

УДК 531.36

© 2001 г. Ю.К. Жбанов, В.Ф. Журавлев

К ВОПРОСУ О ТЕОРЕМАХ И.И. МЕТЕЛИЦЫНА

И.И. Метелицыным [1, 2] было опубликовано несколько теорем об устойчивости линейных систем вида

$$A\ddot{q} + (B + G)\dot{q} + (C + \mathcal{E})q = 0 \quad (1)$$

где q – n -мерный вектор обобщенных координат, A – симметрическая и положительно определенная матрица кинетической энергии, B – симметрическая матрица диссипативных сил, G – кососимметрическая матрица гироскопических сил, C – симметрическая матрица потенциальных сил, $\mathcal{E}$ – кососимметрическая матрица собственно-неконсервативных сил.

По отношению к таким системам ставился вопрос, можно ли судить об их устойчивости непосредственно по структуре приложенных сил, минуя вычисление характеристических показателей. Так вопрос впервые был поставлен Томсоном и Тэтом [3], однако вне их внимания остались системы с собственно-неконсервативными силами, определяемыми матрицей $\mathcal{E}$.

Учет этих сил интересен по двум причинам. Во-первых, эти силы очень распространены в природе и в технике, достаточно, например, вспомнить, что такое грозное явление, как флаттер, провоцируется именно такими силами. Во-вторых, при учете таких сил проблема приобретает известную завершенность, поскольку в этом случае линейные системы с постоянными коэффициентами (1) имеют предельно общий вид.

Результаты Метелицына вызвали противоречивые отклики, иногда даже высказывались сомнения в их правильности. Такое положение объясняется двумя обстоятельствами: использование не ставшей употребительной терминологии и своеобразная, часто излишне экономная манера изложения, нуждающаяся в дополнительных разъяснениях позиции автора.

Между тем теоремы Метелицына оказываются весьма полезным инструментом исследования систем на предварительном этапе анализа их устойчивости, из-за чего они находят применение на практике.

Все это побуждает вернуться к обсуждению этих теорем, чтобы понять, в какой мере оправданы возникающие иногда сомнения.

Вначале, следуя Метелицыну, выведем с несколько большими подробностями то основное неравенство, которое и используется в дальнейшем при доказательстве теорем.

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$q = he^{\mu t} \quad (2)$$

что приводит к следующей алгебраической системе:

$$[A\mu^2 + (B + G)\mu + C + \mathcal{E}]h = 0 \quad (3)$$

Определим неявную функцию $\mu(h)$, где $\mu \in \mathbb{C}$, а $h \in \mathbb{C}^n$, следующим образом. Умножим равенство (3) на эрмитово сопряженный вектор h^* , в результате чего получим

$$T\mu^2 + (D + i\Gamma)\mu + V + iE = 0 \quad (4)$$

$$T = h^*Ah, \quad D = h^*Bh, \quad i\Gamma = h^*Gh, \quad V = h^*Ch, \quad iE = h^*\mathcal{E}h$$

Переменные T, D, Γ, V, E являются вещественными функциями h .

Уравнение (4) можно разрешить относительно μ . Имеем

$$\mu = (-D - i\Gamma \pm \sqrt{(D + i\Gamma)^2 - 4T(V + iE)}) / (2T) \quad (5)$$

т.е. получили явную функцию $\mu(h)$, обладающую тем свойством, что если вектор h удовлетворяет системе (3), то μ обращается в соответствующий этому вектору характеристический показатель для одного из знаков перед корнем. Можно также заметить, что функция $\mu(h)$ обладает экстремальными свойствами: ее частные производные по компонентам вектора h обращаются в нуль на решениях системы (3). Однако последнее свойство в дальнейшем не используется.

В любом случае, если накладываем условия на функции $T(h)$, $D(h)$, $\Gamma(h)$, $V(h)$, $E(h)$, так чтобы $\operatorname{Re} \mu < 0$ для любого комплексного вектора h , то этого достаточно, чтобы эта функция принадлежала левой полуплоскости и на собственных векторах системы (3). Другими словами этого достаточно, чтобы все характеристические показатели системы (1) лежали в левой полуплоскости.

Получим это условие. Для этого предварительно выделим вещественную часть стоящего в числителе выражения (5) корня. Имеем

$$\sqrt{(D+i\Gamma)^2 - 4T(V+iE)} = \sqrt{\Delta + i(2D\Gamma - 4TE)} = \sqrt{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt{r} \left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2} \right)$$

$$\Delta = D^2 - \Gamma^2 - 4TV, \quad r^2 = \Delta^2 + (2D\Gamma - 4TE)^2, \quad \cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{r + \Delta}{2r}}$$

Таким образом, вещественная часть характеристического показателя получается такой:

$$\operatorname{Re} \mu = (-D \pm \sqrt{(r + \Delta)/2}) / (2T)$$

В силу положительной определенности квадратичной формы кинетической энергии, условие отрицательности обоих корней уравнения (3) сводится, таким образом, к неравенству

$$-D \pm \sqrt{(r + \Delta)/2} < 0$$

В этом неравенстве можно избавиться от корня, если предположить, что $D \geq 0$. Тогда получим

$$D^2 + \Gamma^2 + 4TV > r \tag{6}$$

Заметим, что условие (6) гарантирует принадлежность левой полуплоскости не только истинного корня характеристического уравнения системы (1), но также и лишнего второго корня уравнения (3). Тем самым получающееся ниже условие устойчивости может быть только достаточным.

Возводя обе части неравенства (6) в квадрат, получаем

$$TE^2 - \Gamma DE < D^2 V \tag{7}$$

Обратим здесь внимание на тот факт, что случай $D = 0$ допустим во всех рассуждениях, базирующихся на неравенстве (7). И это не противоречит предположению Метелицына о том, что квадратичная форма диссипативных сил положительно определенная, поскольку такое предположение представляет собой не свойство системы, а свойство сил, которые могут быть приложены, а могут быть и не приложены. В этом и состоит принадлежащая Томсону и Тэту идея структурных условий устойчивости, в отличие от алгебраических.

Неравенство (7), представляющее собой строгое эффективно проверяемое достаточное условие асимптотической устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами предельно общего вида, и является основным результатом рассматриваемой работы Метелицына. Примеры рассуждений, которые можно делать, опираясь на это неравенство, приведены Метелицыным в форме теорем. Можно привести и другие примеры подобного рода.

Перед тем как анализировать теоремы, заметим, что под устойчивостью в них понимается асимптотическая устойчивость. Об этом прямо сказано уже в первой фразе из соответствующей работы [2]. В тех случаях, когда речь идет о простой устойчивости Метелицын употребляет термины "статическая", или "вековая" устойчивость. Эти термины неупотребительны, но они привязаны к контексту, в котором их смысл ясен и недоразумений не вызывают. Наконец, заметим, что Метелицын считал неравенство (7) *необходимым и достаточным*, поскольку он полагал, что оба корня, представленные формулой (5), принадлежат системе. Однако этот факт им не был доказан.

По этой причине нельзя считать доказанными те теоремы, в которых неравенство (7) рассматривается как необходимое. Это относится к теоремам 1 и 7. В теореме 3 следует убрать

слово "только". Справедливость теорем 2, 3 и 4 легко следует из неравенства (7). При этом надо иметь в виду, что слова типа "может быть сделана устойчивой при добавлении таких-то сил" не следует понимать так, будто устойчивость гарантируется приложением любых таких сил. Утверждается, что необходимые силы указанной структуры найдутся. По этой причине примеры неустойчивости при приложении конкретных таких сил контрпримерами не являются.

Теоремы 5 и 6 не следуют из установленного неравенства. Они вытекают из формулы (5) и допускают очевидное добавление: если ранг матрицы гироскопических сил меньше размерности системы, то кроме указанных в теореме корней появляются корни, стремящиеся к конечным, не равным нулю пределам при стремлении нормы этой матрицы к бесконечности. Сравнение матриц по нормам и может расшифровывать смысл термина "доминирует", который фигурирует в теореме 6.

Подводя итоги, можно заключить, что основным результатом И.И. Метелицына является весьма содержательное неравенство (7). Приведенные теоремы служат иллюстрацией того, как это неравенство можно использовать при анализе устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Метелицын И.И. К вопросу о гироскопической стабилизации // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. № 1. С. 31–34.
2. Метелицын И.И. Избранные труды. М.: Наука, 1977. 131 с.
3. Thomson E.J., Tait P. Treatise on Natural Philosophy. P 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1879. 508 p.

Москва

Поступила в редакцию
14.VII.2000