

УДК 539.3

© 2001 г. И.И. Аргатов

ДАВЛЕНИЕ ШТАМПА В ФОРМЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА НА УПРУГИЙ СЛОЙ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Исследуется задача о вдавливании (без трения) абсолютно твердого тела в упругий слой. Предполагается, что диаметр априори неизвестной площадки контакта мал в сравнении с толщиной слоя. При помощи метода сращиваемых асимптотических разложений выводится модельная задача одностороннего контакта о давлении на упругое полупространство штампа с поверхностью, близкой к эллиптическому параболоиду. Асимптотическое решение модельной задачи и асимптотика границы области контакта строятся по методу С.А. Назарова. Для плотности контактных давлений найдено равномерно пригодное асимптотическое представление. В явном виде выписано асимптотическое решение осесимметричной задачи.

1. Постановка задачи. Предположим, что в упругий (с модулем сдвига μ и коэффициентом Пуассона ν) слой толщиной H , прикрепленный к жесткой основе ($x_3 = H$), на глубину δ_0 без трения вдавлируется штамп в форме эллиптического параболоида

$$x_3 = -\Phi(x_1, x_2); \quad \Phi(x_1, x_2) = (2R_1)^{-1} x_1^2 + (2R_2)^{-1} x_2^2 \quad (1.1)$$

Здесь R_1, R_2 – радиусы кривизны главных нормальных сечений лицевой поверхности штампа в его вершине ($R_1 \geq R_2$). Величины δ_0 и R_1, R_2 будем считать малыми по сравнению с H . Обозначим через ε малый положительный параметр и положим

$$R_1 = \varepsilon R_1^*, \quad R_2 = \varepsilon R_2^*, \quad \delta_0 = \varepsilon \delta_0^* \quad (1.2)$$

где величины δ_0^* и R_1^*, R_2^* сравнимы с H .

Вектор $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ перемещений точек упругого слоя удовлетворяет задаче одностороннего контакта (см. [1, 2] и др.)

$$L(\nabla_x) \mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) \equiv -\mu \nabla_x \cdot \nabla_x \mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) - \frac{\mu}{1-2\nu} \nabla_x \nabla_x \cdot \mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) = 0, \quad x_3 \in (0, H) \quad (1.3)$$

$$\sigma_{31}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = \sigma_{32}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = 0, \quad x_3 = 0 \quad (1.4)$$

$$u_3(\varepsilon; \mathbf{x}) \geq \varepsilon \delta_0^* - \Phi_\varepsilon(x_1, x_2), \quad \sigma_{33}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) \leq 0 \quad (1.5)$$

$$[u_3(\varepsilon; \mathbf{x}) - \varepsilon \delta_0^* + \Phi_\varepsilon(x_1, x_2)] \sigma_{33}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = 0, \quad x_3 = 0$$

$$\mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) = 0, \quad x_3 = H \quad (1.6)$$

Здесь $L(\nabla_x)$ – оператор Ламе, $\sigma_{3j}(\mathbf{u})$ – компоненты тензора напряжений. Область контакта (там, где в первом неравенстве (1.5) реализуется знак равенства) заранее не известна и определяется условием положительности контактных давлений

$$p(x_1, x_2) = -\sigma_{33}(\mathbf{u}; x_1, x_2, 0) \quad (1.7)$$

Была детально изучена [3] осесимметричная задача ($R_1 = R_2$). Методом "больших λ " [4] дано [5] асимптотическое решение задачи (1.3)–(1.6) на основе допущения, что площадка контакта ограничена эллипсом. Данный подход применялся также при расчете давления штампа в форме эллиптического параболоида на грань упругого пространственного клина [6].

Другое решение рассматриваемой задачи было построено [7] методом В.М. Александрова [8]. Путем аппроксимации регулярной составляющей ядра интегрального оператора контактной задачи полиномом второй степени было выведено [7] приближенное уравнение для определения плотности контактных давлений $p^0(x_1, x_2)$, допускающее построение (обращающегося в нуль на контуре эллиптической площадки контакта) точного решения

$$p^0(x_1, x_2) = \frac{3Q}{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{a^2(1-e^2)}} \quad (1.8)$$

Для определения бóльшей полуоси a , эксцентриситета e и величины Q силы, действующей на штамп, получена система уравнений [7]

$$\delta_0 = \frac{3\tilde{Q}}{2a} \left(K(e) - \frac{2a_0 a}{3H} - \frac{2a_1 a^3}{15H^3} (2-e^2) \right), \quad \tilde{Q} = \frac{(1-\nu)}{2\pi\mu} Q \quad (1.9)$$

$$\frac{1}{R_1} - 2a_1 \frac{\tilde{Q}}{H^3} = \frac{3\tilde{Q}}{a^3} D(e), \quad \frac{1}{R_2} - 2a_1 \frac{\tilde{Q}}{H^3} = \frac{3\tilde{Q}}{a^3} \frac{B(e)}{1-e^2} \quad (1.10)$$

Здесь

$$D(e) = e^{-2} [K(e) - E(e)], \quad B(e) = e^{-2} [E(e) - (1-e^2)K(e)]$$

K и E – полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Для коэффициентов a_0 и a_1 известно (см. [3, 9]) интегральное представление

$$a_m = \frac{(-1)^m}{2^{2m} (m!)^2} \int_0^\infty [1 - L(u)] u^{2m} du \quad (1.11)$$

В случае слоя, жестко соединенного с недеформируемой основой,

$$L(u) = \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2u - 4u}{2\kappa \operatorname{ch} 2u + 1 + \kappa^2 + 4u^2}, \quad \kappa = 3 - 4\nu$$

Числовые значения коэффициентов a_m для различных значений коэффициента Пуассона ν имеются в таблице 1.2 [9].

Независимо от более ранних результатов [7] методом сращиваемых асимптотических разложений [11–13] было найдено [10] аналогичное (1.8)–(1.10) решение односторонней контактной задачи о вдавлении штампа (1.1) в плоский участок упругого тела. В частности, оказывается, что формулы (1.8)–(1.10) при соответствующих значениях коэффициентов a_0 и a_1 дают приближенное решение задачи о давлении штампа в форме эллиптического параболоида на центр упругого полушара или круговой плиты при условии осевой симметрии их закрепления. В предположении (1.2) была выписана [10] асимптотика решения результирующей задачи (1.9), (1.10).

Ясно также, что решение (1.9), (1.10) справедливо и в случае упругого слоя конечной толщины, сцепленного с упругим полупространством. Методом "больших λ " было построено [14] решение осесимметричной задачи (значения коэффициентов a_m см. в табл. 2 [14]). Получены [15] формулы, удобные для практических расчетов. Дано [16] численное решение неосесимметричной задачи для штампа (1.1).

На примере линейной контактной задачи было показано [17], что решение (1.8) так называемого [18] "связанного" интегрального уравнения контактной задачи, получаемого описанным ранее способом [8, 7], обладает большей точностью, чем разложение [5], найденное методом "больших λ ". Вместе с этим попытка уточнения асимптотики по методу, изложенному ранее ([7] или [10]), приводит к необходимости решения задачи одностороннего контакта для штампа, ограниченного поверхностью четвертого порядка. Точное решение такой задачи, вообще говоря, не известно (см. [19, 20, 5]).

В данной работе (являющейся продолжением статьи автора [10]) для построения решения упомянутой выше уточненной модельной задачи одностороннего контакта (формируемой в разд. 3) используется асимптотический метод [21], ранее примененный для решения контактной задачи [22]. На этом пути удастся описать вариацию эллиптической области контакта и в явном виде получить равномерно пригодное асимптотическое представление для плотности контактных давлений.

2. Поле перемещений на удалении от площадки контакта. Обозначим через $G(x)$ и $G^{(m,n)}(x)$ сингулярные решения задач о действии на границу слоя сосредоточенной силы и полимоментов m -го порядка, приложенных в начале координат. Справедливо разложение на сингулярную и регулярную составляющие:

$$G(x) = T(x) + g(x), \quad G^{(m,n)}(x) = S^{(m,n)}(x) + g^{(m,n)}(x) \quad (2.1)$$

Здесь $T(x)$ – решение задачи Буссинеска о нагружении упругого полупространства $x_3 \geq 0$ направленной вдоль оси Ox_3 единичной сосредоточенной силой,

$$S^{(m,n)}(x) = \partial^m T(x) / \partial x_1^{m-n} \partial x_2^n$$

Явные выражения для вектор-функций $g(x)$ и $g^{(m,n)}(x)$ можно получить при помощи преобразования Фурье (см., например, [9]).

Следуя описанному ранее подходу [10], вектор перемещений точек упругого полубесконечного тела вдали от пятна контакта приблизим суммой

$$v(\varepsilon; x) = 2G(x) + \sum_{n=0,2} M_{2,n} G^{(2,n)}(x) + \sum_{n=0,2,4} M_{4,n} G^{(4,n)}(x) \quad (2.2)$$

С целью выписать асимптотику $v(\varepsilon; x)$ при $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \rightarrow 0$ воспользуемся формулой

$$g(x) = g(0) + \sum_{m=1}^4 \sum_{k=1}^{N(m)} g_{m,k} V_k^m(x) + O(|x|^5) \quad (2.3)$$

где $V_1^m(x), \dots, V_{N(m)}^m(x)$ – базис в пространстве векторных однородных полиномов степени m , удовлетворяющих однородной системе Ламе (1.3) в полупространстве $x_3 > 0$ и краевым условиям отсутствия напряжений на его границе; $N(m) = 3(m+1)$. Явные выражения векторов $V_k^m(x)$ (для $m = 1, 2$ см. в [18]) в дальнейшем не понадобятся. Заметим также, что в силу осевой симметрии многие коэффициенты $g_{m,k}$ в (2.3) равны нулю.

Чтобы вывести результирующую задачу одностороннего контакта для внутреннего асимптотического представления, необходима следующая формула:

$$\frac{2\pi\mu}{1-\nu} g_3(x_1, x_2, 0) = A_0 + A_{2,0}x_1^2 + A_{0,2}x_2^2 + A_{4,0}x_1^4 + A_{2,2}x_1^2x_2^2 + A_{0,4}x_2^4 + \dots \quad (2.4)$$

$$A_0 = -\frac{a_0}{H}, \quad A_{2,0} = A_{0,2} = -\frac{a_1}{H^3}, \quad A_{4,0} = A_{0,4} = -\frac{a_2}{H^5}, \quad A_{2,2} = \frac{2a_2}{H^5} \quad (2.5)$$

где a_0, a_1 и a_2 – коэффициенты (1.11).

Для вектор-функции $g^{(m,n)}(x)$ верны аналогичные (2.3), (2.4) разложения. В дальнейшем потребуются коэффициенты

$$A_0^{(2,0)} = A_0^{(2,2)} = -\frac{2a_1}{H^3}, \quad A_{2,0}^{(2,0)} = A_{0,2}^{(2,2)} = -\frac{12a_2}{H^5}, \quad A_{0,2}^{(2,0)} = A_{2,0}^{(2,2)} = -\frac{4a_2}{H^5} \quad (2.6)$$

$$A_0^{(4,0)} = A_0^{(4,4)} = -\frac{24a_2}{H^5}, \quad A_0^{(4,2)} = -\frac{8a_2}{H^5} \quad (2.7)$$

Согласно предположению (1.2), при $\varepsilon \rightarrow 0$ устанавливаем следующие порядки для коэффициентов во внешнем асимптотическом представлении (2.2):

$$\mathcal{Q} = \varepsilon^2 \mathcal{Q}^*, \quad \mathcal{M}_{2,n} = \varepsilon^4 \mathcal{M}_{2,n}^*, \quad \mathcal{M}_{4,n} = \varepsilon^6 \mathcal{M}_{4,n}^* \quad (2.8)$$

Соотношения (2.8) вытекают из формул теории Герца (см., в частности, [23, гл. 5, § 6.5]).

3. Асимптотическое моделирование давления штампа в форме эллиптического параболоида на упругий слой. В окрестности штампа перейдем к "растянутым" координатам

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3); \quad \xi_i = \varepsilon^{-1} x_i \quad (3.1)$$

Задачу для внутреннего асимптотического представления $w(\varepsilon; \xi)$ формулируем в полупространстве $\xi_3 \geq 0$. Соотношения (1.3) и (1.4) дают

$$L(\nabla_\xi)w(\varepsilon; \xi) = 0, \quad \xi_3 < 0; \quad \sigma_{31}(w; \xi) = \sigma_{32}(w; \xi) = 0, \quad \xi_3 = 0 \quad (3.2)$$

Краевое условие одностороннего контакта (1.5) сужаем на область

$$\omega^* = \left\{ (\xi_1, \xi_2): (2\delta_0^* R_1^*)^{-1} \xi_1^2 + (2\delta_0^* R_2^*)^{-1} \xi_2^2 < 1 \right\}$$

заведомо включающую искомую область контакта (вне области ω^* поверхность штампа располагается выше уровня невозмущенной границы упругого слоя). Имеем

$$\sigma_{33}(w; \xi', 0) = 0, \quad \xi' = (\xi_1, \xi_2) \notin \omega^* \quad (3.3)$$

$$w_3(\varepsilon; \xi', 0) \geq \varepsilon(\delta_0^* - \Phi^*(\xi_1, \xi_2)) \quad \sigma_{33}(w; \xi', 0) \leq 0, \quad (3.4)$$

$$\left[w_3(\varepsilon; \xi', 0) - \varepsilon(\delta_0^* - \Phi^*(\xi_1, \xi_2)) \right] \sigma_{33}(w; \xi', 0) = 0, \quad \xi' \in \omega^*$$

$$\Phi^*(\xi_1, \xi_2) = (2R_1^*)^{-1} \xi_1^2 + (2R_2^*)^{-1} \xi_2^2$$

Соотношения (3.2)–(3.4) замыкаются асимптотическим условием поведения вектора $w(\varepsilon; \xi)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, которое получим в результате сращивания с внешним представлением (2.2).

Подставим выражение (2.8) в (2.2), учтем асимптотические формулы типа (2.3) и введем растянутые координаты (3.1). Таким образом, в области сращивания $\{x: \sqrt{\varepsilon}H/2 \leq |x| \leq \sqrt{\varepsilon}H\}$ находим

$$\begin{aligned} v(\varepsilon; \varepsilon\xi) = & \varepsilon \left[\mathcal{Q}^* T(\xi) + \sum_{n=0,2} \mathcal{M}_{2,n}^* S^{(2,n)}(\xi) + \sum_{n=0,2,4} \mathcal{M}_{4,n}^* S^{(4,n)}(\xi) \right] + \\ & + \varepsilon^2 \left[V^*(\varepsilon; \xi) + O(\varepsilon^5 |\xi|^5) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь $V^*(\varepsilon; \xi)$ – векторный полином четвертой степени

$$\begin{aligned} V^*(\varepsilon; \xi) = & \mathcal{Q}^* \left[g(0) + \sum_{m=1}^4 \varepsilon^m \sum_{k=1}^{N(m)} g_{m,k} V_k^m(\xi) \right] + \\ & + \varepsilon^2 \sum_{n=0,2} \mathcal{M}_{2,n}^* \left[g^{(2,n)}(0) + \sum_{m=1}^2 \varepsilon^m \sum_{k=1}^{N(m)} g_{m,k}^{(2,n)} V_k^m(\xi) \right] + \varepsilon^4 \sum_{n=0,2,4} \mathcal{M}_{4,n}^* g^{(4,n)}(0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Принимая во внимание соотношение (3.5), выводим упомянутое выше условие

$$w(\varepsilon; \xi) = \varepsilon^2 V^*(\varepsilon; \xi) + \varepsilon \left[\mathcal{Q}^* T(\xi) + \sum_{n=0,2} \mathcal{M}_{2,n}^* S^{(2,n)}(\xi) + \sum_{n=0,2,4} \mathcal{M}_{4,n}^* S^{(4,n)}(\xi) \right] + O(|\xi|^{-7}), \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

Решение задачи (3.2)–(3.4), (3.7) запишем в виде

$$w(\varepsilon; \xi) = \varepsilon^2 V^*(\varepsilon; \xi) + \varepsilon W(\varepsilon; \xi) \quad (3.8)$$

где $W(\varepsilon; \xi)$ – исчезающая при $|\xi| \rightarrow \infty$ вектор-функция, удовлетворяющая соотношениям (3.2), (3.3) и краевому условию

$$W_3(\varepsilon; \xi', 0) \geq \delta_0^* - \Phi^*(\xi_1, \xi_2) - \varepsilon V_3^*(\varepsilon; \xi), \quad \sigma_{33}(W; \xi', 0) \leq 0 \quad (3.9)$$

$$[W_3(\varepsilon; \xi', 0) - \delta_0^* + \Phi^*(\xi_1, \xi_2) + \varepsilon V_3^*(\varepsilon; \xi', 0)] \sigma_{33}(W; \xi', 0) = 0, \quad \xi' \in \omega^*$$

Следствием условия срачивания (3.7) будут уравнения для определения величин $\mathcal{Q}^*$, $\mathcal{M}_{2,n}^*$ ($n = 0, 2$) и $\mathcal{M}_{4,n}^*$ ($n = 0, 2, 4$):

$$\mathcal{Q}^* = - \iint_{\omega_\varepsilon^*} \sigma_{33}(W; \xi_1, \xi_2, 0) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.10)$$

$$\mathcal{M}_{m,n}^* = - \frac{(-1)^m}{m!} C_m^n \iint_{\omega_\varepsilon^*} \xi_1^{m-n} \xi_2^n \sigma_{33}(W; \xi_1, \xi_2, 0) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.11)$$

Здесь ω_ε^* – область контакта, отвечающая вектору перемещений $w(\varepsilon; \xi)$; C_m^n – биномиальный коэффициент.

Итак, для вектор-функции $W(\varepsilon; \xi)$ получена задача одностороннего контакта о давлении на упругое полупространство штампа с лицевой поверхностью, изображаемой полиномом четвертой степени.

Положим

$$\mathcal{Q}^* = Q^* + \varepsilon^5 q^*, \quad \mathcal{M}_{m,n}^* = M_{m,n}^* + \varepsilon^5 m_{m,n}^*, \quad m = 2, 4 \quad (3.12)$$

Теперь, оставаясь в рамках точности, с которой была выписана задача (3.2)–(3.4), (3.7), упростим правую часть первого неравенства в (3.9), переписав ее следующим образом:

$$\delta_0^* - \Phi^*(\xi_1, \xi_2) - \varepsilon V_3^*(\varepsilon; \xi_1, \xi_2, 0) \approx \delta_\varepsilon^* - \Phi_\varepsilon^*(\xi_1, \xi_2) - \varepsilon^5 \Phi_0^*(\xi_1, \xi_2) \quad (3.13)$$

На основании соотношений (3.6) и (2.3), (2.4) при учете равенств (3.12) получаем

$$\delta_\varepsilon^* = \delta_0^* - \varepsilon \tilde{Q}^* A_0 - \varepsilon^3 \sum_{n=0,2} \tilde{M}_{2,n}^* A_0^{(2,n)} \quad (3.14)$$

$$\Phi_\varepsilon^*(\xi_1, \xi_2) = \left[(2R_1^*)^{-1} + \varepsilon^3 \tilde{Q}^* A_{2,0} \right] \xi_1^2 + \left[(2R_2^*)^{-1} + \varepsilon^3 \tilde{Q}^* A_{0,2} \right] \xi_2^2 \quad (3.15)$$

Тильда над символами Q^* и $M_{2,n}^*$ означает их умножение на $(1 - \nu)(2\pi\mu)^{-1}$ (см. вторую формулу (1.9)).

Так как при формировании левой части соотношения (3.13) удерживались только члены порядка ε^5 по сравнению с единицей, назовем

$$\begin{aligned} \Phi_0^*(\xi_1, \xi_2) &= \tilde{Q}_0^* (A_{4,0} \xi_1^4 + A_{2,2} \xi_1^2 \xi_2^2 + A_{0,4} \xi_2^4) + \\ &+ \sum_{n=0,2} \tilde{M}_{2,n}^{*0} (A_{2,0}^{(2,n)} \xi_1^2 + A_{0,2}^{(2,n)} \xi_2^2) + \sum_{n=0,2,4} \tilde{M}_{4,n}^{*0} A_0^{(4,n)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Величины $\tilde{Q}_0^*$, $\tilde{M}_{2,n}^{*0}$ и $\tilde{M}_{4,n}^{*0}$ отвечают нулевому приближению (в (3.9) надо положить $\varepsilon = 0$) и вычисляются по формулам (3.10), (3.11) для герцевской плотности контактных давлений (1.8). Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{2,0}^{*0} &= 10^{-1} \tilde{Q}_0^* (a_0^*)^2, \quad \tilde{M}_{2,2}^{*0} = \tilde{M}_{2,0}^{*0} (1 - e_0^2) \\ \tilde{M}_{4,0}^{*0} &= \frac{\tilde{Q}_0^*}{560} (a_0^*)^4 \left(1 + \sqrt{1 - e_0^2}\right), \quad \tilde{M}_{4,2}^{*0} = \frac{\tilde{Q}_0^*}{140} (a_0^*)^4 (1 - e_0^2), \quad \tilde{M}_{4,4}^{*0} = \tilde{M}_{4,0}^{*0} (1 - e_0^2)^{3/2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

где a_0^* и e_0 — соответственно бóльшая полуось и эксцентриситет герцевской области контакта (когда слой подменяется полупространством).

4. Асимптотическое решение модельной задачи одностороннего контакта. Исчезающее на бесконечности решение $\mathbf{W}(\varepsilon; \xi)$ задачи (3.2), (3.3), (3.9) при учете (3.13)–(3.16) по описанному ранее методу [21] будем искать в форме двух асимптотических приближений: внешнего, справедливого вдали от контура Γ_ε^* искомой площадки контакта ω_ε^* , и внутреннего для малой окрестности Γ_ε^* .

В качестве внешнего асимптотического представления для вектора $\mathbf{W}(\varepsilon; \xi)$ назовем сумму

$$\mathcal{V}(\varepsilon; \xi) = \mathcal{V}^0(\varepsilon; \xi) + \varepsilon^5 \mathcal{V}^1(\varepsilon; \xi) \quad (4.1)$$

где $\mathcal{V}^0(\varepsilon; \xi)$ — решение контактной задачи о вдавливании в упругое полупространство $\xi_3 \geq 0$ на глубину δ_ε^* штампа в форме эллиптического параболоида $\xi_3 = -\Phi_\varepsilon^*(\xi_1, \xi_2)$ (выражения для δ_ε^* и $\Phi_\varepsilon^*(\xi_1, \xi_2)$ см. в (3.14), (3.15)). Вектор-функцию $\mathcal{V}^0(\varepsilon; \xi)$ запишем в виде обобщенного потенциала простого слоя

$$\mathcal{V}^0(\varepsilon; \xi) = \iint_{\omega_0^*} p^0(\varepsilon; \eta_1, \eta_2) \mathbf{T}(\xi_1 - \eta_1, \xi_2 - \eta_2, \xi_3) d\eta_1 d\eta_2 \quad (4.2)$$

с плотностью распределения контактного давления

$$p^0(\varepsilon; \xi_1, \xi_2) = p_0 H^*(\xi_1, \xi_2) \quad (4.3)$$

$$p_0 = \frac{3Q^*}{2\pi(a^*)^2 \sqrt{1 - e^2}}, \quad H^*(\xi_1, \xi_2) = \sqrt{1 - \frac{\xi_1^2}{(a^*)^2} - \frac{\xi_2^2}{(a^*)^2(1 - e^2)}}$$

Вектору перемещений (4.2) отвечает эллиптическая площадка контакта ω_0^* с контуром Γ_0^* (зависимость ω_0^* и Γ_0^* от параметра ε не указывается). Бóльшая полуось и эксцентриситет эллипса Γ_0^* обозначены через a^* и e . Для определения величин Q^* , a^* и e по формулам Герца имеем следующую систему уравнений:

$$\delta_0^* - \varepsilon \tilde{Q}^* A_0 - \varepsilon^3 \sum_{n=0,2} \tilde{M}_{2,n}^* A_0^{(2,n)} = \frac{3\tilde{Q}^*}{2a^*} \mathbf{K}(e) \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{R_1^*} + \varepsilon^3 2\tilde{Q}^* A_{2,0} = \frac{3\tilde{Q}^*}{(a^*)^3} \mathbf{D}(e), \quad \frac{1}{R_2^*} + \varepsilon^3 2\tilde{Q}_0^* A_{0,2} = \frac{3\tilde{Q}^*}{(a^*)^3} \frac{\mathbf{B}(e)}{1 - e^2} \quad (4.5)$$

Наконец, принимая во внимание соотношения (3.12), (4.1) и (3.10), (3.11), уравнения (4.4), (4.5) дополняем соотношениями для полимоментов, фигурирующих в (4.4),

$$M_{2,0}^* = 10^{-1} Q^* (a_0^*)^2, \quad M_{2,2}^* = 10^{-1} Q^* (a_0^*)^2 (1 - e^2) \quad (4.6)$$

Подставляя выражения (4.6) в уравнение (4.4), систему (4.4), (4.5) приводим к виду (1.10), (1.11).

Опишем поведение интеграла (4.2) и его плотности (4.3) в окрестности границы Γ_0^* области ω_0^* (см. [24, 25] и др.). Определим контур Γ_0^* уравнениями

$$\xi_1 = a^* \cos \sigma, \quad \xi_2 = a^* \sqrt{1 - e^2} \sin \sigma$$

где σ – параметр. Тогда единичный вектор внутренней (по отношению к области ω_0^*) нормали к Γ_0 оказывается таким:

$$\mathbf{n}(\sigma) = -\left(1 - e^2 \cos^2 \sigma\right)^{-1/2} \left[\sqrt{1 - e^2} \cos \sigma \mathbf{e}_1 + \sin \sigma \mathbf{e}_2 \right]$$

В трехмерной окрестности контура Γ_0^* введем локальную систему координат v, ξ_3, σ , связанных с декартовыми посредством формул

$$\xi_1 = a^* \cos \sigma + v n_1^0(\sigma), \quad \xi_2 = a^* \sqrt{1 - e^2} \sin \sigma + v n_2^0(\sigma)$$

Кроме того, в плоскостях $\pi(\sigma)$, ортогональных к Γ_0^* , введем полярные координаты r, φ так, что

$$v = r \cos \varphi, \quad \xi_3 = r \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi]$$

Путем несложных вычислений для плотности контактных давлений (4.3) находим

$$p^0(\varepsilon; \xi_1, \xi_2) = -(2\pi)^{-1/2} k^{0*}(\sigma) r^{1/2} + O(r^{3/2}), \quad r \rightarrow 0 \quad (\varphi = 0) \quad (4.7)$$

$$k^{0*}(\sigma) = -\frac{3Q^*}{\sqrt{\pi}(a^*)^{5/2}} \frac{(1 - e^2 \cos^2 \sigma)^{1/4}}{(1 - e^2)^{3/4}} \quad (4.8)$$

Вводя проекции на орты локальной системы координат

$$\mathcal{V}_n^0 = n_1^0 \mathcal{V}_1^0 + n_2^0 \mathcal{V}_2^0, \quad \mathcal{V}_t^0 = n_2^0 \mathcal{V}_1^0 - n_1^0 \mathcal{V}_2^0$$

в плоскости $\pi(\sigma)$ для вектора (4.2) при $r \rightarrow 0$ можем вывести следующее разложение:

$$(\mathcal{V}_n^0 \mathbf{n}^0(\sigma) + \mathcal{V}_3^0 \mathbf{e}_3)(\varepsilon; r, \varphi, \sigma) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0,2} B_{i,k}^0(\sigma) \mathbf{X}^{i,k}(r, \varphi) + k^{0*}(\sigma) \mathbf{X}^{1,3}(r, \varphi) + O(r^3) \quad (4.9)$$

Здесь $\mathbf{X}^{1,0}$, $\mathbf{X}^{2,0}$ и $\mathbf{X}^{2,2}(r, \varphi)$ – соответственно поступательные смещения вдоль ортов $\mathbf{n}^0$, $\mathbf{e}_3$ и поворот относительно орта $\mathbf{t}^0$ (касательного к Γ_0^*). Величина $2\mu(1 - \nu)^{-1} B_{1,2}^0$ имеет смысл интенсивности растяжения упругого полупространства в точках контура Γ_0^* в направлении его нормали. В записи (4.9) используются обозначения, принятые ранее [25], причем

$$\mathbf{X}^{1,3}(r, \varphi) = r^{3/2} \Phi^{1,3}(\varphi)$$

где $\Phi^{1,3}(\varphi)$ – вектор с полярными компонентами ($\kappa = 3 - 4\nu$)

$$\Phi_r^{1,3}(\varphi) = (2\pi)^{-1/2} (4\mu)^{-1} \left[\left(\frac{2}{3} \kappa - 1 \right) \cos(\varphi/2) + \frac{1}{3} \cos(5\varphi/2) \right]$$

$$\Phi_\varphi^{1,3}(\varphi) = (2\pi)^{-1/2} (4\mu)^{-1} \left[\left(\frac{2}{3} \kappa + 1 \right) \sin(\varphi/2) - \frac{1}{3} \sin(5\varphi/2) \right]$$

Вектор $\mathcal{V}^0(\varepsilon; \xi)$, составляющий главную часть асимптотики (4.1), определяет и главное приближение ω_0^* к искомой площадке контакта ω_ε^* . При построении вектор-

функции $\mathcal{V}^1(\epsilon; \xi)$ будем считать известными величины Q^* , a^* и e . Подчеркнем (см. [10]), что нетрудно получить асимптотическое (с точностью до членов порядка ϵ^5 включительно) решение задачи (4.4) – (4.6). Данные формулы ввиду их громоздкости здесь не выписываются.

5. Возмущение герцевского поля перемещений вдали от контура площадки контакта. Следуя [21], в качестве поправки $\mathcal{V}^1(\epsilon; \xi)$ во внешнем асимптотическом представлении (4.1) вектора $W(\epsilon; \xi)$ назначим интеграл (4.2) с плотностью, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{1-\nu}{2\pi\mu} \iint_{\omega_0^*} \frac{p^1(\epsilon; \eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2}{\sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}} = -\varphi_0^*(\xi_1, \xi_2) \quad (5.1)$$

Правая часть уравнения (5.1) представляет собой полином четвертой степени (3.16), и, согласно теореме Л.А. Галина (см. [26, § 9, гл. 2]), для решения (5.1) верна формула

$$p^1(x_1, x_2) = -\frac{2\pi\mu}{1-\nu} \frac{c_{00}^* + c_{20}^* \xi_1^2 + c_{02}^* \xi_2^2 + c_{40}^* \xi_1^4 + c_{22}^* \xi_1^2 \xi_2^2 + c_{04}^* \xi_2^4}{H^*(\xi_1, \xi_2)} \quad (5.2)$$

Коэффициенты в числителе дроби (5.2) могут быть выражены в явном виде по формулам [3, 9, 20] через коэффициенты полинома $\varphi_0^*(\xi_1, \xi_2)$. При этом величина c_{00}^* – безразмерная, а размерности c_{20}^* , c_{02}^* и c_{40}^* , c_{22}^* , c_{04}^* соответственно равны L^{-2} и L^{-4} , где L – размерность длины.

Плотность (5.2) в отличие от (4.3) обладает корневой особенностью при стремлении к контуру Γ_0^* , т.е.

$$p^1(\epsilon; \xi_1, \xi_2) = -(2\pi)^{-1/2} K^{1*}(\sigma) r^{-1/2} + O(r^{1/2}), \quad r \rightarrow 0 \quad (5.3)$$

Величина $K^{1*}(\sigma)$ имеет смысл коэффициента интенсивности сжимающих напряжений и равна

$$K^{1*}(\sigma) = \frac{2\pi\mu}{1-\nu} \frac{\sqrt{\pi}(1-e^2)^{1/4}(a^*)^{1/2}}{(1-e^2 \cos^2 \sigma)^{1/4}} \left\{ c_{00}^* + (a^*)^2 [c_{20}^* \cos^2 \sigma + c_{02}^* (1-e^2) \sin^2 \sigma] + \right. \\ \left. + (a^*)^4 [c_{40}^* \cos^4 \sigma + c_{22}^* (1-e^2) \cos^2 \sigma \sin^2 \sigma + c_{04}^* (1-e^2)^2 \sin^4 \sigma] \right\} \quad (5.4)$$

В свою очередь для составляющей вектора $\mathcal{V}^1(\epsilon; \xi)$ в плотности $\pi(\sigma)$ при $r \rightarrow 0$ справедлива такая формула:

$$(\mathcal{V}_n^1 \mathbf{n}^0(\sigma) + \mathcal{V}_3^1 \mathbf{e}_3)(\epsilon; r, \varphi, \sigma) = \sum_{i=1}^2 B_{i,0}^1(\sigma) \mathbf{X}^{i,0} + K^{1*}(\sigma) \mathbf{X}^{1,1}(r, \varphi) + O(r) \quad (5.5)$$

Здесь $\mathbf{X}^{1,1}(r, \varphi) = r^{1/2} \Phi^{1,1}(\varphi)$, где $\Phi^{1,1}(\varphi)$ – вектор с полярными компонентами

$$\Phi_r^{1,1}(\varphi) = (2\pi)^{-1/2} (4\mu)^{-1} [(2\kappa - 1) \cos(\varphi/2) - \cos(3\varphi/2)]$$

$$\Phi_\varphi^{1,1}(\varphi) = (2\pi)^{-1/2} (4\mu)^{-1} [-(2\kappa + 1) \sin(\varphi/2) + \sin(3\varphi/2)]$$

Так как на бесконечности вектор $\mathcal{V}(\epsilon; \xi)$ должен служить приближением для вектора $W(\epsilon; \xi)$, согласно (3.7) и (3.8), при $|\xi| \rightarrow \infty$ имеем

$$\mathcal{V}(\epsilon; \xi) = Q^* \mathbf{T}(\xi) + \sum_{n=0,2} \mathcal{M}_{2,n}^* \mathbf{S}^{(2,n)}(\xi) + \sum_{n=0,2,4} \mathcal{M}_{4,n}^* \mathbf{S}^{(4,n)}(\xi) + O(|\xi|^{-7}) \quad (5.6)$$

Подставляя теперь выражения (4.1), (3.12) в соотношение (5.6), находим (см., напри-

мер, [18]), что величины q^* и $m_{m,n}^*$ из (3.12) являются интегральными характеристиками (равнодействующей и полимоментами порядка m) плотности $p^1(\varepsilon; \xi_1, \xi_2)$.

По построению вектор-функция $\mathcal{V}(\varepsilon; \xi)$ удовлетворяет соотношениям (3.2), (3.3) и оставляет малую $o(\varepsilon^5)$ невязку в краевом условии одностороннего контакта (3.9) внутри области ω_0^* на удалении от ее границы Γ_0^* . В окрестности Γ_0^* , где плотность $p^1(\varepsilon; \xi_1, \xi_2)$ не ограничена, возникает явление плоского пограничного слоя.

6. Плоский пограничный слой. Вариация границы эллиптической области контакта. Предположим, что контур Γ_ε^* искомой площадки контакта ω_ε^* в локальных координатах описывается уравнением

$$v = h_\varepsilon^*(\sigma); \quad h_\varepsilon^*(\sigma) = \varepsilon^5 h^*(\sigma) \quad (6.1)$$

где $h^*(\sigma)$ – функция, подлежащая определению. В плоскостях $\pi(\sigma)$, ортогональных к Γ_0^* , введем растянутые переменные

$$\eta = (\eta_1, \eta_2); \quad \eta_1 = \varepsilon^{-5} v, \quad \eta_2 = \varepsilon^{-5} \xi_3 \quad (6.2)$$

Тогда уравнение искомой границы площадки контакта принимает вид $\eta_1 = h^*(\sigma)$.

Следуя описанному ранее подходу [21], проекцию $\text{Pr}_{\pi(\sigma)} W(\varepsilon; \xi)$ вектора $W(\varepsilon; \xi)$ на плоскость $\pi(\sigma)$ в окрестности Γ_0^* будем искать в виде суммы

$$\mathcal{W}(\varepsilon; \xi) = \mathcal{W}^0(\sigma; \eta) + \varepsilon^{5/2} \mathcal{W}^1(\sigma; \eta) + \varepsilon^5 \mathcal{W}^2(\sigma; \eta) + \varepsilon^{15/2} \mathcal{W}^3(\sigma; \eta) \quad (6.3)$$

Пусть $\rho = \varepsilon^{-5} r$ и φ – полярные координаты, отвечающие декартовым координатам (6.2). Введем еще полярную систему координат ρ_h и $\varphi_h \in [0, \pi]$ с полюсом в точке $\eta_1 = h^*(\sigma), \eta_2 = 0$. Тогда младший член разложения (6.3) оказывается таким [21]:

$$\mathcal{W}^3(\sigma; \eta) = N(\sigma) X^{1,3}(\rho_h, \varphi_h) \quad (6.4)$$

Отметим, что вектор-функция (6.4) выбрана так, чтобы контактное давление, отвечающее (6.3), обращалось в нуль на границе области контакта. Явные выражения для $N(\sigma)$ и $h^*(\sigma)$ определяются в результате сращивания внешнего (4.1) и внутреннего (6.3) асимптотических представлений.

Соберем формулы (4.9), (5.5) в одну и в полученном соотношении перейдем к растянутым переменным (6.2). В результате для проекции вектора $\mathcal{V}(\varepsilon; \xi)$ на плоскость $\pi(\sigma)$ получим асимптотическую формулу

$$\begin{aligned} \text{Pr}_{\pi(\sigma)} \mathcal{V}(\varepsilon; \xi) = & \sum_{i=1}^2 B_{i,0}^0(\sigma) X^{i,0} + \varepsilon^5 \sum_{i=1}^2 (B_{i,2}^0(\sigma) X^{i,2}(\rho, \varphi) + B_{i,0}^1(\sigma) X^{i,0}) + \\ & + \varepsilon^{15/2} [k^{0*}(\sigma) X^{1,3}(\rho, \varphi) + K^{1*}(\sigma) X^{1,1}(\rho, \varphi)] + O(\varepsilon^{10} \rho, \varepsilon^{10} \rho^2) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Сопоставляя (6.5) с (6.3), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^0(\sigma; \eta) & \equiv \sum_{i=1}^2 B_{i,0}^0(\sigma) X^{i,0}, \quad \mathcal{W}^1(\sigma; \eta) \equiv 0 \\ \mathcal{W}^2(\sigma; \eta) & \equiv \sum_{i=1}^2 (B_{i,0}^1(\sigma) X^{i,0} + B_{i,2}^0(\sigma) X^{i,2}(\rho, \varphi)) \end{aligned}$$

Далее, привлекая формулы

$$\partial \rho_h / \partial h^* = -\cos \varphi, \quad \partial \varphi_h / \partial h^* = \rho^{-1} \sin \varphi$$

справедливые при $h^* = 0$ (см. [27]), для больших значений ρ_h выводим

$$\rho_h^{3/2} \Phi^{1,3}(\varphi_h) = \rho^{3/2} \Phi^{1,3}(\varphi) - \frac{1}{2} h^*(\sigma) \rho^{1/2} \Phi^{1,1}(\varphi) + O(\rho^{-1/2})$$

Используя данное соотношение, сравним разложения (6.5) и (6.3) в зоне $\rho/a^* = O(\varepsilon^{-4/3})$, где оказывается малой погрешность формулы (6.5) по сравнению с членами, присутствующими в (6.3). Таким образом, приходим к равенствам

$$N(\sigma) = k^{0*}(\sigma), \quad -\frac{1}{2} h^*(\sigma) N(\sigma) = K^{1*}(\sigma)$$

из которых вытекает зависимость

$$h^*(\sigma) = -2K^{1*}(\sigma)/k^{0*}(\sigma) \quad (6.6)$$

Формулы (6.6) и (6.1) в основном определяют положение границы Γ_ε^* . Заметим, что аналогично тому, как старшие члены разложения (6.3) не принимали участия в ходе вывода равенства (6.6), для функции $\mathcal{V}_i^0(\varepsilon; r, \varphi, \sigma) + \varepsilon^5 \mathcal{V}_i^1(\varepsilon; r, \varphi, \sigma)$ независимо подстраивается функция пограничного слоя вида (6.3) с равными нулю вторым и четвертым членами.

7. Асимптотика контактного давления. Согласно представлению (4.1), давление под штампом на удалении от Γ_ε^* вычисляется по формуле

$$p(\varepsilon; \xi_1, \xi_2) \approx p^0(\varepsilon; \xi_1, \xi_2) + \varepsilon^5 p^1(\varepsilon; \xi_1, \xi_2) \quad (7.1)$$

Слагаемые выписаны в (4.3) и (5.2).

На основании равенств (6.3), (6.4) в окрестности Γ_ε^* получаем зависимость

$$p(\varepsilon; \xi_1, \xi_2) \approx -(2\pi)^{-1/2} k^{0*}(\sigma) \sqrt{v - h_\varepsilon^*(\sigma)}, \quad v \geq h_\varepsilon^*(\sigma) \quad (7.2)$$

Соотношения (7.1) и (7.2) представляют собой соответственно внешнее и внутреннее асимптотические представления. Следующая формула, объединяющая (7.1) и (7.2), дает для контактного давления равномерно пригодное асимптотическое представление

$$p(\varepsilon; \xi_1, \xi_2) \approx p_0 \sqrt{1 - \frac{\xi_1^2}{(a^*)^2} - \frac{\xi_2^2}{(a^*)^2(1-e^2)}} + \varepsilon^5 C^*(\xi_1, \xi_2) \quad (7.3)$$

Добиваясь совпадения двухчленной асимптотики (7.3) с (7.1), получаем

$$C^*(\xi_1, \xi_2) = -4\pi(a^*)^2(3\tilde{Q}^*)^{-1} \sqrt{1-c^2} (c_{00}^* + c_{20}^* \xi_1^2 + c_{02}^* \xi_2^2 + c_{40}^* \xi_1^4 + c_{22}^* \xi_1^2 \xi_2^2 + c_{04}^* \xi_2^4) \quad (7.4)$$

При этом поведение плотности (7.3) у края площадки контакта характеризуется формулой (7.2).

Заметим, что, преобразуя плотность контактных давлений (7.3) к исходным координатам x_1 и x_2 , следует вспомнить формулы (3.1) и $\partial/\partial x_i = \varepsilon^{-1} \partial/\partial \xi_i$, соотношения (1.7) и следующее: $p(x_1, x_2) \approx -\sigma_{33}(\mathbf{W}; \xi_1, \xi_2, 0)$ (см. (1.7) и (3.8)).

Как показано выше, асимптотика контактной силы $Q \approx \varepsilon^2 Q^* + \varepsilon^7 q^*$ отыскивается по внешнему асимптотическому представлению (7.1). Минувя вычисление плотности (5.2), явное выражение для поправки q^* можно получить через правую часть интегрального уравнения (5.1) на основании теоремы В.И. Моссаковского (см. [28], а также [26, § 10, гл. 2]) в виде

$$q^* = -\frac{\mu}{1-v} \left(a^* \sqrt{1-e^2} \mathbf{K}(e) \right)^{-1} \iint_{\omega_0^*} \frac{\Phi_0^*(\xi_1, \xi_2)}{H^*(\xi_1, \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \quad (7.5)$$

Опираясь на теорему взаимности, как это впервые было сделано [28], можно получить вдобавок аналогичную (7.5) формулу для полимоментов второго порядка

$$m_{2,n}^* = -\frac{\mu a^*}{2(1-\nu)\sqrt{1-e^2}} \iint_{\omega_0^*} \frac{\Pi_{2,n}^*(\xi_1, \xi_2) \Phi_0^*(\xi_1, \xi_2)}{H^*(\xi_1, \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \quad (7.6)$$

На основе известных результатов [3, 29] находим

$$\begin{aligned} \Pi_{2,0}^*(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{3K(e)} - \sum_{i=1}^2 \pi_i^*(\xi_1, \xi_2) \\ \Pi_{0,2}^*(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1-e^2}{3K(e)} - \sum_{i=1}^2 (3\sigma_i - 1) \pi_i^*(\xi_1, \xi_2) \\ \pi_i^*(\xi_1, \xi_2) &= C_i(e) [\sigma_i + (a^*)^{-2} \xi_1^2 - (3\sigma_{3-i} - 1)^{-1} (a^*)^{-2} \xi_2^2] \\ C_1(e) &= \frac{2(\sigma_1 - e^2)^2}{(3\sigma_1^2 - e^2)(1 - \sigma_1)[K(e) - 3\sigma_2 D(e_1)]} \\ C_2(e) &= \frac{2\sigma_1^2(3\sigma_1 - 1)^2}{(3\sigma_1 - e_1)(3\sigma_1^2 - e^2)[\sigma_1 C(e) + (2\sigma_1 - 1)D(e)]} \\ 3\sigma_{1,2} &= 1 + e^2 \pm \sqrt{1 - e^2 + e^4}; \quad C(e) = e^{-2}[2D(e) - K(e)] \end{aligned}$$

Интегралы (7.5), (7.6) легко вычисляются при помощи формулы (52.21) [3]. Заметим также, что для смешанного полимомента $m_{2,1}^*$ получается простой результат

$$\Pi_{2,1}^*(\xi_1, \xi_2) = 2[D(e) - C(e)]^{-1} (a^*)^{-2} \xi_1 \xi_2$$

Замечание. Пусть в упругий слой вдавлируется штамп, ограниченный поверхностью

$$x_3 = (2R_1)^{-1} x_1^2 + (2R_2)^{-1} x_2^2 + b_{40} x_1^4 + b_{22} x_1^2 x_2^2 + b_{04} x_2^4$$

Тогда на основании предыдущих рассмотрений для контактного давления под штампом имеем следующую, уточняющую (1.8), приближенную формулу:

$$p(x_1, x_2) = \frac{3Q}{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{a^2(1-e^2)}} + C(x_1, x_2) \quad (7.7)$$

где набор Q , a и e является решением задачи (1.9), (1.10). Полином четвертой степени $C(x_1, x_2)$ в (7.7) восстанавливается по формуле (7.4) по решению (5.2) интегрального уравнения (5.1) с правой частью $-\Phi_0^*(\xi_1, \xi_2) + b_{40}^* \xi_1^4 + b_{22}^* \xi_1^2 \xi_2^2 + b_{04}^* \xi_2^4$. При этом в последнем выражении и в формулах (7.4), (5.2), (5.1) убираются звездочки и переменные ξ_1, ξ_2 заменяются на x_1, x_2 .

8. Осесимметричная задача. Так как в данном случае по известным результатам [19, 29] легко может быть построено решение модельной задачи для внутреннего асимптотического представления (3.8), то выражение краевого условия одностороннего контакта (3.9) можно не упрощать, как это проделано в (3.13). Кроме того, выделение в (3.13) членов $O(\epsilon^5)$ только усложняет решение. Поэтому вместо формул (3.13) – (3.16), согласно соотношениям (3.6), (3.9) и (2.4) – (2.7), будем использовать следующие:

$$\begin{aligned} \delta_0^* - \Phi^*(\xi_1, \xi_2) - \epsilon V_3^*(\epsilon; \xi_1, \xi_2, 0) &= \delta_\epsilon^* - \Lambda_1^* \rho^2 - \Lambda_2^* \rho^4 \\ \delta_\epsilon^* &= \delta_0^* + \epsilon \frac{a_0}{H} \tilde{Q}^* + \epsilon^3 \frac{2a_1}{H^3} \tilde{M}_2^* + \epsilon^5 \frac{24a_2}{H^5} \tilde{M}_4^* \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\Lambda_1^* = \frac{1}{2R^*} - \epsilon^3 \frac{a_1}{H^3} \tilde{Q}^* - \epsilon^5 \frac{8a_2}{H^5} \tilde{M}_2^*, \quad \Lambda_2^* = -\epsilon^5 \frac{a_2}{H^5} \tilde{Q}^* \quad (8.2)$$

Здесь $\rho = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$ – полярный радиус в системе координат (3.1), $\mathcal{M}_m^*$ – полярный полимомент порядка m , вычисляемый по формуле (ср. с (3.11))

$$\mathcal{M}_m^* = -\frac{1}{m!} \iint_{\omega_\varepsilon^*} (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{m/2} \sigma_{33}(\mathbf{W}; \xi_1, \xi_2, 0) d\xi_1 d\xi_2, \quad m = 2, 4 \quad (8.3)$$

Для плотности контактных давлений по формулам [19] (см. гл. 3, § 2) находим выражение

$$p(\varepsilon; \rho) = \frac{8\mu a^*}{\pi(1-\nu)} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{(a^*)^2}} \left(\Lambda_1^* + \frac{8}{9}(a^*)^2 \Lambda_2^* + \frac{16}{9} \Lambda_2^* \rho^2 \right) \quad (8.4)$$

Здесь a^* – радиус площадки контакта, для определения которого имеем уравнение

$$\delta_\varepsilon^* = 2\Lambda_1^*(a^*)^2 + \frac{8}{3}\Lambda_2^*(a^*)^4 \quad (8.5)$$

Интегрируя плотность (8.4), конкретизируем первое условие срачивания (3.10)

$$Q^* = \frac{16\mu}{3(1-\nu)} (a^*)^3 \left(\Lambda_1^* + \frac{8}{5}(a^*)^2 \Lambda_2^* \right) \quad (8.6)$$

В осесимметричной задаче условия срачивания (3.11) заменяются на (8.3). Подставляя выражение (8.4) в (8.3), выводим

$$\mathcal{M}_2^* = \frac{16\mu(a^*)^5}{15(1-\nu)} \left(\Lambda_1^* + \frac{40}{21}(a^*)^2 \Lambda_2^* \right), \quad \mathcal{M}_4^* = \frac{16\mu(a^*)^7}{315(1-\nu)} \left(\Lambda_1^* + \frac{56}{27}(a^*)^2 \Lambda_2^* \right) \quad (8.7)$$

Система уравнений (8.5) – (8.7) служит для определения величин a^* , Q^* , $\mathcal{M}_2^*$ и $\mathcal{M}_4^*$. Подставим второе выражение (8.1) и выражение (8.2) в соотношения (8.5) – (8.7) и, пренебрегая величинами более высокого порядка малости по сравнению с удержанными в (8.1) и (8.2), вычленим уравнения, связывающие величины δ_0^* и a^* , Q^* . Так, ограничиваясь в (8.7) главными членами асимптотики, уравнения (8.5) и (8.6) преобразуем к виду

$$\delta_0^* = \frac{(a^*)^2}{R^*} - \varepsilon \frac{a_0}{H} \tilde{Q}^* - \varepsilon^3 \frac{16a_1}{5\pi} \frac{(a^*)^5}{H^3 R^*} - \varepsilon^5 \frac{512a_2}{63\pi} \frac{(a^*)^7}{H^5 R^*} \quad (8.8)$$

$$\tilde{Q}^* = \frac{4}{3\pi} \frac{(a^*)^3}{R^*} \left(1 - \varepsilon^3 \frac{8a_1}{3\pi} \frac{(a^*)^3}{H^3} - \varepsilon^5 \frac{128a_2}{15\pi} \frac{(a^*)^5}{H^5} \right) \quad (8.9)$$

Следствием уравнений (8.8), (8.9) будет такое:

$$\tilde{Q}^* = \frac{4}{3\pi} \delta_0^* a^* \left(1 - \varepsilon \frac{4a_0}{3\pi} \frac{a^*}{H} \right)^{-1} \left(1 + \frac{(a^*)^2}{\delta_0^* R^*} \left[\varepsilon^3 \frac{8a_1}{15\pi} \frac{(a^*)^3}{H^3} - \varepsilon^5 \frac{128a_2}{315\pi} \frac{(a^*)^5}{H^5} \right] \right) \quad (8.10)$$

Следуя описанному ранее подходу [3], введем большой параметр $\lambda = H/a$, где $a = \varepsilon a^*$ – фактический радиус площадки контакта. Тогда при учете соотношений (1.2) и (2.8) уравнение (8.9) запишем в виде

$$\tilde{Q} = \frac{4}{3\pi} \frac{a^3}{R} \left(1 - \lambda^{-3} \frac{8a_1}{3\pi} - \lambda^{-5} \frac{128a_2}{15\pi} \right) \quad (8.11)$$

Наконец, при помощи равенств (8.8) и (8.9) уравнению (8.10) придаем форму

$$\tilde{Q} = \frac{4}{3\pi} \delta_0 a \left[\left(1 - \lambda^{-1} \frac{4a_0}{3\pi} \right)^{-1} + \lambda^{-3} \frac{8a_1}{15\pi} \left(1 + \lambda^{-1} \frac{8a_0}{3\pi} \right) + \lambda^{-5} \frac{128}{45\pi} \left(\frac{a_0 a_1}{\pi} - \frac{a_2}{7} \right) \right] \quad (8.12)$$

Соотношения (8.11) и (8.12) уточняют известный результат [3] (см. формулы (49.2) и (49.3)).

Замечание. Было введено [30] своеобразное "понятие структурной устойчивости решения контактной задачи линейной теории упругости как сохранение диффеоморфной эквивалент-

ности контактным давлением при малом возмущении форм тел". Построенный в [30] пример структурной неустойчивости в осесимметричной задаче для штампа с функцией формы $\Phi(\rho) = \Lambda_1 \rho^2 + \Lambda_2 \rho^4$ лишен механического содержания.

Действительно, известно [19] (см. также [31]), что уравнение, связывающее перемещение штампа δ_0 с радиусом площадки контакта a , имеет вид (8.5). Положительный корень квадратного уравнения (8.5) можно преобразовать к виду

$$a^2 = \delta_0 (\Lambda_1 + \sqrt{\Lambda_1^2 + \frac{8}{3} \Lambda_2 \delta_0})^{-1} \quad (8.13)$$

Как и в [30], примем, что исходная форма штампа задается членом $\Lambda_1 \rho^2$, а член $\Lambda_2 \rho^4$ будет возмущающим. Тогда при фиксированном значении глубины вдавливания штампа δ_0 величина правой части равенства (8.13) будет мало отличаться от заданного значения $\delta_0/(2\Lambda_1)$ при любом достаточно малом возмущении. К данному выводу приходим и в случае фиксированного значения вдавливающей штамп силы Q (см. уравнение (8.6)).

Однако если, как это было сделано в [30], вначале на величины a , Λ_1 и Λ_2 наложить связь

$$8\Lambda_2 a^2 = 3\Lambda_1 \quad (8.14)$$

то из этого же уравнения связи вытекает $a^2 = 3\Lambda_1/(8\Lambda_2)$. И как следствие последнего равенства получается, что величина a радиуса площадки контакта, а "вместе с ней и сжимающее усилие могут быть очень большими при малом возмущении", т.е. когда величина Λ_2 очень мала [30]. Подчеркнем, что данный вывод получен непосредственно из априори наложенной на величины a , Λ_1 и Λ_2 связи (8.14), возникшей в [30] из (не имеющего механического смысла) требования, чтобы вторая производная плотности контактного давления (8.4) по радиусу обращалась в нуль в центре площадки контакта.

9. Заключение. Напомним, что построенное приближенное решение контактной задачи для упругого слоя сохраняет силу и, например, в случае давления штампа на центр упругой круговой плиты. Необходимо только рассчитать значения соответствующих коэффициентов (см. (2.5) – (2.7)), характеризующих размеры плиты и условия ее закрепления.

Ясно, что эффективность реализации используемого метода [21] при решении модельной задачи одностороннего контакта опирается на возможность построения в явном виде решения контактной задачи с эллиптической площадкой контакта. Поэтому вопрос о дальнейшем уточнении полученных результатов остается открытым. В случае осесимметричной задачи построение следующих приближений не встречает принципиальных затруднений.

Автор благодарит С.А. Назарова за обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (0001-00455) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS-96-0876).

ЛИТЕРАТУРА

1. Duvaut G., Lions J.-L. Les inéquations en mécanique et en physique. Paris: Dunod, 1972. = Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: Изд-во Моск. гос. акад. приборостроит. и информатики, 1997. 339 с.
3. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
4. Александров В.М., Ворович И.И. О действии штампа на упругий слой конечной толщины // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 323–333.
5. Порошин В.С. К вопросу об ограниченности контактных давлений на контуре эллиптического в плане штампа, взаимодействующего с упругим слоем // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 466–472.

6. Лубягин И.А., Пожарский Д.А., Чебаков М.И. Внедрение штампа в форме эллиптического параболоида в упругий пространственный клин // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 286–295.
7. Александров В.М., Шматкова А.А. Вдавливание параболического штампа в упругий слой и двух параболических штампов в упругое полупространство // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 4. С. 149–155.
8. Александров В.М. Некоторые контактные задачи для упругого слоя // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 758–764.
9. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
10. Аргатов И.И. Вдавливание штампа в форме эллиптического параболоида в плоскую границу упругого тела // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 4. С. 671–679.
11. Van Dyke M.D. Perturbation methods in fluid mechanics. N.Y.; L.: Acad. Press, 1964. = Ван-Дайк М.Д. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
12. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
13. Mazja V.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Bd. 1. В.: Akademie-Verlag, 1991. 432 S.
14. Александрова Г.П. Контактные задачи изгиба плит, лежащих на упругом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 1. С. 97–106.
15. Макушкин А.П. Напряженно-деформированное состояние упругого слоя при внедрении в него сферического индентора. I. Определение контактного давления // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 3. С. 423–434.
16. Александров В.М., Kalker J.J., Пожарский Д.А. Пространственная контактная задача для двухслойного упругого основания с заранее неизвестной областью контакта // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 4. С. 51–55.
17. Аргатов И.И. Об улучшении асимптотического решения, получаемого по методу сращиваемых разложений в контактной задаче теории упругости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40. № 4. С. 623–632.
18. Аргатов И.И. Асимптотическое решение контактной задачи для трехмерного упругого тела конечных размеров // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 6. С. 1001–1007.
19. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
20. Довнорович В.И. Пространственные контактные задачи теории упругости. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1959. 107 с.
21. Назаров С.А. О возмущениях решений задачи Синьорини для скалярного уравнения второго порядка // Мат. заметки. 1990. Т. 47. № 1. С. 115–126.
22. Аргатов И.И. Давление на упругое полупространство штампа с поверхностью, близкой к эллиптическому параболоиду // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2000. № 1. С. 101–105.
23. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
24. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
25. Назаров С.А., Полякова О.Р. Критерии разрушения, асимптотические условия в вершинах трещин и самосопряженные расширения оператора Ламе // Тр. Моск. мат. о-ва. 1996. Т. 57. С. 16–75.
26. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
27. Назаров С.А. Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 152–160.
28. Моссаковский В.И. Применение теоремы взаимности к определению суммарных сил и моментов в пространственных контактных задачах // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 4. С. 477–482.
29. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
30. Шачнев В.А. О структурной неустойчивости контактной задачи теории упругости // Автоматизация и компьютеризация информационной техники и технологии. Науч. тр. Моск. гос. ун-та леса. М.: Изд-во МГУЛ, 1999. Вып. 300. С. 70–73.
31. Фел Л.Г. К контактной задаче теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 4. С. 78–81.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
29.VIII.2000