

УДК 539.375

© 2001 г. Н.Д. Вайсфельд, Г.Я. Попов

**О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ
ВОЗЛЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНЫ
ПРИ УДАРНОМ ЗАГРУЖЕНИИ УПРУГОЙ СРЕДЫ
ЦЕНТРОМ ВРАЩЕНИЯ**

На основе метода разрывных решений решается задача о концентрации упругих напряжений в неограниченной упругой среде, содержащей полубесконечную цилиндрическую трещину. Предлагаемый способ позволяет свести задачу к одномерному интегродифференциальному уравнению относительно неизвестного скачка перемещений в пространстве трансформант Лапласа. Решение полученного уравнения основано на совместном использовании ортогональных функций и дискретизации уравнения по времени, что приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. В результате построено возмущенное трещиной волновое поле и получена формула для вычисления коэффициента интенсивности напряжений. Проведен численный анализ волнового поля, и построен график коэффициента интенсивности напряжений в зависимости от времени.

Расширяется диапазон приложения полученного ранее [1] спектрального соотношения для многочленов Чебышева–Лагерра к нестационарным задачам механики разрушения. Был дан пример приложения указанного соотношения к построению точного решения для одной из таких задач, и показана эффективность его использования для построения приближенного асимптотического решения и для более сложных задач механики разрушения [1]. Однако предложенный способ [1] годится только для тех задач механики разрушения, в которых разрешающее интегродифференциальное уравнение, записанное в трансформантах Лапласа, содержит заданную правую часть, разложимую по обратным степеням параметра преобразования Лапласа. Но во многих задачах последнее не имеет места. Задачей именно такого типа является определение коэффициента интенсивности напряжений у края полубесконечной трещины в неограниченной упругой среде, нагруженной в начале координат ударным центром вращения.

Решение этой задачи потребовало существенной модификации метода работы [1], которая и излагается ниже. Предлагался иной метод решения нестационарных задач механики [2, 3]. Используя метод [4], предложенный применительно к родственной статической задаче, можно было бы получить для трансформант Лапласа искомым функций точное решение в виде квадратур, содержащих бесконечные произведения. Однако численная реализация такого решения даже на этом этапе представляет собой далеко не простую проблему; она во много раз усложняется, если попытаться перейти от трансформант Лапласа к оригиналам.

1. Постановка задачи и сведение ее к одномерному интегродифференциальному уравнению. Неограниченная упругая среда ($0 < r < \infty$, $-\pi < \varphi < \pi$, $-\infty < z < \infty$) с модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона μ , содержащая полубесконечную трещину, поверхность которой описывается соотношениями

$$r = R, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad a < z < \infty \quad (1.1)$$

подвергается ударному воздействию центра вращения в начале координат с моментом $M(t) = MH(t)$, где $H(t)$ – единичная функция Хевисайда. Берега трещины $r = R - 0$ и

$r = R + 0$ считаются свободными от напряжений

$$\tau_{r\varphi}(R \pm 0, z, t) \equiv \tau_{\varphi}(R \pm 0, z, t) = 0 \quad (1.2)$$

Требуется определить напряженное состояние и волновые поля при нулевых начальных условиях.

Перемещение $u_{\varphi}(r, z, t) \equiv u(r, z, t)$ удовлетворяет уравнению [5]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c^2 = \frac{G}{\rho} \quad (1.3)$$

а напряжение $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi}$ выражается формулой

$$\tau_{\varphi}(r, z, t) = G[u'(r, z, t) - r^{-1}u(r, z, t)] \quad (1.4)$$

Здесь и ниже штрих означает производную по переменной r .

Поле перемещений и напряжений представляется в виде

$$u = u^0 + u^1, \quad \tau_{\varphi} = \tau_{\varphi}^0 + \tau_{\varphi}^1 \quad (1.5)$$

где u^0, τ^0 – перемещения и напряжения, вызванные центром вращения при отсутствии трещины в упругой среде, а u^1, τ^1 – искомые возмущенные поля перемещений и напряжений, вызванные наличием трещины (1.1). При учете представления (1.5) условие на трещине (1.2) запишем в виде

$$\tau_{\varphi}^1(R \mp 0, z, t) = -\tau_{\varphi}^0(R, z, t) \quad (1.6)$$

Возмущенное поле u^1 строится в виде разрывного решения уравнения (1.3) для дефекта (1.1) [6]. Для его построения к (1.3) последовательно применяются интегральное преобразование Лапласа и Фурье по классической схеме

$$u_p^1(r, z) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u^1(r, z, t) dt, \quad u_{p\lambda}^1(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} u_p^1(r, z) dz$$

а затем интегральное преобразование Ганкеля по r

$$u_{p\lambda\alpha}^1 = \int_0^{\infty} r J_1(\alpha r) u_{p\lambda}^1(r) dr$$

по обобщенной схеме [6].

После обращения преобразований Ганкеля и Фурье трансформанта Лапласа искомого разрывного решения получена в виде

$$\begin{aligned} u_p^1(r, z) = & \int_a^{\infty} \langle u_p^1(R, \zeta) \rangle \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(z-\zeta)} G_{p\lambda}(r, R) d\lambda d\zeta - \\ & - \int_a^{\infty} \langle u_p^1(R, \zeta) \rangle \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(z-\zeta)} \frac{\partial}{\partial R} G_{p\lambda}(r, R) d\lambda d\zeta \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \langle u_p^1(R, \zeta) \rangle &= u_p^1(R-0, \zeta) - u_p^1(R+0, \zeta) \\ \langle u_p^{1'}(R, \zeta) \rangle &= u_p^{1'}(R-0, \zeta) - u_p^{1'}(R+0, \zeta) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$G_{p\lambda}(r, R) = \begin{cases} I_1(r\sqrt{\lambda^2 + p^2}) K_1(R\sqrt{\lambda^2 + p^2}), & r < R \\ I_1(R\sqrt{\lambda^2 + p^2}) K_1(r\sqrt{\lambda^2 + p^2}), & r > R \end{cases}$$

Содержащийся в (1.7) скачок производной искомой функции можно исключить, используя (1.4) и (1.6). В результате будем иметь

$$\langle u_p'(R, z) \rangle = \langle u_p^1(R, z) \rangle \quad (1.9)$$

Использование этого равенства не только позволяет исключить скачок производной искомой функции, но и дает возможность ограничиться удовлетворением условию (1.6) только на одном из берегов трещины, например при $R = 0$. В итоге приходим к интегродифференциальному уравнению

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} + p^2 \right) \int_a^\infty X_p(\zeta) k_p(z - \zeta) d\zeta = -\tau_{p\Phi}^0(R, z), \quad 0 \leq z < \infty \quad (1.10)$$

Здесь

$$X_p(\zeta) = \langle u_p^1(R, \zeta) \rangle$$

$$k_p(z - \zeta) = \int_a^\infty \cos \lambda(z - \zeta) I_2(\sqrt{\lambda^2 + p^2}) K_2(\sqrt{\lambda^2 + p^2}) d\lambda \quad (1.11)$$

$$\tau_{p\Phi}^0 = \frac{Mz}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \exp(-pc(\sqrt{r^2 + z^2} - R)) \frac{(\sqrt{r^2 + z^2} p^2 c^2 - pc + 3)}{p(p - p_1)(p - p_2)}$$

$$u_p^0 = \frac{Mz}{2(r^2 + z^2)^{3/2}} \exp(-pc(\sqrt{r^2 + z^2} - R)) \frac{(\sqrt{r^2 + z^2} pc - 3)}{p(p - p_1)(p - p_2)}$$

где $p_1 = (\sqrt{3}/2)(i - \sqrt{3})c$, $p_2 = -(\sqrt{3}/2)(i + \sqrt{3})c$. Выражения для $\tau_{p\Phi}^0, u_p^0$ получены ранее [7].

2. Метод решения полученного интегродифференциального уравнения. Осуществим в (1.10) замену переменных

$$z = a + xR, \quad \xi = a + \eta R$$

Для выделения нерегулярной части ядра поступаем так. Разбиваем интервал интегрирования на два участка: $(0, \infty) = (0, A) + (A, \infty)$, где A — достаточно большое положительное число, и на втором участке вместо произведения цилиндрических функций берем главный член их асимптотического представления для больших значений аргумента. Последующее использование формулы 7.12(27) из [4] интегрального представления для функции Макдональда $K_0(x)$ позволило получить нужное представление

$$k_p(x - \eta) = K_0(pR(x - \eta)) + R_p(R(x - \eta)) \quad (2.1)$$

где регулярная часть ядра имеет вид

$$R_p(R(x - \eta)) = \int_0^A \cos \lambda R(z - \eta) \left[I_2(\sqrt{\lambda^2 + p^2}) K_2(\sqrt{\lambda^2 + p^2}) - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + p^2}} \right] d\lambda \quad (2.2)$$

Тогда уравнение (1.10) примет вид

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + p^2 \right) \int_0^\infty X_p(a + \eta R) (K_0(pR(x - \eta)) + R_p(R(x - \eta))) d\eta = -\tau_{p\Phi}^0(R, a + xR) \quad (2.3)$$

Считая временно параметр p положительным, делаем в (2.3) замену

$$pxR = \xi, \quad pR\eta = \sigma \quad (2.4)$$

В результате приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{d^2}{d\xi^2}\right) \int_0^\infty pX_p(a + \sigma p^{-1}) \left(K_0(|\xi - \sigma|) + R_p(|\xi - \sigma|p^{-1})\right) d\sigma = \\ & = -\tau_{p\varphi}^0(R, a + \xi p^{-1}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

С целью применить к уравнению (2.5) теорему о свертке для интегрального преобразования Лапласа вводится функция

$$\Phi(\sigma, t) = L^{-1}(pX_p(a + \sigma p^{-1})) \quad (2.6)$$

(L^{-1} – оператор обратного преобразования Лапласа). Тогда

$$L^{-1}[pX_p(a + \sigma p^{-1})K_0(|\xi - \sigma|)] = \Phi(\sigma, t)K_0(|\xi - \sigma|) \quad (2.7)$$

и далее после применения теоремы о свертке имеем

$$\begin{aligned} & L^{-1}[pX_p(a + \sigma p^{-1})R_p(|\xi - \sigma|p^{-1})] = \\ & = L^{-1}[p^2X_p(a + \sigma p^{-1})R_p(|\xi - \sigma|p^{-1})p^{-1}] = \\ & = \int_0^t \frac{\partial \Phi(\sigma, \tau)}{\partial \tau} Z(|\xi - \sigma|, t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi(\sigma, \tau)}{\partial \tau} = L^{-1}[p^2X_p(a + \sigma p^{-1})] \\ & Z(|\xi - \sigma|, t - \tau) = L^{-1}[R_p(|\xi - \sigma|p^{-1})p^{-1}] = \\ & = \int_0^A L^{-1} \left[\cos(\lambda|\xi - \sigma|p^{-1})p^{-1} \left(I_2(\sqrt{\lambda^2 + p^2})K_2(\sqrt{\lambda^2 + p^2}) - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + p^2}} \right) \right] d\lambda \end{aligned} \quad (2.9)$$

Во втором соотношении (2.9) вторично применяется теорема о свертке при учете того, что оригиналы находятся по формулам 5.8(2), 5.1(5), 5.3(35) из [9]

$$\begin{aligned} & L^{-1}(\cos(\lambda|\xi - \sigma|p^{-1})p^{-1}) = \text{ber}(2\sqrt{\lambda|\xi - \sigma|\sqrt{t}}) \\ & L^{-1}(I_2(\sqrt{\lambda^2 + p^2})K_2(\sqrt{\lambda^2 + p^2})) = \\ & = L^{-1} \left(\int_0^{\pi/2} K_0(2\sqrt{\lambda^2 + p^2} \cos x) \cos 2x dx \right) = \\ & = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sqrt{t^2 - \cos^2 x}} - \lambda \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t^2 - \cos^2 x - u^2}} J_1(\lambda u) du \right) \cos 2x dx = Q(\lambda, t) \\ & L^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + p^2}} \right) = J_0(\lambda t) \end{aligned}$$

В итоге вместо второго соотношения (2.9) имеем

$$Z(|\xi - \sigma|, t) = \int_0^A \int_0^t \text{ber} \left(2\sqrt{\lambda|\xi - \sigma|} \sqrt{t} \right) (Q(\lambda, t - \tau) - J_0(\lambda(t - \tau))) d\lambda d\tau \quad (2.10)$$

Далее в (2.8) выполняется интегрирование по частям, после чего при учете соотношений (2.7) и (2.8) уравнение (2.5) в пространстве оригиналов запишем в виде

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{d^2}{d\xi^2} \right) \int_0^\infty \Phi(\sigma, t) K_0(|\xi - \sigma|) d\sigma + \\ & + \left(1 - \frac{d^2}{d\xi^2} \right) \int_0^\infty \int_0^t \Phi(\sigma, \tau) L(|\xi - \sigma|, t - \tau) d\tau d\sigma = -\tau_\Phi^0(\xi, t); \quad a \leq \xi < \infty, \quad 0 \leq t < \infty \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$L(|\xi - \sigma|, t - \tau) = \frac{\partial Z(|\xi - \sigma|, t - \tau)}{\partial \tau}$$

Приближенное решение интегродифференциального уравнения (2.11) строится с помощью комбинации метода ортогональных многочленов [6] и дискретизации уравнения по времени. Последнее означает, что промежуток времени $[0, T]$, на протяжении которого исследуется напряженное состояние упругой среды, разбивается на интервалы $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ с шагом $h = T/N$; $\tau_k = kT/N$ ($k = 1, 2, \dots, N$), а интеграл по переменной τ заменяется квадратурной формулой Симпсона

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{d^2}{d\xi^2} \right) \int_0^\infty \Phi_n(\sigma) K_0(|\xi - \sigma|) d\sigma + \\ & + \left(1 - \frac{d^2}{d\xi^2} \right) \sum_{k=1}^N A_k \int_0^\infty \Phi_k(\sigma) L(|\xi - \sigma|, t_n - \tau_k) d\sigma = -\tau_{n\Phi}^0(\xi), \quad n = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь $\Phi_k(\sigma) = \Phi(\sigma, \tau_k)$, A_k – коэффициенты квадратурной формулы Симпсона.

Для построения приближенного решения системы уравнений (2.12) можно применить метод ортогональных многочленов. При этом следует использовать спектральное соотношение [1]

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{d^2}{d\xi^2} \right) \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\sigma} \sqrt{\sigma} L_n^{1/2}(2\sigma) K_0(|\xi - \sigma|) d\sigma = \frac{\sqrt{2}}{n!} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) e^{-\xi} L_n^{1/2}(2\xi) \\ & 0 \leq \xi \leq \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

где $L_n^{1/2}(z)$ – многочлены Чебышева–Лагерра. Согласно процедуре этого метода, решение системы уравнений (2.12) строим в виде

$$\Phi_n(\sigma) = \sum_{l=0}^\infty \sqrt{\sigma} e^{-\sigma} L_l^{1/2}(2\sigma) \Phi_l^{(n)} \quad (2.13)$$

после чего система (2.12) сводится к последовательности ($n = 1, 2, \dots, N$) бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$Y_l \Phi_l^{(n)} - \sum_{k=1}^N A_k \sum_{m=0}^\infty \Phi_m^{(k)} B_{kml} = F_l^{(n)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.14)$$

где

$$Y_l = \frac{\Gamma(3/2 + l)}{l!}, \quad B_{kml} = \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{\xi} e^{-\xi} L_l^{1/2}(2\xi) \sqrt{\sigma} e^{-\sigma} L_m^{1/2}(2\sigma) L_k(|\xi - \sigma|) d\sigma d\xi$$

$$F_l^{(n)} = - \int_0^\infty \sqrt{\xi} e^{-\xi} L_l^{1/2}(2\xi) \tau_{n\Phi}^0(\xi) d\xi$$

Таким образом, для определения $\Phi_l^{(1)}$ получаем систему

$$Y_l \Phi_l^{(1)} - \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m^{(1)} B_{ml} = F_l^1, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Используя найденные из системы (2.15) значения $\Phi_l^{(1)}$, последующие значения $\Phi_l^{(2)}, \Phi_l^{(3)}, \dots$ определяем из рекуррентного соотношения

$$Y_l \Phi_l^{(j)} - \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m^{(j)} B_{ml} = F_l^{(j)} - \sum_{k=1}^{j-1} A_k \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m^{(k)} B_{km}, \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 2, 3, \dots, N$$

Таким образом, для конкретного значения $\Phi_l^{(i)} = \Phi_l$ ($l = 0, 1, \dots$) получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений вида (2.15). Для доказательства сходимости каждой такой системы и правомочности применения метода редукции надо доказать сходимость рядов

$$Q_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |B_{ml}|^2, \quad Q_2 = \sum_{l=0}^{\infty} |f_l^{1/2}|^2; \quad f_l^{1/2} = \int_0^{\infty} \tau^l(\xi) e^{-\xi} \sqrt{\xi} L_l^{1/2}(\xi) d\xi$$

Для доказательства понадобится формула 1.14.3(8) из [10]

$$\int_0^x t^\alpha e^{-t} L_n^\alpha(t) dt = \frac{1}{n} x^{\alpha+1} e^{-x} L_{n-1}^{\alpha+1}(x)$$

Введем обозначение

$$h_n^{1/2} = \int_0^{\infty} h(x) \sqrt{x} e^{-x} L_n^{1/2}(x) dx$$

Интегрируя в этом соотношении по частям, получим

$$h_n^{1/2} = -\frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{\partial h(x)}{\partial x} x^{3/2} e^{-x} L_{n-1}^{3/2}(x) dx = -h_{n-1}^{3/2} (n)^{-1} \quad (2.16)$$

Докажем сходимость ряда Q_2 . Учитывая формулу (2.16), имеем

$$f_l^{1/2} = -\frac{1}{l} \int_0^{\infty} f'(\xi) \xi^{3/2} e^{-\xi} L_{l-1}^{3/2}(\xi) d\xi = -\frac{1}{l} f_{l-1}^{3/2}$$

Тогда равенство Парсеваля для ряда будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k^{3/2}|^2 (N^{3/2})^{-1} = \int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} |F'(x)|^2 dx$$

Интеграл справа существует и конечен в силу формул (1.11), определяющих функцию $F(x)$. Значит, сходится и ряд в левой части.

Для доказательства сходимости ряда Q_1 представим его в виде двух рядов:

$$Q_1 = Q_1^0 + Q_1^1, \quad Q_1^0 = \sum_{l=0}^{\infty} |B_{0l}|^2, \quad Q_1^1 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |B_{jl}|^2$$

где

$$B_{0l} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{ber}(c\sqrt{|\xi-\sigma|}) \sqrt{\xi} e^{-\xi} L_l^{1/2}(\xi) \sqrt{\sigma} e^{-\sigma} d\sigma d\xi = \int_0^{\infty} \sqrt{\sigma} e^{-\sigma} g_l^{1/2}(\sigma) d\sigma$$

$$g_l^{1/2}(\sigma) = \int_0^{\infty} \text{ber}(c\sqrt{|\xi-\sigma|}) \sqrt{\xi} e^{-\xi} L_l^{1/2}(\xi) d\xi = -\frac{1}{l} g_{l-1}^{3/2}(\sigma)$$

(учтено соотношение (2.16)). Тогда равенство Парсеваля будет иметь вид

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left| \frac{\partial \operatorname{ber}(c\sqrt{|\xi - \sigma|})}{\partial \xi} \right|^2 \xi^{3/2} e^{-\xi} L_{l-1}^{3/2}(\xi) d\xi d\sigma = \sum_{l=0}^\infty (N_l)^{-1} \int_0^\infty |g_l^{3/2}(\sigma)|^2 d\sigma$$

$$N_l = \Gamma\left(\frac{5}{2} + l\right) [l!(5+l)]^{-1}$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, получаем оценку

$$|B_{0l}|^2 \leq \frac{1}{4l^2} \int_0^\infty |g_l^{3/2}(\sigma)|^2 d\sigma$$

Таким образом, ряд Q_1^0 сходится. Для доказательства сходимости ряда Q_1^1 используем тот факт, что, согласно формуле (2.16), $d_{jl} = d_{j-1,l}/(2lj)$, и положим $j = k + 1$ в выражении для ряда Q_1^1 .

3. Возмущенное трещиной волновое поле. Трансформанта Лапласа смещения, согласно соотношениям (1.7), (1.8) и обозначениям (1.11), имеет вид

$$u_p^1(r, z) = \int_0^\infty X_p(a + \eta R) \int_0^\infty \cos \lambda(z - \eta) \left[G_{p\lambda}(r, R) - \frac{\partial}{\partial R} G_{p\lambda}(r, R) \right] d\lambda d\eta \quad (3.1)$$

$$|z| < \infty, \quad 0 \leq r < \infty$$

Прежде чем перейти к оригиналу, в соотношении (3.1) делается замена (2.4), а затем (с целью получить функцию (2.6) перед применением теоремы о свертке) подынтегральное выражение умножается и делится на p . В результате искомое волновое поле приобретает вид

$$u^1(r, z, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(\sigma, t) L^{-1} \left(\cos \lambda(z - \sigma p^{-1} R) p^{-2} \left(G_{p\lambda}(r, R) - \frac{\partial}{\partial R} G_{p\lambda}(r, R) \right) \right) d\lambda d\tau \quad (3.2)$$

Для вычисления оригиналов в (3.2) используются табличные значения 5.8(8) из [3]

$$\begin{aligned} L^{-1}(\cos \lambda(z - \sigma p^{-1} R) p^{-2}) &= \cos \left(\lambda z - \frac{3\pi}{4} \right) \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda \sigma} \right)^{-1} \sqrt{t} \operatorname{ber}_1(\sqrt{\lambda \sigma} \sqrt{t}) + \\ &+ \sin \left(\lambda z - \frac{3\pi}{4} \right) \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda \sigma} \right)^{-1} \sqrt{t} \operatorname{ber}_1(\sqrt{\lambda \sigma} \sqrt{t}) \equiv X_1(z, \lambda, t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$L^{-1}(G_{p\lambda}(r, R)) =$$

$$= \int_0^\infty \alpha J_1(\alpha R) J_1(\alpha r) 2\pi (\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2})^{-1/2} \sqrt{t} J_{1/2}(\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2} t) d\alpha \equiv X_2(r, R, \lambda, t)$$

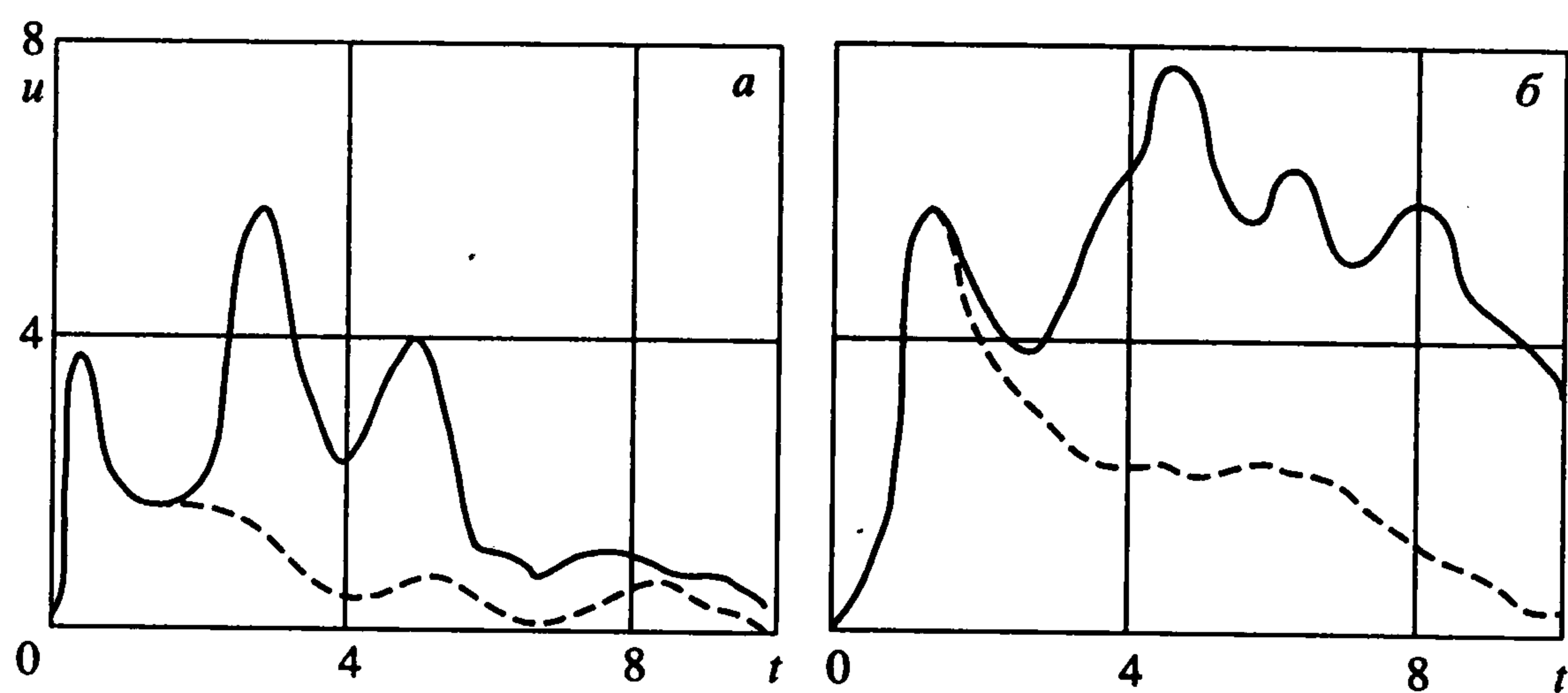
Учитывая, что $J_{1/2}(x) = (2/(\pi x))^{1/2} \sin x$, и используя интегральное представление для функций Бесселя ([8], формула 7.14.2(61))

$$2\pi J_1(\alpha R) J_1(\alpha r) = - \int_{-\pi}^\pi e^{i\theta} \frac{r - R e^{-i\theta}}{r - R e^{i\theta}} J_2(\alpha \omega) d\theta, \quad \omega = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}$$

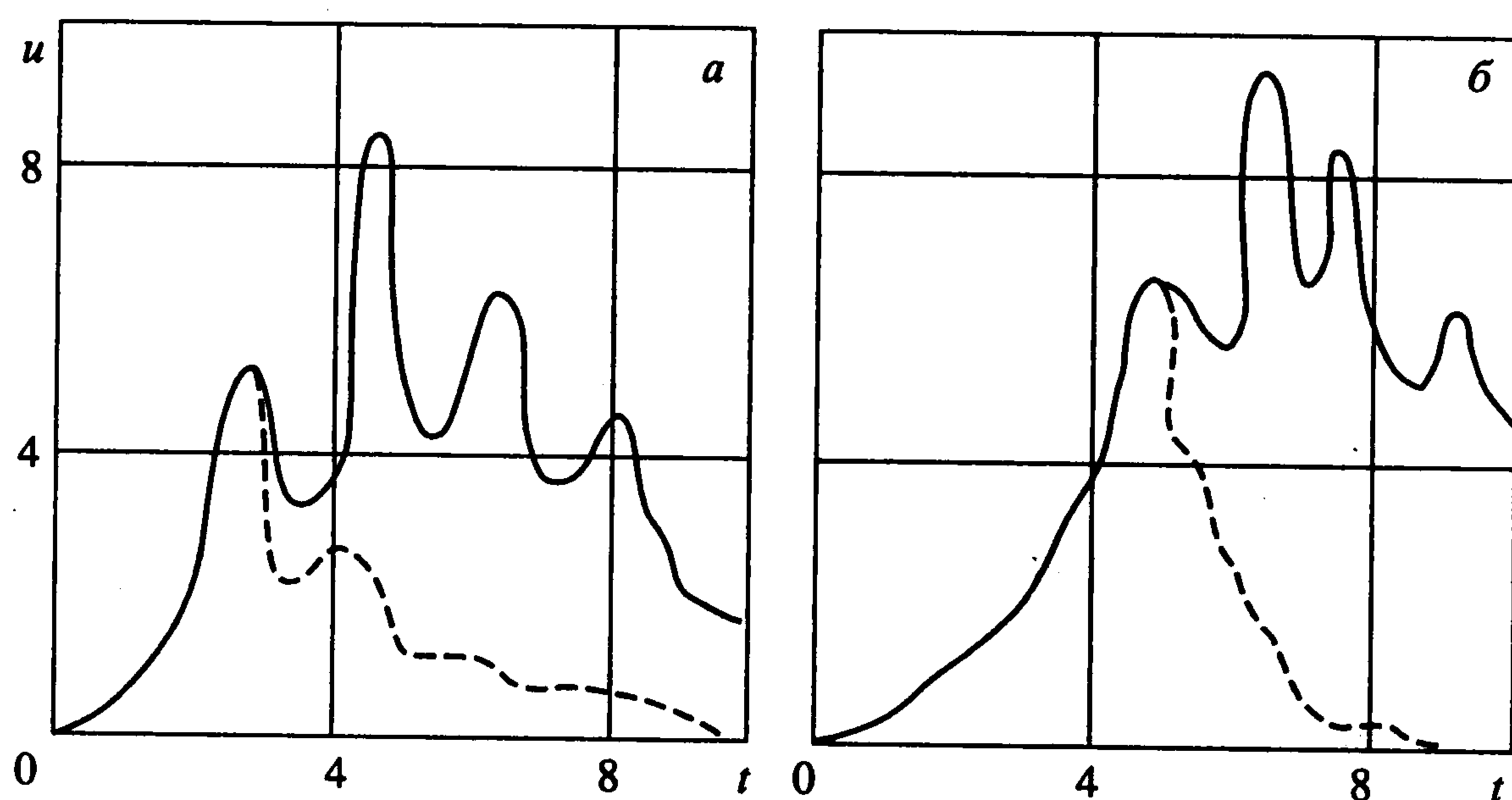
получим

$$X_2(r, R, \lambda, t) = L^{-1}(G_{p\lambda}(r, R)) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^\pi e^{i\theta} \frac{r - R e^{-i\theta}}{r - R e^{i\theta}} \frac{1}{\sqrt{t^2 - \omega^2}} \cos(\lambda \sqrt{t^2 - \omega^2}) d\theta$$

Здесь использовано значение табличного интеграла ([8], формула 2.12.23(8)).



Фиг. 1



Фиг. 2

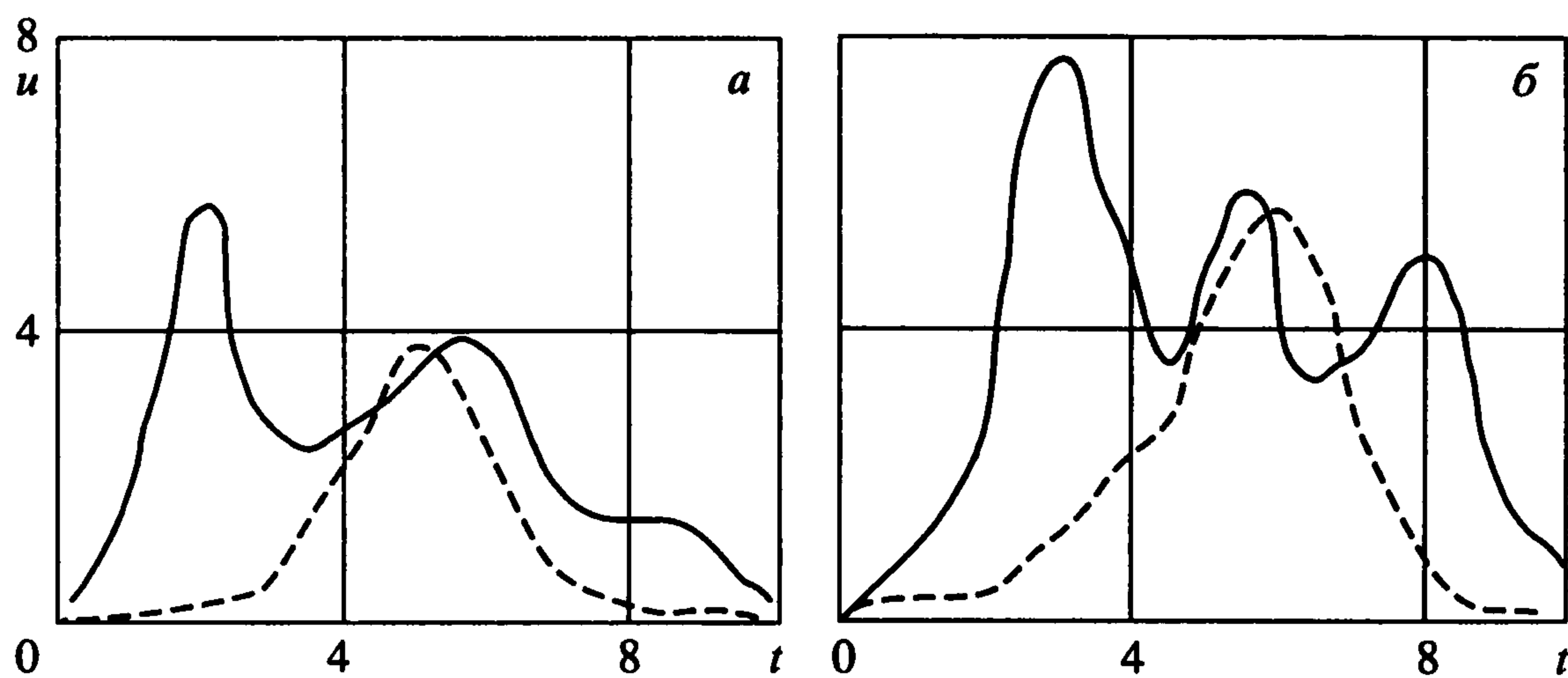
Окончательно получаем формулу для проведения вычислений

$$u^1(r, z, t) = \int_0^t \int_0^\infty \Phi(\sigma, \tau) [M(r, R, z, \lambda, t - \tau) - \frac{\partial}{\partial R} M(r, R, z, \lambda, t - \tau)] d\tau d\lambda$$

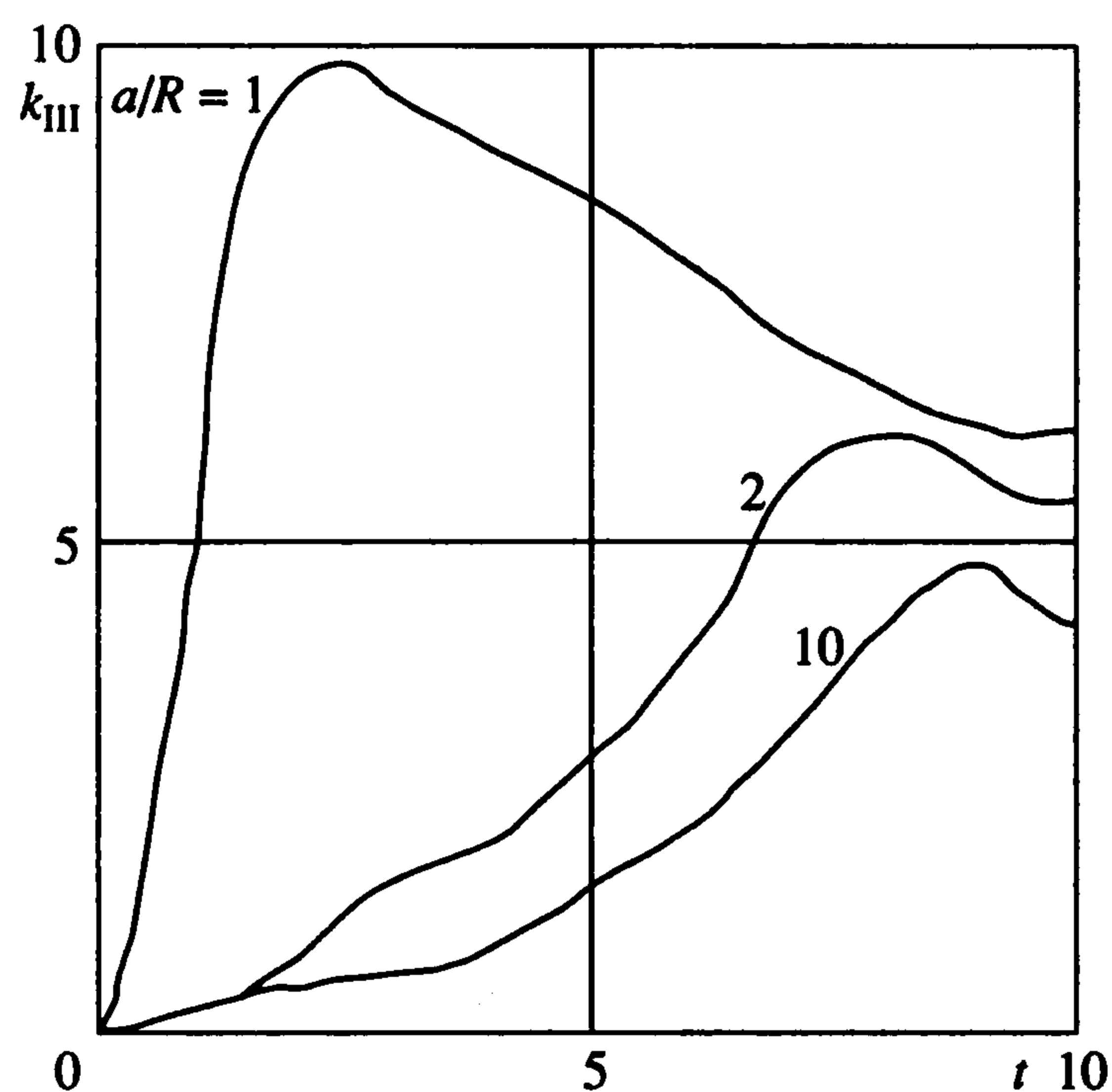
$$M(r, R, z, \lambda, t) = \int_0^t X_1(z, \lambda, t - \tau) * X_2(r, R, \lambda, \tau) d\tau$$

Была рассчитана зависимость смещений в фиксированных точках от времени для различных расстояний a от центра вращения до плоскости, проходящей через край трещины.

Например, для случая $a = R$ полученные результаты представлены на фиг. 1–3, иллюстрирующих характер изменения во времени смещений при наличии (сплошные кривые) либо отсутствии (штриховые кривые) трещины в среде. Показаны графики смещения точки с координатой $z = R/2$ (фиг. 1), $z = R$ (фиг. 2) и $z = 3R/2$ (фиг. 3) в зависимости от времени t . Левые части фигур (а) соответствуют точкам, в которых $r = 0$, правые (б) – точкам, в которых $r = 2R$. Видно, что для точек, удаленных от центра вращения не дальше, чем край трещины, первый пик величины смещения отмечается в одно и то же время независимо от наличия или отсутствия трещины, однако затем при наличии трещины максимальные значения смещений достигаются позднее. Совпадение значений смещений в некоторый начальный момент времени (независимо от наличия или отсутствия трещины) объясняется тем, что влияние трещины еще не сказывается из-за того, что возмущения еще не достигли ее. После-



Фиг. 3



Фиг. 4

дующее появление пиков значений смещений на фиг. 1 и 2 связано с тем, что трещина начинает частично экранировать возмущения, создаваемые центром вращения. Этим же можно объяснить, почему, когда точка наблюдения находится дальше, чем край трещины (фиг. 3), пик значений смещений при наличии трещины достигается ранее, чем при ее отсутствии.

Для указанных точек были построены также графики изменения напряжений в зависимости от времени, структура которых аналогична, и потому они не приводятся. Для исследования зависимости волновых полей от расстояния центра вращения до края трещины были построены аналогичные графики и для случая $a = 2R$. Поскольку отмеченные выше свойства волнового поля и здесь сохранялись (только пики значений смещений наблюдаются позднее по времени и их значения меньше), то эти графики здесь также не приводятся.

4. Вывод формулы для коэффициента интенсивности напряжений. Согласно принятому в механике разрушения обозначению, имеем формулу для коэффициента интенсивности напряжений (КИН), которая в трансформантах Лапласа запишется так:

$$K_{III}^p = \lim_{z \rightarrow a-0} \tau_{\varphi p}(R, z) \sqrt{2\pi(a-z)}$$

Учитывая замену $z = a + xR$ и замену (2.4), эту формулу запишем в виде

$$K_{111}^p = \sqrt{2\pi} \lim_{\xi \rightarrow -0} \tau_\varphi(R, a + \xi p^{-1}) \sqrt{|\xi|} p^{-1} \quad (4.1)$$

Обратив (4.1), получим выражение для КИН, которое при учете выполненной выше дискретизации по времени представим в виде

$$K_{111}^n = K_{111}(t_n) = \sqrt{2} \lim_{\xi \rightarrow -0} \sum_{j=1}^N B_j \tau_\varphi(\xi, \tau_j) (t_n - \tau_j)^{1/2} \sqrt{|\xi|}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_\varphi^j(\xi) = & \left(1 - \frac{d^2}{d\xi^2}\right) \int_0^\infty \Phi_j(\sigma) K_0(|\xi - \sigma|) d\sigma + \\ & + \left(1 - \frac{d^2}{d\xi^2}\right) \sum_{k=1}^N A_k \int_0^\infty \Phi_k(\sigma) L(|\xi - \sigma|, t_j - \tau_k) d\sigma + \tau_{j\varphi}^0(\xi), \quad j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4.3)$$

Вычислим предел в (4.2). Два последних слагаемых в (4.3) не внесут какого-либо вклада в КИН в силу формул (1.11) и (2.11). Под знак интеграла в первом слагаемом в (4.3) подставляем ряд (2.13). Получаем

$$\begin{aligned} K_{111}^n = & \sqrt{2} \lim_{\xi \rightarrow -0} \sum_{j=1}^N B_j \sqrt{|\xi|} \left(1 - \frac{d^2}{d\xi^2}\right) \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \sqrt{\sigma} e^{-\sigma} \times \\ & \times L_j^{1/2}(2\sigma) \Phi_k^{(j)} K_0(|\xi - \sigma|) d\sigma (t_n - \tau_j)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Было показано [1], что

$$\begin{aligned} J_j^{(1)}(\xi) = & \left(1 - \frac{d^2}{d\xi^2}\right) \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{\sigma} e^{-\sigma} L_j^{1/2}(2\sigma) K_0(|\xi - \sigma|) d\sigma = \\ = & \frac{\Gamma(1/2 + 1 + j)}{j! \pi} I_1^{-1}(\xi), \quad \xi < 0, \quad I_1^{-1}(\xi) = \int_0^\infty \frac{t^{j+1/2} e^{-t}}{(t+2)^{j+1}} dt \\ \lim_{\xi \rightarrow -0} \sqrt{|\xi|} J_j^{(1)}(\xi) = & \frac{\Gamma(j+3/2)}{j! \pi} \lim_{\xi \rightarrow -0} \sqrt{|\xi|} I_1^{-1}(\xi) = \frac{\Gamma(j+3/2)}{j! (-1)^{j+2} \sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Окончательно, после подстановки этого результата в соотношение (4.4), получим

$$K_{111}(t_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^N B_j \frac{\Gamma(j+3/2)}{j!} (t_n - \tau_j)^{1/2} \sum_{k=0}^\infty \Phi_k^{(j)}$$

Коэффициенты $\Phi_k^{(j)}$ определяются из системы (2.14).

На фиг. 4 приведен график зависимости КИН от времени при разных значениях a/R .

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я. Об одном новом спектральном соотношении для многочленов Чебышева-Лагерра и его приложения к динамическим задачам механики разрушения // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 71–79.
2. Михаськив В.В. Пошаговое по времени решение трехмерных динамических задач теории трещин // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 122–128.

3. Хай М.В., Михаськів В.В. Метод гранично-часових елементів у тривимірних динамічних задачах про тріщину в пружному середовищі // Доп. НАН України. 1993. № 5. С. 56–61.
4. Литовченко С.И., Нуллер Б.М. Кручение упругих цилиндров, ослабленных цилиндрическими щелями // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 112–118.
5. Nowacki W. Teoria sprężystości. Warszawa: PWN, 1973. = Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
7. Попов Г.Я., Морозов Ю.И., Вайсфельд Н.Д. К решению динамических задач о концентрации упругих напряжений возле дефектов на цилиндрических поверхностях // Прикл. механика. 1999. Т. 35. № 1. С. 28–36.
8. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. V. 2. N.Y., etc.: McGraw-Hill, 1953. = Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966. 295 с.
9. Bateman H., Erdelyi A. Tables of Integral Transforms. N.Y., etc.: McGraw-Hill, 1954. = Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.
10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.

Одесса

Поступила в редакцию
20.VI.2000