскости. Даны достаточные условия осуществимости предложенного способа движения. Управление движением осуществляется посредством единственного двигателя, установленного в шарнире двузвенника. Наиболее естественным представляется использование для этой цели электрического двигателя. Особенностью данного способа перемещения является то, что как конструкция аппарата, так и способ управления весьма просты. Представляется перспективным применение предложенного способа перемещения для некоторых типов мобильных роботов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00258).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А., Лаврентьев М.М. Об одном принципе создания тяговой силы для движения // ПМТФ. 1962. № 4. С. 3–9.
2. Gray J. Animal Locomotion. N.Y.: Norton, 1968. 479 p.
3. Добролюбов А.И. Бегущие волны деформации. Минск: Наука и техника, 1987. 142 с.
4. Hirose S. Biologically Inspired Robots: Snake-like Locomotors and Manipulators. Oxford: Univ. Press, 1993. 220 p.
5. Черноусько Ф.Л. Движение многозвенника по горизонтальной плоскости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 8–18.
6. Черноусько Ф.Л. О движении трехзвенника по горизонтальной плоскости // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 15–20.
7. Черноусько Ф.Л. Волнообразные движения многозвенника по горизонтальной плоскости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 518–531.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.II.2000