УДК 533.06

© 2001 г. Л.В. Овсянников

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ГАЗА

Рассматриваются двумерные периодические движения газа, описываемые классом вращательных и вращательно-симметричных точных решений уравнений газовой динамики. Исследование основано на построении первых интегралов и лемме о существовании периодических функций, определяемых квадратурами специального вида. Введено понятие предельных соотношений, позволяющих устанавливать приближенные связи между входящими параметрами и дающих качественное представление о форме изучаемого периодического движения газа. Помимо приведенных примеров предельного анализа ранее известных движений сообщается теорема существования нового вида периодического движения, названного "газовой шестерней".

1. Введение. Периодичность по времени движения идеального газа при отсутствии распределенных по массе внешних воздействий представляет собой исключительный феномен. Ввиду конечности скорости распространения возмущений в газе такая форма движения может легко разрушаться. С этой точки зрения периодические по времени движения сродни установившимся течениям газа. Поэтому вопрос о существовании этой формы движения нетривиален. До сих пор были известны лишь два примера таких движений: покой и твердотельное вращение. Данная работа посвящена доказательству существования новых форм движений газа, периодических по времени. Они находятся в классах двумерных вращательных и вращательно-симметричных точных решений уравнений газовой динамики.

Двумерные движения политропного газа с уравнением состояния (γ – показатель адиабаты)

$$p = s\rho^{\gamma} \tag{1.1}$$

описываются искомыми величинами: радиальной V и окружной W компонентами вектора скорости, плотностью ρ, давлением p и энтропией s, рассматриваемыми как функции времени t и полярных координатах r, θ. Соответствующая система дифференциальных уравнений допускает (в смысле С. Ли) двумерную группу $G_2(H_1, H_2)$ с базисом алгебры Ли операторов

$$H_1 = \alpha\partial_t - \beta\partial_\theta \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$$

$$H_2 = r\partial_r + V\partial_V + W\partial_W + n\rho\partial_\rho + (n+2)\,p\partial_p + ms\partial_s$$

где α, β, n – произвольные постоянные и

$$m = n + 2 - n\gamma \tag{1.2}$$

Группа G_2 порождает инвариантную подмодель – систему обыкновенных дифференциальных уравнений для некоторых функций от независимой переменной

$$\xi = \alpha\theta + \beta t \tag{1.3}$$

Так как группа G_2 – абелева, то G_2-подмодель можно построить в два этапа: сначала как инвариантную $G_1(H_2)$-подмодель, а затем из нее получить инвариантную $G_1(H_2)$-подмодель [1]. Этот прием здесь удобен тем, что он облегчает интегрирование уравнений G_2-подмодели.

На первом этапе все искомые величины V, W, ρ, p, s рассматриваются как функции независимых переменных (ξ, r), а уравнения $G_1(H_1)$-подмодели имеют вид

$$
\begin{aligned}
&DV+\rho^{-1}rp_r=W^2\\
&DW+\rho^{-1}\alpha p_\xi=-VW\\
&D\rho+\rho(V+rV_r+\alpha W_\xi)=0\\
&Ds=0
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

с оператором полной производной $D = (\alpha W + \beta r)\,\partial_\xi + rV\partial_r$ и уравнением состояния (1.1).

На втором этапе в систему (1.4) подставляются выражения искомых через инварианты $A,\ldots, S$ оператора H_2

$$
V=rA,\quad W=rB,\quad \rho=r^nR,\quad p=r^{n+2}P,\quad s=r^mS \tag{1.5}
$$

где $A,\ldots, S$ – функции только от ξ (1.3). Это приводит к следующим уравнениям G_2-подмодели (штрихом обозначены производные по ξ):

$$
\begin{aligned}
&(\alpha B+\beta)A'+A^2-B^2+(n+2)P/R=0\\
&(\alpha B+\beta)B'+2AB+\alpha P'/R=0\\
&(\alpha B+\beta)R'+(n+2)AR+\alpha RB'=0\\
&(\alpha B+\beta)S'+mAS=0,\quad P=SR^\gamma
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Замечание 1. Параметры α, β не являются существенными и введены только для единообразной записи систем (1.4) и (1.6). Они могут быть изменены умножением оператора H_1 на произвольный множитель и растяжением времени t. Эти изменения приводят к подгруппам G_2', сопряженным с G_2, и тем самым к решениям, которые можно получить из "эталонных" заменой переменных. Поэтому достаточно рассмотреть лишь классы "эталонных" решений, для которых $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ или $(\alpha, \beta) = (1, \beta)$, где $\beta = 0$ или $\beta = 1$.

2. Условия периодичности. Задача состоит в том, чтобы найти решения системы (1.6), описывающие периодические по t движения газа. В этом разделе выводятся условия существования таких решений. Здесь предполагается, что окружная скорость $W > 0$ (это свойство выполняется во всех рассмотренных ниже примерах).

Уравнения траекторий частиц газа $dr/dt = V$, $rd\theta/dt = W$ для решений вида (1.5) сводятся к таким:

$$
dr/dt=rA(\xi),\quad d\theta/dt=B(\xi) \tag{2.1}
$$

а эволюция величины ξ (1.3) вдоль траекторий описывается уравнением

$$
d\xi/dt=\alpha B(\xi)+\beta \tag{2.2}
$$

Пусть функции $r(t)$, $\theta(t)$ образуют решение системы (2.1), т.е. описывают *орбиты* движения частиц газа. Для периодичности необходимо, чтобы орбиты были замкнутыми кривыми на плоскости (r, θ). Пусть T – минимальный *орбитальный период* такого движения, т.е. для любого t верны равенства

$$
r(t+T)=r(t),\quad \theta(t+T)=\theta(t)+2\pi \tag{2.3}
$$

При этом инвариантная координата ξ (1.3) получает приращение

$$
\xi(t+T)=\xi(t)+\Phi_1,\quad \Phi_1=2\pi\alpha+\beta T \tag{2.4}
$$

Из уравнений (2.1) следует, что функции $A(\xi)$ и $B(\xi)$ должны быть периодическими с периодом Φ_1, который, вообще говоря, не обязательно будет минимальным периодом этих функций. Если последний есть Φ, то должно быть $\Phi_1 = \nu\Phi$ с некоторым целым числом $\nu \neq 0$. Величина Φ будет называться *фазовым периодом*. Итак, орбитальный и фазовый периоды связаны соотношением

$$\nu\Phi = 2\pi\alpha + \beta T \tag{2.5}$$

Вместе с тем очевидно, что первое соотношение (2.4) в силу уравнения (2.2) с положительной Φ-периодической по ξ правой частью равносильно такому:

$$T = \nu\int_0^{\Phi} [\alpha B(\xi) + \beta]^{-1} d\xi \tag{2.6}$$

Из (2.1), (2.2) определяются *инвариантные траектории* с уравнением $r = r(\xi)$, которые будут Φ-периодическими на плоскости полярных координат (r, ξ). Для периодичности решения (1.5) необходимо, чтобы инвариантные траектории были замкнутыми кривыми, т.е. чтобы $r(\xi + 2\pi) = r(\xi)$. Это будет верно, если и только если с некоторым целым числом $\mu \neq 0$ выполнено соотношение

$$\mu\Phi = 2\pi \tag{2.7}$$

Замечание 2. Если $\alpha = 0$, то равенства (2.5) и (2.6) дают одно и то же соотношение

$$\nu\Phi = \beta T \tag{2.8}$$

При этом $\xi = \beta t$ и период Φ можно вычислить через квадратуру из второго уравнения (2.1). В силу соотношения (2.8) условие изменения значения $\theta(t)$ за период T на 2π приводится к равенству

$$\nu\int_0^{\Phi} B(\xi) d\xi = 2\pi\beta$$

Окончательно получается следующий результат:

Предложение 1. Для того чтобы формулы (1.5) описывали периодическое по времени t движение газа с орбитальным периодом T, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее решение системы (1.6) было периодическим с фазовым периодом Φ, причем периоды T и Φ связаны с некоторыми ненулевыми целыми числами μ, ν соотношениями (2.4)–(2.7), а именно

$$T = \nu\int_0^{\Phi} [\alpha B(\xi) + \beta]^{-1} d\xi, \quad \nu\Phi = 2\pi\alpha + \beta T, \quad \mu\Phi = 2\pi \tag{2.9}$$

первое из которых при $\alpha = 0$ заменяется соотношением

$$\nu\int_0^{\Phi} B(\xi) d\xi = 2\pi\beta \tag{2.10}$$

Все эти условия получены выше как необходимые. Пусть они выполнены. Тогда все, что надо доказать, сводится к установлению второго равенства (2.3). Из равносильного первому равенству (2.9) первого равенства (2.4) следует соотношение

$$\xi(t + T) = \xi(t) + \nu\Phi = \xi(t) + 2\pi\alpha + \beta T$$

которое после подстановки выражения (1.3) сводится к $\alpha\theta(t + T) = \alpha\theta(t) + 2\pi\alpha$. Отсюда при $\alpha \neq 0$ получается требуемое. Если же $\alpha = 0$, то второе равенство (2.3) легко следует из квадратуры второго уравнения (2.1) в силу соотношений (2.9), (2.10). Тем самым предложение 1 доказано.

Установленные здесь условия периодичности связывают фазовый и орбитальный периоды тремя соотношениями. Вместе с тем фазовый период (если он существует) должен определяться решением системы (1.6). Это означает, что из условий (2.9), (2.10) для периодических решений получатся некоторые соотношения для других параметров задачи: показателей n, γ и констант интегрирования.

3. Первые интегралы. Из третьего уравнения (1.4), переписанного в виде

$$[(\alpha W+\beta r)\rho]_\xi+(rV\rho)_r=0$$

следует существование "инвариантной функции тока" $\psi(\xi, r)$, с которой

$$(\alpha W+\beta r)\rho=\psi_r, \quad rV\rho=-\psi_\xi \tag{3.1}$$

Функция ψ является решением уравнения $D\psi = 0$ и сохраняет постоянное значение вдоль интегральных кривых уравнения

$$dr/d\xi=rV/(\alpha W+\beta r) \tag{3.2}$$

в силу чего эти кривые называются "инвариантными линиями тока".

Кроме того, ψ является лагранжевой координатой, поэтому любое решение вида (1.5) дает описание движения массы газа, ограниченной некоторыми (произвольными) "инвариантными линиями тока" как непроницаемыми стенками, которые сами могут быть подвижными на физической плоскости (r, θ).

Какая-либо функция $F(\xi, r)$ удовлетворяет уравнению $DF = 0$, если и только если она является функцией от ψ, т.е. $F = F(\psi)$. Поэтому функцию ψ удобно использовать для отыскания интегралов системы (1.4). Так, последнее уравнение (1.4) дает интеграл энтропии

$$s=s(\psi) \tag{3.3}$$

Далее, вначале предположим, что $\alpha \neq 0$. Путем умножения первого из уравнений (1.4) на αV, второго на $\alpha W + \beta r$ и сложения результатов получается интеграл энергии (аналог интеграла Бернулли для установившегося течения газа)

$$\alpha(V^2+W^2)+2\beta rW+2\alpha\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=2H(\psi) \tag{3.4}$$

при выводе которого использовались уравнения (1.1) и (3.3).

В классе решений (1.5) функция ψ находится явно (далее предполагается, что $n \neq -2$). Выражения (3.1) принимают вид

$$\psi_r=r^{n+1}(\alpha B+\beta)R, \quad \psi_\xi=-r^{n+2}AR$$

откуда (с точностью до несущественного постоянного слагаемого)

$$(n+2)\psi=r^{n+2}(\alpha B+\beta)R \tag{3.5}$$

Это позволяет конкретизировать $s(\psi)$ и $H(\psi)$ в интегралах (3.3) и (3.4). В силу представления (1.5) интеграл (3.3) имеет вид $r^m S(\xi) = s(\psi)$. Подстановка из (3.5)

$$r=[(n+2)\psi/(\alpha B+\beta)R]^{1/(n+2)} \tag{3.6}$$

приводит к разделению переменных ξ и ψ, что дает зависимость энтропии от ψ

$$s(\psi)=s_0\psi^{m/(n+2)}$$

с произвольной постоянной s_0 и значение "инвариантной энтропии"

$$S(\xi)=[(\alpha B+\beta)R]^{m/(n+2)} \tag{3.7}$$

Поэтому инвариантное уравнение состояния принимает форму соотношения

$$P = (\alpha B + \beta)^{m/(n+2)} R^{(n+2+2\gamma)/(n+2)} \tag{3.8}$$

Аналогичная процедура с интегралом (3.4) дает зависимость "константы энергии" H от ψ

$$H(\psi) = [(n+2)\psi]^{2/(n+2)}$$

а интеграл энергии (3.4) принимает форму соотношения

$$\alpha(A^2 + B^2) + 2\beta B + 2\alpha \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{R} = 2h[(\alpha B + \beta)R]^{2/(n+2)} \tag{3.9}$$

с произвольной постоянной h.

Оказывается, что система (1.6) при $\alpha \neq 0$ имеет еще один дополнительный интеграл, получаемый следующим построением. Вводятся две новые искомые функции $X(\xi)$ и $Y(\xi)$:

$$Y = (\alpha B + \beta)^{-1}, \quad X = YP/R \tag{3.10}$$

В силу равенства (3.8) величины R, X, Y связаны соотношением

$$Y^{n\gamma} R^{2\gamma} = X^{n+2} \tag{3.11}$$

Поэтому функции B, R, P явно выражаются через X, Y. Подстановка этих выражений во второе и третье уравнения (1.6) приводит к равенствам

$$(\alpha^2\gamma XY - 1)X' = \gamma AXY^2[\alpha^2(n+2)X + 2\beta] \tag{3.12}$$

$$(\alpha^2\gamma XY - 1)Y' = AY^2[\alpha^2(n+2+2\gamma)XY + 2\beta Y - 2]$$

Отсюда следует линейное уравнение для функции $Y = Y(X)$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{[\alpha^2(n+2+2\gamma)X + 2\beta]Y - 2}{\gamma X[\alpha^2(n+2)X + 2\beta]} \tag{3.13}$$

общее решение которого и дает искомый дополнительный первый интеграл системы (1.6).

Замечание 3. Для некоторых показателей n и γ общее решение уравнения (3.13) выражается в элементарных функциях. В случае $n > 0$ это верно для *согласованных показателей*,

$$n + 2 = n\gamma \tag{3.14}$$

При этом из равенства (1.2) следует $m = 0$, что в силу соотношений (1.5) и (3.7) приводит к *изэнтропическим движениям* газа.

Для согласованных показателей общее решение уравнения (3.13) дается следующими формулами (с произвольной постоянной k):

$$Y = kX^{1/\gamma}(\alpha^2 n\gamma X + 2\beta)^{(\gamma-1)/\gamma} + (\alpha n\gamma / 2\beta)^2 X + 1/\beta \quad (\beta \neq 0) \tag{3.15}$$

$$Y = kX + (\alpha^2 n\gamma^2 X)^{-1} \quad (\beta = 0)$$

В случае $\alpha = 0$ $(\beta \neq 0)$ интеграл (3.9) принимает вид

$$B = h_1 R^{2/(n+2)} \tag{3.16}$$

с некоторой постоянной h_1, а инвариантное давление P, получаемое из (3.8), при надлежащей нормировке дается формулой

$$P = RB^{\gamma} \tag{3.17}$$

Дополнительный интеграл здесь выводится из двух первых уравнений (1.6), принимающих вид

$$\beta A' + A^2 - B^2 + (n+2)B^\gamma = 0, \quad \beta B' + 2AB = 0 \tag{3.18}$$

Отсюда следует, что функция $A^2(B)$ удовлетворяет линейному уравнению первого порядка, интегрирование которого и дает искомый интеграл (с произвольной постоянной h)

$$A^2 + B^2 - \frac{n+2}{\gamma - 1} B^\gamma = hB \tag{3.19}$$

4. Ключевые уравнения. Полученные выше первые интегралы показывают, что для полного решения системы (1.6) достаточно найти зависимость одной из искомых функций от ξ. Эта операция сводится к одной квадратуре – решению некоторого *ключевого уравнения*.

В случае $\alpha \neq 0$ за искомую можно принять функцию $X(\xi)$, производная которой дается первым уравнением (3.12), где $Y = Y(X)$ определена дополнительным интегралом – решением уравнения (3.13) (для согласованных показателей формулой (3.15)), а функция $A = A(X)$ определяется из интеграла энергии (3.9). Последний после подстановки выражений (3.8), (3.10) переписывается в виде

$$A^2 = (\alpha Y)^{-2} \left[\beta^2 Y^2 - 2\left(\alpha^2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} X - \alpha h X^{1/\gamma} \right) Y - 1 \right] \tag{4.1}$$

Тем самым при $\alpha \neq 0$ получается ключевое уравнение

$$\left(\frac{dX}{d\xi} \right)^2 = A^2 \left\{ \frac{\gamma X Y^2 [\alpha^2 (n+2) X + 2\beta]}{\alpha^2 \gamma X Y - 1} \right\}^2 \tag{4.2}$$

В случае $\alpha = 0$ за искомую принимается $B(\xi)$, производная которой дается вторым уравнением (3.18), а функция $A = A(B)$ определяется из дополнительного интеграла (3.19)

$$A^2 = hB - B^2 + \frac{n+2}{\gamma - 1} B^\gamma \tag{4.3}$$

Соответствующее ключевое уравнение таково:

$$\left(\frac{dB}{d\xi} \right)^2 = A^2 \left\{ \frac{2B}{\beta} \right\}^2 \tag{4.4}$$

Специфика этих уравнений состоит в том, что на искомых решениях функция A^2 является однозначной функцией от величины X или B, в то время как функция $A(X)$ или $A(B)$ будет двузначной.

5. Периодические решения. Отвлекаясь пока от конкретных задач, фиксируем некоторые общие закономерности.

Пусть функция $f(X)$ непрерывно дифференцируема в открытом интервале $\Delta \subset \mathbb{R}(X)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение для функции $X(\xi)$

$$(dX / d\xi)^2 = f(X) \tag{5.1}$$

Предложение 2. Если существует такой замкнутый интервал $[X_1, X_2] \subset \Delta$, что: а) $f(X_1) = f(X_2) = 0$, б) $f(X) > 0$ при $X_1 < X < X_2$, в) $f'(X_1) > 0$, $f'(X_2) < 0$, то уравнение (5.1) имеет четное по ξ периодическое решение $X(\xi)$ с периодом

$$\Pi = 2\int\limits_{X_1}^{X_2} \frac{dX}{\sqrt{f(X)}} \tag{5.2}$$

Действительно, искомое решение строится так: для $0 \leqslant \xi \leqslant \Pi/2$ берется $X'(\xi) = \sqrt{f(X)} > 0$, $X(\xi)$ определяется квадратурой

$$\xi = \int\limits_{X_1}^{X(\xi)} \frac{dX}{\sqrt{f(X)}}$$

и в силу равенства (5.2) принимает значение $X(\Pi/2) = X_2$. Для $\Pi/2 \leqslant \xi \leqslant \Pi$ берется $X'(\xi) = -\sqrt{f(X)} < 0$, $X(\xi)$ определяется квадратурой

$$\xi = \int\limits_{X(\xi)}^{X_2} \frac{dX}{\sqrt{f(X)}} + \frac{\Pi}{2}$$

и в силу равенства (5.2) принимает значение $X(\Pi) = X_1$. Построенное на интервале $(0, \Pi)$ решение продолжается на всю ось $\mathbb{R}(\xi)$ как периодическое с периодом Π. Очевидно, оно будет четным по ξ.

На практике отыскание интервала $[X_1, X_2]$, удовлетворяющего условиям а) – в), может быть непростой задачей. Этой цели служит следующее достаточное условие, использующее зависимость правой части в (5.1) от некоторого параметра λ.

Рассматривается уравнение

$$(dX/d\xi)^2 = f(X,\lambda) \tag{5.3}$$

и предполагается, что в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2(X, \lambda)$ функция $f(X, \lambda)$ трижды непрерывно дифференцируема.

Лемма 1. Если существует точка $M(X_0, \lambda_0) \in \Omega$, в которой

$$1)\, f(M) = 0,\ f_X(M) = 0; \quad 2)\, f_\lambda(M) > 0,\ f_{XX}(M) < 0$$

то для любого достаточно малого ε уравнение

$$(dX/d\xi)^2 = f(X, \lambda_0 + \varepsilon^2) \tag{5.4}$$

имеет периодическое решение $X_\varepsilon(\xi)$ с периодом

$$\Pi_\varepsilon = 2\pi/b + O(\varepsilon) \tag{5.5}$$

и на любом конечном интервале в $\mathbb{R}(\xi)$ верно представление

$$X_\varepsilon(\xi) = X_0 - \varepsilon a \cos b\xi + O(\varepsilon^2) \tag{5.6}$$

причем положительные постоянные a и b определяются равенствами

$$a^2 = 2f_\lambda(M)/|f_{XX}(M)| \quad 2b^2 = |f_{XX}(M)| \tag{5.7}$$

Доказательство. Графики функций $f(X, \lambda_0)$ и $f(X, \lambda_0 + \varepsilon^2)$ в окрестности точки X_0, вытекающие из условий *1* и *2*, показывают, что для функции $f(X, \lambda_0 + \varepsilon^2)$ существует интервал $[X_1, X_2]$, требуемый в предложении 2. Остается установить справедливость представлений (5.5), (5.6). Пусть $X = X_0 + x$; ясно, что разности $X_0 - X_1$, $X_2 - X_0$ и величина x имеют порядок ε. В силу условий *1* разложение функции $f(X_0 + x, \lambda_0 + \varepsilon^2)$ по формуле Тейлора в точке $M(X_0, \lambda_0)$ в обозначениях (5.7) имеет вид

$$f(X_0 + x,\ \lambda_0 + \varepsilon^2) = b^2(\varepsilon^2 a^2 - x^2 + O(\varepsilon^3))$$

Замена переменных $(\xi, x) \to (\eta, y)$ по формулам $\eta = b\xi$, $x = \varepsilon a y$ приводит уравнение (5.4) к $(dy/d\eta)^2 = 1-y^2 + \varepsilon g$ с гладкой ограниченной функцией $g(y, \varepsilon)$, т.е. $|g| + |g_y| < N < \infty$. Отсюда следует существование корней правой части $y_\pm = \pm\sqrt{1+\varepsilon g(y_\pm, \varepsilon)}$ и определение зависимости $y = y(\eta)$ через квадратуру

$$\eta = \int\limits_{y_-}^{y} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2+\varepsilon g(s,\varepsilon)}} \tag{5.8}$$

Наконец, представления (5.5), (5.6) получаются путем двусторонних оценок интеграла на основе неравенства $|g| + |g_y| < N$.

Для анализа решений уравнения вида (5.3), удовлетворяющего условиям леммы 1, полезен следующий факт. Некоторые величины (соотношения между величинами) остаются содержательными в пределе при $\varepsilon \to 0$. Такие величины (соотношения) будут называться *предельными*.

Например, для решений вида (5.6) предельными величинами являются X_0 и λ_0, а также вытекающий из (5.5) предельный период $\Pi_0 = 2\pi/b$. Предельные соотношения дают хороший ориентир при построении точных решений (обычно путем численного расчета), а также для наглядного качественного представления описываемых периодических движений. Кроме того, предельные соотношения полезны для установления приближенных связей между другими параметрами, от которых может зависеть функция f.

Замечание 4. Для периодических решений системы (1.6) из предложения 1 следует, что если B_0 – предельное значение функции $B(\xi)$, то предельные формы соотношений (2.9), (2.10) приводят к выражениям для предельных периодов

$$\alpha(T_0 B_0 - 2\pi) = 0, \quad \beta T_0 = 2\pi(\nu/\mu - \alpha), \quad \Phi_0 = 2\pi/\mu \tag{5.9}$$

Кроме того, если для решения соответствующего ключевого уравнения (4.2) или (4.4) определена величина b (5.7) и это решение периодическое с периодом Φ, то его предельное значение должно совпадать с Π_0, т.е. должно быть $\Phi_0 = 2\pi/b$. В силу равенств (5.9) отсюда следует предельное соотношение

$$b = \mu \tag{5.10}$$

6. Газовый маятник. Название "газовый маятник" было присвоено "эталонному" решению со значениями $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ в работе [2]. Однако там предельные соотношения не выводились, и этот пробел здесь восполняется.

В ключевом уравнении (4.4) для этого случая $X = B$, $\xi = t$, $\lambda = h$, а функция f такова:

$$f(B,h) = 4B^3\left(h - B + \frac{n+2}{\gamma-1}B^{\gamma-1}\right) \tag{6.1}$$

Область Ω – полуплоскость $B > 0$, $h \in \mathbb{R}$; предполагается, что $n + 2 \neq 0$ и $\gamma > 1$. Уравнения *1* из условия леммы 1 легко решаются и точка $M(B_0, h_0)$ определяется равенствами

$$B_0^{2-\gamma} = n+2, \quad (\gamma-1)h_0 = (\gamma-2)B_0 \tag{6.2}$$

Полученные при учете равенств (6.2) значения производных

$$f_h(M) = 4B_0^3, \quad f_{BB}(M) = 4(\gamma-2)B_0^2$$

показывают, что условия *2* леммы 1 выполняются, если и только если $\gamma < 2$. При этом постоянные a и b (5.7) имеют значения

$$a = \sqrt{2B_0/(2-\gamma)}, \quad b = B_0\sqrt{4-2\gamma} \tag{6.3}$$

Условия периодичности (2.9), (2.10) здесь таковы:

$$\nu\int_0^\Phi B(t)dt = 2\pi, \quad \nu\Phi = T, \quad \mu\Phi = 2\pi \tag{6.4}$$

Согласно лемме 1, уравнение (4.4) с правой частью $f(B, h_0 + \varepsilon^2)$ имеет Φ-периодическое решение

$$B(t) = B_0 - \varepsilon a \cos bt + O(\varepsilon^2) \tag{6.5}$$

Подстановка решения (6.5) в первое соотношение (6.4) показывает, что для достаточно малых ε все соотношения (6.4) удовлетворяются, только если $\nu = \sqrt{4-2\gamma}$ и $B_0 = \mu$. Значит, необходимо $\nu = 1$ и $\gamma = 3/2$. В этом случае фазовый и орбитальный периоды совпадают: $\Phi = T = 2\pi/\mu$. Тот же результат дают и предельные соотношения (5.9), (5.10).

В интерпретации описываемого движения как периодического сжатия и расширения вращающегося газового цилиндра [2] это означает, что за один цикл (период T) газ полностью восстанавливает исходное состояние движения, т.е. получается "газовый маятник", пульсирующий с частотой μ.

7. Течения с замкнутыми линиями тока. Во втором "эталонном" случае $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ будет $\xi = \theta$, что приводит к установившимся течениям газа. Аналогичное решение рассматривалось в работе [3] с участвующим там показателем автомодельности α, который в решениях вида (1.5) равен единице. Кроме того, анализ был выполнен [3] для изэнтропических течений, т.е. для $m = 0$ (замечание 1). Здесь этот результат дополняется указанием предельных форм этого вида течений газа, в частности определением его периодов.

Ключевое уравнение (4.2) в этом случае принимает вид

$$(dX/d\theta)^2 = A^2[n\gamma^2X^2Y^2/(\gamma XY-1)]^2 \tag{7.1}$$

Выражение (3.15) Y через X после замены постоянной $k \to k/n\gamma^2$ дается соотношением

$$n\gamma^2XY = kX^2 + 1 \tag{7.2}$$

а зависимость A^2 от X определяется интегралом энергии (3.9)

$$Y^2A^2 = 2hX^{1/\gamma}Y - n\gamma XY - 1 \tag{7.3}$$

Здесь параметр $\lambda = h$. Область Ω, в которой правая часть $f(X, h)$ уравнения (7.1) удовлетворяет условию гладкости из леммы 1, фиксируется неравенствами

$$X > 0, \quad Y > 0; \quad \gamma XY > 1 \tag{7.4}$$

Условия *1* леммы 1 приводят к уравнению для величины $Z = kX^2$

$$(\gamma-1)Z^2 - (\gamma^2-\gamma+2)Z + \gamma^2 - 1 = 0$$

с корнями $Z_1 = \gamma-1$, $Z_2 = (\gamma+1)/(\gamma-1)$. Но из соотношения (7.2) следует, что $\gamma XY = (Z+1)(\gamma-1)/2\gamma$ и с корнем Z_1 будет $\gamma XY = (\gamma-1)/2$, а с корнем Z_2 будет $\gamma XY = 1$. Поэтому годится только корень Z_1, с которым точка $M(X_0, h_0)$ определена однозначно (h_0 находится из условия равенства нулю правой части (7.3)). Согласно неравенствам (7.4), принадлежность $M \in \Omega$ возможна, только если $\gamma > 3$.

Вычисление производной f_{XX} от правой части $F(X, h)$ уравнения (7.1) приводит к значению

$$f_{XX}(M) = -8(\gamma-1)/(\gamma-3) \tag{7.5}$$

Значит, при $\gamma > 3$ условия *2* леммы выполнены. Формула (5.7) определяет значение $b^2 = 4\,(\gamma - 1)/(\gamma - 3)$. Из предельного соотношения (5.10) находятся возможные показатели $\gamma = (3\mu^2 - 4)/(\mu^2 - 4)$. Наибольшее значение γ, с которым существует периодическое течение газа вида (1.5), получается при $\mu = 3$ и равно 23/5.

Условия периодичности (2.9) дают равенство $\mu = \nu$. Согласно определению (3.10), здесь $B = 1/Y$. Поэтому предельное значение орбитального периода, получаемое из (5.9), равно $T_0 = 2\pi Y_0$, где Y_0 находится из соотношения (7.2) и окончательно получается

$$T_0 = \pi\sqrt{(\gamma-1)k}\,/\,\gamma \tag{7.6}$$

где постоянная $k > 0$ остается произвольной.

Замкнутые линии тока этого течения газа описываются формулой (3.6). Они образуют неподвижную в плоскости (r, θ) "звездочку" с ν-выпуклостями и впадинами, а движущиеся по этим линиям частицы возвращаются в исходное положение через промежуток времени (7.6).

8. Газовая шестерня. Новый вид периодического движения газа описывается "эталонным" решением с $(\alpha, \beta) = (1, 1)$, когда $\xi = \theta + t$. Для упрощения формул здесь рассматривается изэнтропический вариант, когда $m = 0$ (замечание 1), причем $\gamma > 1$ и $n > 0$.

Ключевое уравнение (4.2) в данном случае принимает вид

$$(dX/d\xi)^2 = f(X,h) \equiv G^2(X)F(X,h) \tag{8.1}$$

$$G(X) = \frac{\gamma XY(n\gamma X+2)}{\gamma XY-1}, \quad F(X,h) = Y^2 - n\gamma XY - 1 + 2hX^{1/\gamma}Y$$

$$Y = kX^{1/\gamma}(n\gamma X+2)^{(\gamma-1)/\gamma} + (n\gamma/2)^2 X + 1$$

В качестве параметра берется $\lambda = h$, а область Ω гладкости правой части (8.1) задается неравенствами

$$X > 0, \quad Y > 0, \quad \gamma XY \neq 1$$

Условия *1* леммы 1 сводятся к уравнениям $F = 0$, $F_X = 0$ и определяют координаты точки $M(X_0, h_0) \in \Omega$ через величину Y_0 из соотношений

$$n\gamma X_0 Y_0 = (Y_0 - 1)^2, \quad h_0 X_0^{1/\gamma} Y_0 = 1 - Y_0 \tag{8.2}$$

Первое из условий *2* леммы 1 выполняется, так как $f_h = 2G^2(X_0)X_0^{1/\gamma}Y_0 > 0$ в Ω. Для реализации второго условия вычисляется производная f_{XX}, значение которой в точке $M(X_0, h_0)$ (получаемое в результате довольно длинных выкладок) есть

$$f_{XX}(M) = -4(Y_0 - 1)^2\varphi(Y_0, n), \quad \varphi(Y_0, n) = (2 - nY_0)/[(Y_0 - 1)^2 - n] \tag{8.3}$$

Поэтому второе условие *2* леммы 1 равносильно неравенствам $Y_0 \neq 1$ и $\varphi\,(Y_0, n) > 0$. Последнее выполнено, если и только если точка (Y_0, n) принадлежит объединению D областей $D_i \subset \mathbb{R}^2(Y_0, n)$:

$$D_1 = \{n < 1,\ 0 < Y_0 < 1 - \sqrt{n}\}$$

$$D_2 = \{n < 1,\ 1 + \sqrt{n} < Y_0 < 2/n\}$$

$$D_3 = \{n > 1,\ 2/n < Y_0 < 1 + \sqrt{n}\}$$

Формула (8.3) дает $\varphi(Y_0, 1) = -1/Y_0$, т.е. точки $\varphi(Y_0, 1) \notin D$; поэтому необходимо $n \neq 1$ $(\gamma \neq 3)$.

В силу леммы 1 периодические решения уравнения (8.1) существуют. Величина b, согласно (5.7), определяется равенством

$$b^2 = 2(Y_0-1)^2\varphi(Y_0, n) \tag{8.4}$$

Согласно соотношениям (3.10), $B_0 = (1-Y_0)/Y_0$. Из равенств (5.9) следует выражение $Y_0 = 1-\mu/\nu$, и для предельных периодов получаются формулы

$$T_0 = 2\pi(\nu-\mu)/\mu, \quad \Phi_0 = 2\pi/\mu \tag{8.5}$$

В силу соотношения (5.10) равенство (8.4) приводится к соотношению, определяющему возможные показатели n

$$n = \nu(\mu^2-4)/(\nu^3-2\nu + 2\mu) \tag{8.6}$$

Полученные результаты сводятся в следующей формулировке.

Теорема. Для любых целых чисел $\mu \neq 0$ и $|\nu| > 0$, с которыми формула (8.6) дает величину $n > 0$, $n \neq 1$, система уравнений (1.6) при $(\alpha, \beta) = (1,1)$ со значениями n (8.6) и $\gamma = (n + 2)/n$ имеет решение, описывающее периодическое движение газа с предельными периодами (8.5).

Доказательство. Указанные в условии теоремы соотношения гарантируют попадание точки (Y_0,n), где $Y_0 = 1-\mu/\nu$, в область D. Остальное следует из леммы 1 и замечания 4.

Уравнение $r = r(\xi)$ "инвариантных линий тока" $L_\psi(\psi = \text{const})$, согласно соотношениям (3.6), (3.10) и (3.1), здесь приводится к виду

$$r = r_0 X^{-1/\gamma} Y^{1/2} \tag{8.7}$$

где r_0 зависит только от ψ, а функции $X = X(\xi)$, $Y = Y(\xi)$ – периодические с фазовым периодом Φ. Линии L_ψ являются замкнутыми на плоскости полярных координат (r, ξ), т.е. образуют "звездочку" с $|\mu|$ "зубцами". В отличие от изложенного в разд. 7 здесь "звездочка" (8.7) на плоскости (r, θ) вращается с предельной угловой скоростью $d\xi/dt = 1/Y_0$, а частицы газа обегают линию L_ψ и возвращаются в исходное положение за время T. Этот вид движения газа был назван "газовой шестерней", число "зубцов" которой может быть любым целым числом $|\mu| \neq 2$. Любопытно, что при $Y_0 > 1$ движение частиц газа происходит в направлении, противоположном вращению шестерни.

Отметим в заключение, что рамки журнальной статьи не позволили изложить более подробно все полученные результаты, в частности существование неизэнтропической "газовой шестерни". Уместно лишь обратить внимание на принципиальный вопрос о том, что дается ли этими исследованиями исчерпывающее описание всех возможных видов периодических движений газа при отсутствии внешних силовых или энергетических воздействий. Хотя есть некоторые "общие соображения" в пользу положительного ответа, пока этот вопрос остается открытым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00523).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л.В.* Об иерархии инвариантных подмоделей дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 6. С. 740–742.
2. *Овсянников Л.В.* Газовый маятник // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 5. С. 115–119.
3. *Овсянников Л.В.* Плоские течения газа с замкнутыми линиями тока // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 1. С. 51–53.

Новосибирск

Поступила в редакцию
12.III.2001