ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 65. Вып. 4, 2001

УДК 531.01

© 2001 г. В.В. Румянцев

ОБ УРАВНЕНИЯХ РАУСА И ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ

Рассматриваются голономные механические системы с n степенями свободы в переменных Рауса, уравнения движения которых состоят из $k < n$ уравнений типа Лагранжа и $2(n-k)$ уравнений типа Гамильтона. В переменных Рауса даются выражения вариационных принципов Даламбера – Лагранжа, Гамильтона – Остроградского и Гамильтона (третья форма), а также принципа Гёльдера и принципа наименьшего действия в формах Лагранжа и Якоби.

1. Принцип Даламбера – Лагранжа и уравнения Рауса. За основные переменные, характеризующие состояние голономной механической системы с n степенями свободы в некоторый момент времени t, обычно принимаются или переменные Лагранжа – обобщенные координаты и скорости q_i и $\dot q_i = dq_i / dt$ $(i=1,\ldots,n)$, или переменные Гамильтона – обобщенные координаты и импульсы q_i и $p_i = \partial L / \partial \dot q_i$ $(i=1,\ldots,n)$, где $L(t,q,\dot q) = T(t,q,\dot q) + U(t,q)$ – функция Лагранжа, T – кинетическая энергия, U – силовая функция приложенных сил.

Раус [1] предложил принять за основные переменные часть переменных Лагранжа $q_j, \dot q_j$ $(j=1,\ldots,k<n)$ и часть переменных Гамильтона q_s и p_s $(s = k+1, \ldots, n)$.

Пусть кинетическая энергия системы есть определенно положительная квадратичная форма

$$T(q,\dot q) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q_1,\ldots,q_n)\dot q_i \dot q_j \tag{1.1}$$

Тогда

$$p_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si}\dot q_i, \quad s = k+1,\ldots,n \tag{1.2}$$

Поскольку определитель

$$D = \det(\partial^2 L / \partial \dot q_s \partial \dot q_r)_{s,r=k+1}^{n} \neq 0$$

все скорости $\dot q_s$ можно выразить с помощью равенств (1.2) через p_s и $\dot q_j$ и получить [2]

$$\dot q_s = \sum_{r=k+1}^{n} b_{sr} p_r - \sum_{j=1}^{k} \gamma_{sj}\dot q_j, \quad s = k+1,\ldots,n \tag{1.3}$$

где

$$b_{sr} = \frac{A_{rs}}{D}, \quad \gamma_{sj} = \sum_{r=k+1}^{n} b_{sr} a_{rj}; \quad j = 1,\ldots k; \quad s = k+1,\ldots,n$$

A_{rs} – алгебраическое дополнение элемента a_{rs} определителя D. Подстановка выражений (1.3) в соотношение (1.1) приводит к выражению кинетической энергии системы (1.1) в переменных Рауса

$$T^*(q_i,\dot{q}_j,p_s)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}^*\dot{q}_i\dot{q}_j+\frac{1}{2}\sum_{r,s=k+1}^{n}b_{rs}p_rp_s \tag{1.4}$$

не содержащему членов с произведениями $\dot{q}_j$ и p_s, причем

$$a_{ij}^*=a_{ij}-\sum_{r,s=k+1}^{n}b_{rs}a_{rj}a_{si};\quad i,j=1,\ldots,k$$

Обе квадратичные формы в правой части равенства (1.4) определенно положительны.

Функция Рауса определяется соотношением

$$R(t,q_i,\dot{q}_j,p_s)=L(t,q_i,\dot{q}_i)-\sum_{s=k+1}^{n}\dot{q}_sp_s \tag{1.5}$$

в правой части которого все $\dot{q}_s$ выражены через $\dot{q}_j, p_s$, так что

$$R(t,q_i,\dot{q}_j,p_s)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}^*\dot{q}_i\dot{q}_j+\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=k+1}^{n}\gamma_{sj}\dot{q}_jp_s-\frac{1}{2}\sum_{r,s=k+1}^{n}b_{rs}p_rp_s+U=\sum_{s=0}^{2}R_s \tag{1.6}$$

где

$$R_2=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}^*\dot{q}_i\dot{q}_j,\quad R_1=\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=k+1}^{n}\gamma_{sj}\dot{q}_jp_s,\quad R_0=U-\frac{1}{2}\sum_{r,s=k+1}^{n}b_{rs}p_rp_s$$

Сравнивая вариации обеих частей равенства (1.5), получим соотношения

$$\frac{\partial R}{\partial q_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i},\quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j},\quad \frac{\partial R}{\partial p_s}=-\dot{q}_s;\quad i=1,\ldots,n;\quad j=1,\ldots,k;\quad s=k+1,\ldots,n \tag{1.7}$$

при помощи которых общее уравнение динамики запишем в переменных Рауса в виде

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial R}{\partial q_j}-Q_j\right)\delta q_j+\sum_{s=k+1}^{n}\left(\frac{dp_s}{dt}-\frac{\partial R}{\partial q_s}-Q_s\right)\delta q_s=0 \tag{1.8}$$

где $Q_i(t,q_i,\dot{q}_j,p_s)$ $(i=1,\ldots,n)$ – обобщенные непотенциальные силы. Уравнение (1.8) имеет место, каковы бы ни были виртуальные перемещения δq_i, представляющие собой независимые неопределенные величины.

Соотношение (1.8) выражает в переменных Рауса дифференциальный вариационный принцип Даламбера – Лагранжа.

Ввиду произвольности и независимости вариаций δq_i из уравнения (1.8) вместе с последней группой соотношений (1.7) следуют уравнения движения Рауса

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial R}{\partial q_j}=Q_j,\quad j=1,\ldots,k \tag{1.9}$$

$$\frac{dp_s}{dt}=\frac{\partial R}{\partial q_s}+Q_s,\quad \frac{dq_s}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial p_s};\quad s=k+1,\ldots,n \tag{1.10}$$

Уравнения Рауса представляют собой k дифференциальных уравнений второго порядка типа Лагранжа и $2(n-k)$ дифференциальных уравнений первого порядка типа Гамильтона. Разумеется, система уравнений Рауса эквивалентна системам как уравнений Лагранжа, так и уравнений Гамильтона. Какими из этих уравнений пользоваться в конкретных задачах, в общем безразлично, хотя по тем или иным соображениям иногда предпочтительнее воспользоваться определенной системой уравнений.

В случае, когда функция Рауса $R(q_i, \dot{q}_j, p_s)$ не зависит явно от времени, а непотенциальные силы отсутствуют, т.е. $Q_i = 0$ ($i = 1, \ldots, n$), уравнения (1.9) и (1.10) допускают интеграл энергии

$$\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - R = R_2 - R_0 = T^* - U = h = \text{const} \tag{1.11}$$

в чем легко убедиться, либо умножив каждое из уравнений (1.9) на $\dot{q}_j$ и просуммировав результат по всем $j = 1, \ldots, k$ и учтя уравнения (1.10), либо продифференцировав по времени функцию $R(q_i, \dot{q}_j, p_s)$ в силу уравнений (1.10) и учтя уравнения (1.9). Различные выражения интеграла (1.11) получены с учетом формул (1.4), (1.6).

Если функция R не зависит явно от некоторых координат q_r и соответствующие им обобщенные силы $Q_r = 0$, причем выражения остальных обобщенных сил не зависят от q_r, то такие координаты называются циклическими – им отвечают первые интегралы уравнений (1.9) и (1.10)

$$p_r = c_r \tag{1.12}$$

где c_r – произвольные постоянные.

Отметим, что если координаты q_s ($s = k + 1, \ldots, n$) – циклические, то интеграл энергии (1.11) системы можно трактовать так же, как интеграл энергии лагранжевой подсистемы (1.9) с кинетической $R_2(q_j, \dot{q}_j)$ и потенциальной $-R_0(q_j, c_s)$ энергиями, причем входящая в последнюю квадратичная форма

$$\frac{1}{2} \sum_{r,s=k+1}^{n} b_{rs} c_r c_s$$

является кинетической энергией гамильтоновой подсистемы (1.10). Эта трактовка соответствует концепции Герца [3] о кинетическом происхождении потенциальной энергии.

2. Принцип Гамильтона – Остроградского. Третья форма принципа Гамильтона. Перейдем к выводу интегральных вариационных принципов в переменных Рауса. Проинтегрируем по t равенство (1.8) в некоторых постоянных произвольно выбираемых пределах t_0 и t_1.

Интегрируя по частям слагаемые, содержащие производные по времени, и учитывая вторую группу уравнений (1.10), получаем соотношение

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \sum_{s=k+1}^{n} p_s \delta q_s \right)_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial R}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=k+1}^{n} \left(\frac{\partial R}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial R}{\partial p_s} \delta p_s + p_s \delta \dot{q}_s + \dot{q}_s \delta p_s \right) + \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \right] dt = 0$$

приводящее к равенству

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta \left(R + \sum_{s=k+1}^{n} \dot{q}_s p_s \right) + \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \right] dt = 0; \quad \delta q_i = 0 \quad \text{при } t = t_0, t_1; \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

Равенство (2.1) выражает в переменных Рауса интегральный вариационный принцип Гамильтона – Остроградского, представляющий собой необходимое и достаточное условие действительности движения системы, находящейся под действием приложенных к ней сил.

В принципе Гамильтона – Остроградского действительное движение сравнивается с варьированными движениями при одних и тех же конфигурациях системы в начальный и конечный моменты времени.

Покажем, что условие (2.1) приводит к уравнениям Рауса. Однако при этом требуется определенная осторожность, поскольку вариации величин q_j и $\dot{q}_j$ нельзя считать независимыми [4]: если вариации δq_j класса C_2 заданы в каждый момент времени, то вариации $\delta\dot{q}_j$ определяются уравнениями

$$\delta\dot{q}_j = \frac{d}{dt}\delta q_j, \quad j = 1,\ldots,k$$

Будем характеризовать движение системы перемещением изображающей точки в $(2n+1)$-мерном расширенном фазовом пространстве переменных $q_1,\ldots,q_n$, $\omega_1,\ldots,\omega_k$, $p_{k+1},\ldots,p_n,t$. Условие (2.1) означает, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta\left[R(t,q_i,\omega_j,p_s)+\sum_{s=k+1}^{n}\dot{q}_s p_s\right]+\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i\right\}dt = 0;$$

$$\delta q_i = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, t_1; \quad i = 1,\ldots,n$$

в семействе кривых $q_i(t)$, $\omega_j(t)$, $p_s(t)$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$\dot{q}_j = \omega_j, \quad j = 1,\ldots,k \tag{2.2}$$

причем в начальной и конечной точках значения переменных q_i и t фиксированы, а значения ω_j и p_s остаются свободными.

Согласно правилу множителей Лагранжа

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta\left[R(t,q_i,\omega_j,p_s)+\sum_{s=k+1}^{n}\dot{q}_s p_s\right]+\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\dot{q}_j-\omega_j)\right\}dt = 0$$

при произвольных вариациях переменных q_i, ω_j, p_s, причем функции $\lambda_j(t)$ подлежат определению. Варьируя и интегрируя по частям, получаем

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial R}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial R}{\partial\omega_j}\delta\omega_j+\sum_{s=k+1}^{n}\left(\frac{\partial R}{\partial p_s}\delta p_s+\dot{q}_s\delta p_s+p_s\delta\dot{q}_s\right)+\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\delta\dot{q}_j-\delta\omega_j)\right]dt=\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\delta q_j+\sum_{s=k+1}^{n}p_s\delta q_s\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial R}{\partial q_j}-\dot{\lambda}_j+Q_j\right)\delta q_j+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial R}{\partial\omega_j}-\lambda_j\right)\delta\omega_j+\sum_{s=k+1}^{n}\left(\frac{\partial R}{\partial p_s}+\dot{q}_s\right)\delta p_s+\sum_{s=k+1}^{n}\left(\frac{\partial R}{\partial q_s}-\frac{dp_s}{dt}+Q_s\right)\delta q_s\right]dt=0$$

Условия обращения в нуль интеграла (2.1) записываются при учете (2.2) в виде уравнений

$$\frac{d\lambda_j}{dt}=\frac{\partial R}{\partial q_j}+Q_j, \quad \lambda_j=\frac{\partial R}{\partial\dot{q}_j}, \quad \frac{dp_s}{dt}=\frac{\partial R}{\partial q_s}+Q_s, \quad \frac{dq_s}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial q_s}$$

из которых следуют уравнения Рауса (1.9) и (1.10).

В случае отсутствия непотенциальных сил $Q_i = 0$ ($i = 1, \ldots, n$) из соотношения (2.1) получаем третью форму принципа Гамильтона

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(R+\sum_{s=k+1}^{n}\dot{q}_s p_s\right)dt = 0; \quad \delta q_i = 0 \quad \text{при } t = t_0, t_1; \quad i = 1,\ldots,n \tag{2.3}$$

в отличие от первой формы в переменных Лагранжа и второй формы в переменных Гамильтона соответственно

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \quad \text{и} \quad \delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i p_i - H\right)dt = 0; \quad \delta q_i = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, t_1; \quad i = 1,\ldots,n \qquad (2.4)$$

где функция Гамильтона

$$H(t, q_i, p_i) = \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i p_i - L(t, q_i, \dot{q}_i) \qquad (2.5)$$

Для действительного движения по так называемому "прямому" пути, по которому система может двигаться в данном силовом поле, функции $q_i(t)$ ($i = 1, \ldots, n$) и $p_s(t)$ ($s = k + 1, \ldots, n$) удовлетворяет уравнениям Рауса (1.9), (1.10). Все остальные достаточно близкие пути, проходящие через две заданные точки пространства конфигураций, называются "окольными" путями. Выше доказано, что для прямого пути действие по Гамильтону в переменных Рауса

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(R + \sum_{s=k+1}^{n}\dot{q}_s p_s\right)dt$$

имеет стационарное значение по сравнению с окольными путями.

Справедливо и обратное утверждение: если для некоторого пути выполняется равенство (2.3), то этот путь является прямым. В самом деле, как выше показано для соотношения (2.1), аналогично из условия (2.3) следуют уравнения (1.9) и (1.10) при $Q_i = 0$ ($i = 1, \ldots, n$).

Отметим также, что уравнения (1.9), (1.10) при $Q_i = 0$ ($i = 1, \ldots, n$) представляют собой в переменных Рауса уравнения Эйлера вариационной задачи (2.3).

На первый взгляд при учете равенств (2.5) и (1.5) может показаться, что третья форма (2.3) принципа Гамильтона ничем не отличается от первой и второй форм (2.4) этого принципа. Однако это справедливо лишь для таких путей $q_i = q_i(t)$ и $p_i = p_i(t)$, у которых функции $q_i(t)$ и $p_i(t)$ связаны соотношениями $p_i = \partial L/\partial\dot{q}_i$ $(i = 1,\ldots,n)$, но в общем случае это не так [2].

Надо также иметь в виду следующее отличие вариационных задач (2.3) и (2.4). В первой форме принципа рассматриваются кривые $q_i(t)$ ($i = 1, \ldots, n$) в расширенном ($n + 1$)-мерном координатном пространстве, проходящие через две заданные точки $A_0(t_0, q_i^0)$ и $A_1(t_1, q_i^1)$, причем заранее фиксируются начальный t_0 и конечный t_1 моменты времени, а также начальное q_i^0 и конечное q_i^1 положения системы. Во второй и третьей формах принципа в качестве окольных путей допускаются достаточно близкие произвольные кривые ($2n + 1$)-мерного расширенного фазового пространства переменных t, q_i, p_i (во второй форме) или переменных $t, q_i, \dot{q}_j, p_s$ (в третьей форме), проходящие соответственно через точки B_0 и B_1 или через точки C_0 и C_1 в моменты времени t_0 и t_1 при фиксированных начальном и конечном значениях переменных t и q_i и свободных значениях $\dot{q}_j, p_s$. Для таких кривых соотношения $p_i = \partial L/\partial\dot{q}_i$ в общем случае могут не выполняться. Эти три интеграла имеют одинаковые значения для действительного движения в каждом конкретном случае, однако в то время как интеграл первой формы может достигать минимума, интегралы второй и третьей форм для той же задачи могут не иметь ни максимума, ни минимума [4]. Следует также отметить, что в отличие от точек A_0 и A_1 точки B_0 и B_1 или точки C_0 и C_1 не могут быть заданы произвольно, ибо через две произвольные точки расширенного фазового пространства в общем случае прямой путь провести нельзя: точки B_0 и B_1 или C_0 и C_1 выбираются на том прямом пути, для которого формулируется принцип Гамильтона [2].

Таким образом, принцип (2.3), занимая промежуточное положение между формами (2.4), имеет самостоятельное значение из-за предположений о произвольности и независимости вариаций δq_i и δp_s внутри интервала $[t_0, t_1]$.

В случаях, когда координаты q_s ($s = k + 1, \ldots, n$) являются циклическими, существуют первые интегралы вида (1.12) $p_s = c_s$. Если при этом рассматривать лишь вариации, не нарушающие постоянство обобщенных импульсов $p_s = c_s$, то при фиксированных начальном и конечном положениях системы

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=k+1}^{n} \dot{q}_s p_s dt = \sum_{s=k+1}^{n} p_s \delta \int_{t_0}^{t_1} \dot{q}_s dt = 0$$

и принцип Гамильтона (2.3) принимает вид [5, 1]

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} R(t, q_j, \dot{q}_j, c_s) dt = 0; \quad \delta q_j = 0 \text{ при } t = t_0, t_1; \quad j = 1, \ldots, k \tag{2.6}$$

3. Принцип Гёльдера. В принципах (2.1), (2.3) и (2.4) рассматривались синхронные вариации: точке P на прямом пути в момент времени t ставилась в соответствие точка P' на окольном пути, соответствующая тому же самому моменту времени. Это было возможно вследствие того, что движения по прямому и окольным путям совершались за один и тот же промежуток времени $t_1 - t_0$.

Теперь будем рассматривать асинхронное варьирование, когда точке q_i ($i = 1, \ldots, n$) на действительной траектории в момент t ставится точка $q_i + \delta q_i$ на варьированной траектории в момент $t + \delta t$. Вариации δq_i, δt предполагаются функциями времени класса C_2, причем соотношения между декартовыми и обобщенными координатами системы не содержат времени t.

Вычислим интеграл в левой части равенства (2.1). Используя формулу

$$\delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q_i - \dot{q}_i \frac{d}{dt} \delta t, \quad i = 1, \ldots, n$$

и интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta\left(R + \sum_{s=k+1}^{n} \dot{q}_s p_s \right) + \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \right] dt = \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \sum_{s=k+1}^{n} p_s \delta q_s \right)\Bigg|_{t_0}^{t_1} + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial R}{\partial t} \delta t - \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j - \sum_{s=k+1}^{n} \left(\frac{dp_s}{dt} - \frac{\partial R}{\partial q_s} - Q_s \right) \delta q_s + \right. \\ &\left. + \sum_{s=k+1}^{n} \left(\frac{dq_s}{dt} + \frac{\partial R}{\partial p_s} \right) \delta p_s - \left(\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{s=k+1}^{n} \dot{q}_s p_s \right) \frac{d}{dt} \delta t \right] dt \end{aligned} \tag{3.1}$$

Если вариации δq_i ($i = 1, \ldots, n$) представляют собой виртуальные перемещения в каждый момент времени t, причем $\delta q_i = 0$ в моменты t_0 и t_1, то в силу уравнений (1.9), (1.10) получаем равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta\left(R + \sum_{s=k+1}^{n} \dot{q}_s p_s \right) + \left(\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{s=k+1}^{n} \dot{q}_s p_s \right) \frac{d}{dt} \delta t - \frac{\partial R}{\partial t} \delta t + \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \right] dt = 0$$

$$\delta q_i = 0 \text{ при } \quad t = t_0, t_1; \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.2}$$

выражающее в переменных Рауса принцип Гёльдера [4, 6]. Он справедлив при условиях: в каждый момент времени выбираются виртуальные перемещения $\delta q_i \in C_2$ по отношению к действительному движению, обращающиеся в нуль в моменты времени t_0 и t_1, и функция $\delta t \in C_2$, не обязательно равная нулю в моменты t_0 и t_1.

Заметим, что в случае синхронных вариаций, когда $\delta t \equiv 0$, из (3.2) следует принцип Гамильтона – Остроградского (2.1), а также, если и $Q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, – принцип Гамильтона (2.3).

4. Принцип Лагранжа. Будем полагать, что функция Рауса $R(q_i, \dot{q}_j, p_s)$ не зависит явно от времени, а непотенциальные силы Q_i отсутствуют, так что существует интеграл энергии (1.11). Предоставленная самой себе система может выбирать свои движения из движений с данным запасом h полной энергии, что позволяет ограничить множество сравниваемых траекторий условием (1.11) [7].

При условиях $\partial R/\partial t \equiv 0$, $Q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ принцип Гёльдера (3.2) принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta\left(R + \sum_{s=k+1}^{n} \dot{q}_s p_s \right) + \left(\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{s=k+1}^{n} \dot{q}_s p_s \right) \frac{d}{dt} \delta t \right] dt = 0 \tag{4.1}$$

$$\delta q_i = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, t_1; \quad i = 1, \ldots, n$$

Из интеграла (1.11) имеем соотношение

$$R = \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - h$$

Учитывая последнее, представим равенство (4.1) в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta\left(\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{s=k+1}^{n} \dot{q}_s p_s \right) + \left(\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{s=k+1}^{n} \dot{q}_s p_s \right) \frac{d}{dt} \delta t \right] - (t_1 - t_0)\delta h = 0$$

из которого следует в переменных Рауса при $\delta h = 0$ и фиксированных (в q-пространстве) концевых точках принцип наименьшего действия в форме Лагранжа

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{s=k+1}^{n} \dot{q}_s p_s \right) dt = 0; \quad \delta q_i = 0 \quad \text{при } t = t_0, t_1; \quad i = 1, \ldots, n; \quad \delta h = 0 \tag{4.2}$$

Действительное движение консервативной голономной системы между двумя заданными конфигурациями отличается от кинематически возможных движений, совершаемых между теми же конфигурациями и с той же полной энергией h, тем, что для действительного движения полная вариация действия по Лагранжу

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{s=k+1}^{n} \dot{q}_s p_s \right) dt \tag{4.3}$$

имеет стационарное значение.

Отметим, что время перехода системы из одного положения в другое зависит, как это вытекает из интеграла энергии, от пути и им определяется, вследствие чего верхний предел t_1 в интегралах (4.2), (4.3) является переменным, а вариации интегралов (4.2), (4.3) должны быть полными.

При учете соотношений (1.4), (1.6), (1.7) справедливо, очевидно, равенство

$$\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{s=k+1}^{n} \dot{q}_s p_s = 2T^* \tag{4.4}$$

вследствие которого принцип Лагранжа (4.2) представляется также в виде

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T^* dt = 0; \quad \delta q_i = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, t_1; \quad i = 1, \ldots, n; \quad \delta h = 0 \tag{4.5}$$

аналогичном его виду в переменных Лагранжа ($T = T^*$).

Принцип наименьшего действия, как и принцип Гамильтона, выражает необходимое и достаточное условия действительного движения, и из него можно вывести уравнения движения. В самом деле, составляем для условной вариационной задачи (4.5) функцию Лагранжа с множителем λ [7]

$$F = 2T^* + \lambda(T^* - U - h)$$

Условие трансверсальности для скользящего конца на верхнем пределе интеграла

$$F - \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

приводит к равенству $(1 + \lambda)T^* = 0$, из которого находим $\lambda = -1$ и, принимая во внимание соотношение (1.5), получаем функцию

$$F = R + \sum_{s=k+1}^{n} \dot{q}_s p_s + h$$

Следовательно, уравнения Эйлера для вариационной задачи с подынтегральной функцией F принимают в переменных Рауса вид уравнений (1.9), (1.10) при $Q_i = 0$ ($i = 1, \ldots, n$).

В случае, когда координаты q_s ($s = k + 1, \ldots, n$) являются циклическими и существуют первые интегралы вида (1.12) $p_s = c_s$, при вариациях, сохраняющих постоянные значения импульсов p_s, и при фиксированных начальном и конечном положениях системы принцип наименьшего действия в форме Лагранжа принимает вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} dt = 0, \quad R = R(q_j, \dot{q}_j, c_s) \tag{4.6}$$

$$\delta h = 0, \quad \delta q_j = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, t_1; \quad j = 1, \ldots, k$$

5. Принцип Якоби. При помощи интеграла энергии Якоби [8] исключил время из принципа Лагранжа и свел все к пространственным элементам, придав тем самым принципу наименьшего действия геометрический характер.

Интеграл энергии и выражение действия по Лагранжу запишем в виде

$$T = U + h = \sqrt{T(U+h)}, \quad \int_{t_0}^{t_1} 2\sqrt{T(U+h)}dt \tag{5.1}$$

Вследствие существования интеграла энергии вариации переменных t и $q_i, \dot{q}_i$ связаны сложным соотношением [9]. Чтобы обойти это затруднение, выберем новую независимую переменную τ так, чтобы ее значения располагались между постоянными пределами τ_0 и τ_1, не зависящими от времени. В качестве такой переменной можно взять, например, одну из координат q_i, которая в рассматриваемом интервале изменяется монотонно вместе с t [8, 4]. При движении системы q_i ($i = 1, \ldots, n$) будут функциями переменной τ, производные по которой будем обозначать $q_i' = dq_i / d\tau$..

Учитывая равенство (1.1), обозначим [9]

$$2\tilde{T}(q_i, q_i') = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} q_i' q_j'$$

Тогда будем иметь соотношения

$$T=\tilde{T}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2, \quad \tilde{T}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2=U+h; \quad \frac{d\tau}{dt}=\sqrt{\frac{U+h}{\tilde{T}}} \tag{5.2}$$

Подставляя последнее выражение (5.2) в выражение действия (5.1) и учитывая равенство (4.5), получаем в переменных Лагранжа принцип наименьшего действия в форме Якоби

$$\delta\int\limits_{\tau_2}^{\tau_1} 2\sqrt{\tilde{T}(U+h)}d\tau=0; \quad \delta q_i=0 \ \text{ при } \ \tau=\tau_0,\tau_1; \quad i=1,\ldots,n; \quad \delta h=0 \tag{5.3}$$

имеющий геометрический характер [7, 9].

В действительном движении действие по Якоби принимает стационарное значение по сравнению с его значениями для бесконечно близких соседних движений, переводящих систему из того же начального положения в то же конечное положение при соблюдении уравнения (5.1) с тем же значением постоянной h, что и в действительном движении.

Задача определения траектории изображающей точки в q-пространстве сводится тем самым к задаче вариационного исчисления (5.3) с фиксированными концами. Скорость движения изображающей точки вдоль траектории находится из интеграла энергии [7, 9].

В заключение выразим принцип Якоби в переменных Рауса. Сопоставляя принцип (5.3) с первой формой (2.4) принципа Гамильтона, заключаем, что подынтегральное выражение в (5.3) можно принять за новую функцию Лагранжа $\tilde{L}(q_i,q_i')$ с независимой переменной τ вместо времени t и скоростями q_i' [4]. Аналогично функции (1.5) вводим новую функцию Рауса

$$\tilde{R}(q_i,q_j',\tilde{p}_s)=\tilde{L}(q_i,q_i')-\sum_{s=k+1}^{n} q_s'\tilde{p}_s, \quad \tilde{L}(q_i,q_i')=2\sqrt{\tilde{T}(U+h)} \tag{5.4}$$

где импульсы

$$\tilde{p}_s=\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_s'}=\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_s'}\sqrt{\frac{U+h}{\tilde{T}}}, \quad s=k+1,\ldots,n$$

Сравнением вариаций обеих частей равенства (5.5) находим соотношения, аналогичные равенствам (1.7).

В результате получаем выражение принципа Якоби в переменных Рауса

$$\delta\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\left(\tilde{R}(q_i,q_j',\tilde{p}_s)+\sum_{s=k+1}^{n} q_s'\tilde{p}_s\right)d\tau=0; \quad \delta q_i=0 \quad \text{при} \quad \tau=\tau_0,\tau_1; \quad \delta h=0 \tag{5.5}$$

Уравнения экстремалей задачи (5.6) – уравнения Рауса

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\tilde{R}}{\partial q_j'}=\frac{\partial\tilde{R}}{\partial q_j}, \quad \frac{d\tilde{p}_s}{d\tau}=\frac{\partial\tilde{R}}{\partial q_s}, \quad q_s'=-\frac{\partial\tilde{R}}{\partial\tilde{p}_s}; \quad j=1,\ldots,k; \quad s=k+1,\ldots,n \tag{5.6}$$

которые при возвращении к независимой переменной t при помощи последнего соотношения (5.2) приводят к уравнениям Лагранжа и к эквивалентным им уравнениям (1.9), (1.10) при $Q_i=0$ ($i=1,\ldots,n$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00785) и Федеральной целевой программы "Интеграция".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Routh E.J.* Dynamics of a System of Rigid Bodies. L.: MacMillan, 1882. = *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. М.: Наука, 1983. Т. 1. 463 с.; Т. 2, 543 с.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
3. *Hertz H.* Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt. Ges. Werke, B. 3. Leipzig: Barth, 1910. = *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 386 с.
4. *Pars L.A.* A Treatise on Analytical Dynamics. L.: Heinemann, 1965 = *Парс Л.А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
5. *Larmor J.* On the direct application of the principle of least action to the dynamics of solid and fluid systems, and analogous elastic problems // Proc. London. Math. Soc. 1884. V. 15. P. 170–184.
6. *Гёльдер О.* О принципах Гамильтона и Мопертюи. // Вариационные принципы. М.: Физматгиз, 1959. С. 538–563.
7. *Четаев Н.Г.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1987.
8. *Jacobi C.G.J.* Vorlesungen über Dynamik. Berlin: G. Reimer, 1884 = *Якоби К.* Лекции по динамике. Л.; М.: Глав. ред. общетехн. лит. 1936. 270 с.
9. De la *Vallée Poussin*, Ch.-J. Leçons de Mécanique Analytique. Paris: Gauthier–Villars, 1925 = De ла *Валле-Пуссен Ш.-Ж.* Лекции по теоретической механике. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 328 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.I.2001