

УДК 531.36

© 2001 г. Д.Р. Меркин

О МЕТОДЕ И ТЕОРЕМАХ И.И. МЕТЕЛИЦЫНА

До 1920-х гг. в механике рассматривались системы, содержащие потенциальные, диссипативные и гироскопические силы, хотя о существовании неконсервативных позиционных сил было известно давно. В 1928 г. Е.Л. Николаи, по-видимому впервые, установил, что следящая сила, действующая на изогнутый упругий стержень, разлагается на потенциальную и неконсервативно позиционную силы [1]. Это вызвало большой интерес и появилось много работ (число их резко возросло с появлением ракетной техники), в которых рассматривались системы под действием потенциальных, диссипативных и неконсервативных позиционных сил (см., например, [2]).

В 1952 г. И.И. Метелицын [3] рассмотрел в общем виде систему, содержащую все существующие линейные силы, а именно: потенциальные, диссипативные, гироскопические и неконсервативно позиционные. Сокращенное изложение статьи [3] содержится в [4]; без изменения она вошла в книгу [5]. Общая постановка задачи вызвала большой интерес, и в этом состоит основная заслуга И.И. Метелицына.

Для исследования своей системы Метелицын применил метод, известный еще во второй половине XIX столетия [6]. Этот метод применялся для исследования систем, содержащих только потенциальные и диссипативные силы – Метелицын расширил область его применения.

Редакторы книги [5] сделали в самом начале рассматриваемой статьи примечания, в которых пишут, что Метелицын "всюду под устойчивостью подразумевает асимптотическую устойчивость, а под статической неустойчивой системой – такую, для которой потенциальная энергия имеет максимум в положении равновесия" – эти примечания будут далее учтены.

От редакции. В этой статье и следующей за ней статье Ю.К. Жбанова и В.Ф. Журавлева речь идет о следующих теоремах И.И. Метелицына (1952 г.).

Теорема 1. Если консервативная система статически неустойчива, то добавлением собственно-неконсервативных сил (без диссипативных и гироскопических) нельзя сделать систему устойчивой.

Теорема 2. Если консервативная система статически устойчива, то добавление собственно-неконсервативных сил (без диссипативных и гироскопических) может сделать систему неустойчивой.

Теорема 3. Собственно-неконсервативная система ($V \equiv 0$) может быть сделана устойчивой только при условии, что к действующим силам одновременно добавляются гироскопические и диссипативные силы.

Теорема 4. Статически неустойчивая система может быть сделана устойчивой, если к приложенным силам одновременно добавить диссипативные, гироскопические и собственно неконсервативные силы.

Теорема 5. Если условие устойчивости $TE^2 - \Gamma DE < D^2V$ удовлетворено и гироскопические силы доминируют над остальными, то частоты колебаний системы расходятся, т.е. одни из них делаются весьма малыми, а другие весьма большими.

Теорема 6. Если условие устойчивости удовлетворено и гироскопические силы являются доминирующими, то колебаниям с более высокими частотами соответствует более интенсивное затухание по сравнению с затуханием медленных колебаний.

Теорема 7. Если среди корней характеристического уравнения имеются действительные, то устойчивость движения возможна лишь в том случае, когда потенциальная энергия есть определенно-положительная квадратичная форма.

Здесь величина T отвечает кинетической энергии, D – диссипативным, Γ – гироскопическим, V – потенциальным и E – неконсервативным позиционным силам.

В настоящее время существуют различные мнения о работе Метелицына. Его сторонники продолжают публиковать статьи, основанные на работе Метелицына, не вникая в особенности его метода. В связи с этим полезно сделать подробные пояснения к теоремам Метелицына и к использованному им методу.

Метелицын рассматривает систему, движение которой описывается линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{s=1}^n (\alpha_{ks} \ddot{q}_s + \beta_{ks} \dot{q}_s + \gamma_{ks} \dot{q}_s + \delta_{ks} q_s + \epsilon_{ks} q_s) = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (1)$$

Здесь $\alpha_{ks} = \alpha_{sk}$ – коэффициенты инерции, входящие в кинетическую энергию системы, $\beta_{ks} \dot{q}_s$ – диссипативные силы ($\beta_{ks} = \beta_{sk}$), $\gamma_{ks} \dot{q}_s$ – гироскопические силы ($\gamma_{ks} = -\gamma_{sk}$), $\delta_{ks} q_s$ – потенциальные силы ($\delta_{ks} = \delta_{sk}$), $\epsilon_{ks} q_s$ – неконсервативные позиционные силы ($\epsilon_{ks} = -\epsilon_{sk}$). Заметим, что последние силы имеют разные названия (Метелицын называет их *собственно неконсервативными силами*). Здесь сохранены все обозначения работы [5].

Для большей наглядности приведем с помощью линейного ортогонального преобразования уравнения (1) к нормальным координатам, когда при отсутствии всех сил, кроме потенциальных, эти уравнения принимают вид $\ddot{q}_k + \delta_k q_k = 0$. В результате вместо уравнений (1) получим эквивалентные им уравнения (без нарушения общности сохранены прежние обозначения)

$$\sum_{s=1}^n (\ddot{q}_k + \beta_{ks} \dot{q}_s + \gamma_{ks} \dot{q}_s + \delta_k q_k + \epsilon_{ks} q_s) = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (2)$$

Как обычно, Метелицын ищет решение в форме

$$q_s = A_s e^{\mu t} \quad (3)$$

После подстановки получаются уравнения для определения чисел A_s и μ

$$\sum_{s=1}^n [\mu^2 + (\beta_{ks} + \gamma_{ks})\mu + \delta_k + \epsilon_{ks}] A_s = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$\det \|\mu^2 + (\beta_{ks} + \gamma_{ks})\mu + \delta_k + \epsilon_{ks}\| = 0 \quad (5)$$

Далее Метелицын предполагает, что характеристическое уравнение (5) имеет комплексно-сопряженные корни μ и μ' , каждому из которых соответствует своя система комплексно-сопряженных постоянных A_s и A'_s . Затем каждое уравнение (4) умножается на A'_k и после сложения получается квадратное уравнение

$$T\mu^2 + (D + i\Gamma)\mu + V + iE = 0 \quad (6)$$

где величины T , D , Γ , V и E – суммы и разности квадратичных форм, в которых вместо переменных стоят параметры, зависящие в конечном счете от комплексно-сопряженных корней μ и μ' . Число T всегда положительно; при силах сопротивления с полной диссипацией $D > 0$. Величины Γ и E могут иметь любой знак и равняться нулю. Заметим, что Метелицын всегда называет $T, \dots, E$ "величинами". Эти величины по своему построению зависят от коэффициентов уравнения (2), чисел A_s и A'_s и корней μ и μ' . Координаты q и их производные по времени $\dot{q}$ в величины $T, \dots, E$ не входят.

Считая, что силы сопротивления имеют полную диссипацию, Метелицын получил неравенство

$$TE^2 - \Gamma DE < D^2V \quad (7)$$

из условия, что вещественная часть корней уравнения (6) отрицательна. Метелицын называет неравенство (7) "условием устойчивости [асимптотической] неконсервативных систем".

Здесь следует сделать несколько общих замечаний.

1. Учитывая, что каждой паре корней отвечает своя система величин $T, \dots, E$ (об этом пишет сам Метелицын ([5], с. 40)), необходимо потребовать, чтобы для всех пар корней выполнялось неравенство (7); по форме это неравенство одинаково для всех пар корней.

2. Величина $V = \sum \delta_k A_k A'_k$ отвечает потенциальным силам. Если для нескольких, но не для всех корней уравнения (5), величины V будут, например, положительны, то это не означает, что

потенциальная энергия $\Pi = \frac{1}{2} \sum \delta_k q_k^2$ как квадратичная форма координат будет иметь в положении равновесия минимум.

3. Не решив уравнения (5), нельзя определить числа A_s и A'_s и, следовательно, нельзя определить величины $T, \dots, E$, а без них нельзя проверить условие (7). В теоремах 5 и 6 Метелицын считает это условие выполненным. Как его проверить – неизвестно.

4. Метелицын рассматривает не только асимптотическую устойчивость. В теоремах 1 и 2 говорится об устойчивости систем при отсутствии диссипативных сил. В этих условиях возможна только простая устойчивость.

Перейдем к теоремам Метелицына.

Теорема 1. Доказательство Метелицына: "в самом деле, если $D \equiv 0$, $\Gamma \equiv 0$, то условие $TE^2 < 0$ не может быть удовлетворено".

При выводе неравенства (7) Метелицын предполагает, что $D > 0$; здесь он считает, что $D = 0$.

Учтем теперь второе замечание редакторов. Пусть при неустойчивости консервативной системы потенциальная энергия имеет максимум. Тогда в уравнении (5) все $\delta_k < 0$, и при $\beta_{ks} = 0$, $\gamma_{ks} = 0$ коэффициент при μ^{2n-2} будет равен $\sum \delta_k < 0$, что доказывает невозможность стабилизации системы никакими неконсервативно позиционными силами. Таким образом, теорема 1 при сделанной оговорке редакторов становится верной, но ее доказательство не имеет никакого отношения к методу Метелицына и из него не вытекает.

Следует теперь рассмотреть эту теорему с позиций теории устойчивости, согласно которой со времен Лагранжа движение считается неустойчивым, если хотя бы одна координата неограниченно возрастает. Покажем на примере, что в этом случае теорема 1 неверна. Действительно, система, движение которой описывается уравнениями

$$\ddot{q}_1 + 6q_1 + \varepsilon q_2 = 0, \quad \ddot{q}_2 - q_2 - \varepsilon q_1 = 0$$

при $\varepsilon = 0$ является неустойчивой потенциальной системой. Положим теперь $\varepsilon = \sqrt{10}$. Характеристическое уравнение будет иметь чисто мнимые корни: $\pm 2i$ и $\pm i$. Это доказывает, что неустойчивая потенциальная система стабилизирована одними неконсервативными позиционными силами. Достигнутая устойчивость, конечно, простая, так как без диссипативных сил асимптотическая устойчивость неосуществима – факт давно известный.

Теорема 2. Метелицын доказательства не приводит, да оно и не следует из неравенства (7). Это предложение не похоже на теорему, так как формулировка позволяет сделать и противоположное предположение, а именно: *добавление неконсервативно позиционных сил может не нарушить устойчивость потенциальной системы*. Справедливость обоих утверждений легко показать на примерах. Во всяком случае из этой теоремы следует, что Метелицын рассматривал не только асимптотическую устойчивость, так как без диссипативных сил возможна только простая устойчивость.

Теорема 3. Если в этой и следующих трех теоремах принять предположение Метелицына, что справедливо неравенство (7), то в теореме 3 не хватает условия: *определитель собственно неконсервативных сил не должен равняться нулю*. Это дополнение непосредственно следует из уравнения (5), так как в условиях теоремы свободный член этого уравнения равен определителю $\det \|\varepsilon_{ks}\|$. Этот определитель кососимметрический, и следовательно, сразу исключается случай нечетного n ; но и при четном $n \geq 4$ этот определитель может равняться нулю.

Теорема 4. Предполагается, как пишут редакторы книги [5], что потенциальная энергия имеет в положении неустойчивого равновесия максимум. В этих условиях теорема справедлива только при четном n , так как при нечетном n свободный член характеристического уравнения (5) будет отрицателен. Это дополнение у Метелицына отсутствует. Полное доказательство содержится в [7].

Теорема 5. Утверждение, что при доминировании гироскопических сил частоты колебаний расходятся, *верно*, но доказательство ошибочно. Действительно, как следует из доказательства этой теоремы, под гироскопическим доминированием Метелицын понимает случай, когда $\Gamma \gg \{T, D, V, E\}$, но еще до этой теоремы (см. [5], с. 41) в аналогичном случае он пишет, что это условие необходимо, но не достаточно, "...так как Γ может равняться нулю". Следовательно, это условие недостаточно и для доказательства теоремы 5. Кроме того, Метелицын не учел, что частоты определяются из характеристического уравнения (5) и для расхождения частот

необходимо потребовать, чтобы определитель $G = \det\|\gamma_{ks}\|$ не равнялся нулю (см. [7], где также оговорены необходимые и достаточные условия для расхождения частот и имеется указание на более раннюю публикацию).

Теорема 6. Замечания к теореме 5 остаются в силе и к теореме 6.

Теорема 7. Доказательство Метелицына: "действительно, в этом случае $\Gamma = 0$ и $E = 0$, а потому условие (11) [здесь неравенство (7)] приводится к виду $V > 0$ ". Заметим, что Метелицын справедливо показывает ([5], с. 40), что при вещественном корне уравнения (5) величины $\Gamma \equiv 0$ и $E \equiv 0$.

В этой теореме Метелицын забыл, что он все время $T, \dots, E$ называл величинами, зависящими сложным образом от корней μ и μ' , и назвал здесь V квадратичной формой, зависящей от координат. К чему приводит эта забывчивость, продемонстрируем на примере.

Пусть уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + 3,03\dot{q}_1 - q_1 + 2\dot{q}_2 + \sqrt{5}q_2 &= 0 \\ -2\dot{q}_1 - \sqrt{5}q_1 + \ddot{q}_2 + 1,97\dot{q}_2 + q_2 &= 0\end{aligned}$$

На систему действуют все силы, характеристическое уравнение имеет корни (с точностью до одного процента)

$$\mu_1 = -1, \quad \mu_2 = -2, \quad \mu_{3,4} = -1 \pm i$$

Двум вещественным корням отвечают два положительных количества V , но согласно замечанию 2 этого недостаточно, чтобы потенциальная энергия, как функция координат, имела минимум в положении равновесия. Действительно, система асимптотически устойчива, имеет два положительных количества V , а ее потенциальная энергия, равная $\Pi = (q_1^2 - q_2^2)/2$, противоречит теореме 7.

Вернемся к неравенству (7). Метелицын пишет, что это неравенство "...выражает условие устойчивости [асимптотической] неконсервативных систем".

Все величины, входящие в неравенство (7), можно определить только после того, как будут найдены корни характеристического уравнения исходных дифференциальных уравнений, причем для каждого корня должно существовать свое неравенство (7).

Для простоты возьмем систему двух уравнений, содержащих все силы,

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + \beta_1\dot{q}_1 + \delta_1q_1 + \gamma\dot{q}_2 + \varepsilon q_2 &= 0 \\ -(\gamma\dot{q}_1 + \varepsilon q_1) + \ddot{q}_2 + \beta_2\dot{q}_2 + \delta_2q_2 &= 0\end{aligned}\tag{8}$$

Полагая как обычно $q_s = A_s e^{\mu t}$, после подстановки и сокращения на $e^{\mu t}$ получим

$$\begin{aligned}(\mu^2 + \beta_1\mu + \delta_1)A_1 + (\gamma\mu + \varepsilon)A_2 &= 0 \\ -(\gamma\mu + \varepsilon)A_1 + (\mu^2 + \beta_2\mu + \delta_2)A_2 &= 0\end{aligned}\tag{9}$$

Следуя Метелицыну, положим

$$A_s = M_s + N_s i, \quad s = 1, 2\tag{10}$$

Внесем эти равенства в систему (9), затем умножим первое уравнение на $M_1 - N_1 i$, а второе на $M_2 - N_2 i$. Сложив полученные выражения, получим уравнение (6), в котором

$$\begin{aligned}T &= \sum (M_k^2 + N_k^2), \quad D = \sum \beta_k (M_k^2 + N_k^2), \quad V = \sum \delta_k (M_k^2 + N_k^2) \\ \Gamma &= 2\gamma (M_1 N_2 - M_2 N_1), \quad E = 2\varepsilon (M_1 N_2 - M_2 N_1)\end{aligned}\tag{11}$$

Равенства (10), (11) отвечают равенствам (6), (8) в статье Метелицына [5] при $n = 2$.

Если составить характеристическое уравнение для системы (8)

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} \mu^2 + \beta_1\mu + \delta_1 & \gamma\mu + \varepsilon \\ -(\gamma\mu + \varepsilon) & \mu^2 + \beta_2\mu + \delta_2 \end{vmatrix} = 0$$

то постоянные A_s будут равны алгебраическим дополнениям Δ_{1s} определителя $\Delta(\mu)$ (см. [8]).

В данном случае

$$A_1 = \mu^2 + \beta_2 \mu + \delta_2, \quad A_2 = \gamma \mu + \varepsilon$$

Полагая $\mu = \alpha + \omega i$ и учитывая равенства (10), получим

$$M_1 = \alpha^2 - \omega^2 + \beta_2 \alpha + \delta_2, \quad N_1 = \omega(2\alpha + \beta_2), \quad M_2 = \gamma \alpha + \varepsilon, \quad N_2 = \omega \gamma \quad (12)$$

Рассмотрим один пример. Система (8) при

$$\beta_1 = 6 - \beta_2 = 5.8185891, \quad \delta_1 = \delta_2 = -1/2, \quad \gamma = 11/3, \quad \varepsilon = 9/4 \quad (13)$$

содержит все силы, имеет полную диссипацию и асимптотически устойчива – корни характеристического уравнения таковы:

$$\mu_{1,2} = -1 \pm 0.5i, \quad \mu_{3,4} = -2 \pm 0.5i$$

(Все вычисления велись с точностью до восьми значащих цифр, при округлении конечного результата.)

Рассмотрим первые два корня $\mu_{1,2}$, для которых

$$\alpha = -1, \quad \omega = \pm 0.5 \quad (14)$$

Пользуясь равенствами (12) и (13), найдем M_1, N_1, M_2, N_2 , а затем по формулам (11) получим

$$T = 6.2000, \quad D = 5.8121, \quad V = -3.1000, \quad \Gamma = \mp 8.5244, \quad E = \mp 5.2309$$

(верхние знаки отвечают верхнему знаку ω в (14), нижние – нижнему).

Теперь после элементарных вычислений неравенство (7) принимает вид

$$169.6 - 259.2 < -104.7$$

что для корней $\mu_{1,2}$ противоречит утверждению Метелицына.

Повторяя все преобразования для корней $\mu_{3,4}$, получим неравенство

$$16237 - 48194 < -115860$$

которое тоже противоречит утверждению Метелицына.

Рассмотренный пример (конечно, он не единственный) показывает, что Метелицын ошибся – неравенство (7) не может служить критерием асимптотической устойчивости системы исходных дифференциальных уравнений (1). Это неравенство служит условием отрицательности вещественных частей корней квадратного уравнения (6). То обстоятельство, что коэффициенты этого уравнения получены из корней уравнения (5), ничего не доказывает, так как последние предполагались *только* комплексно-сопряженными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаи Е.Л. Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня // Изв. ЛПИ. 1928. Т. 31. С. 3–34.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. Метелицын И.И. Некоторые теоремы об устойчивости движения неконсервативных систем // Тр. Воен. акад. бронетанковых войск, 1952. №№ 11–12.
4. Метелицын И.И. К вопросу гироскопической стабилизации // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. № 1. С. 31–34.
5. Метелицын И.И. Избранные труды. М.: Наука, 1977. 131 с.
6. Thomson E.J., Tait P. Treatise on Natural Philosophy. P1, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1879. 508 p.
7. Меркин Д.Р. Гироскопические системы. М.: Гостехиздат, 1956. 299 с.; 2-е изд.: М.: Наука, 1974. 344 с.
8. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. 176 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
30.III.2000