

УДК 532.5

© 2001 г. А.В. Вильчинский, В.А. Чугунов

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЛЬДА
В РАЗЛИЧНЫХ ЗОНАХ ЛЕДНИКОВ**

В рамках закона течения Глена методами возмущений строится упрощенная модель плоского изотермического стационарного течения льда в наземной части, шельфе, переходной зоне ледник – шельф ледника, взаимодействующего с морем. Получены граничные условия для наземной части ледника на линии налегания. Анализируется динамика зоны ледораздела ледника при осесимметричном нестационарном изотермическом течении льда.

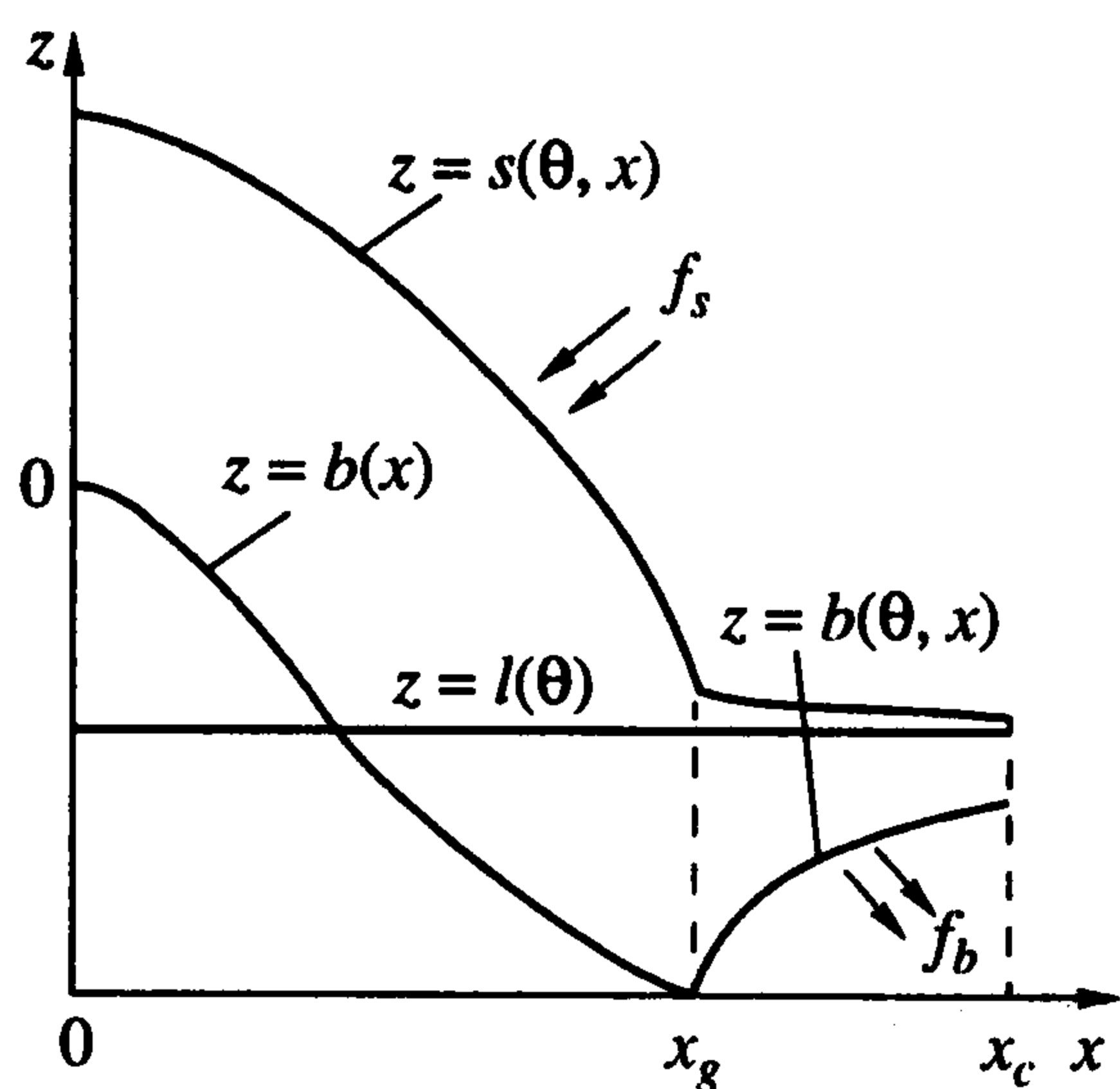
Лабораторные исследования [1] показали, что движение льда может быть описано в рамках модели течения несжимаемой жидкости со степенным реологическим законом и коэффициентом ползучести, близким к трем (закон Глена). Для ледников число Рейнольдса имеет порядок 10^{-11} , поэтому используется приближение Стокса, описывающее безынерционное течение. Было показано [2], что для многих ледников влияние температуры может быть учтено выбором ее характерного значения в придонном слое. В связи с этим далее ограничимся рассмотрением двумерного изотермического течения. Также будем предполагать отсутствие абляции и проскальзывания льда на ложе [3] (которое считается твердым), пренебрегать вязкостью воды по сравнению с вязкостью льда (в области плавления льда) и высокочастотными составляющими функции профиля ложа (характерные наклоны ложа и верхней поверхности наземного ледника полагаем равными).

При изучении морских ледников (фиг. 1) выделяют четыре части: наземный ледник, шельфовый ледник (далее просто шельф – плавающая часть ледника), переходная зона ледник – шельф и область ледораздела (ледораздел – центр растекания льда). В последней зоне бурятся большинство скважин, так как в ней горизонтальные скорости минимальны, что облегчает датировку добытого керна. При моделировании плоского течения часто предполагают, что ледник симметричен относительно стационарной плоскости симметрии, которая в данном случае и определяет ледораздел. При осесимметричном течении ледораздел совпадает с осью симметрии.

Стационарное течение наземного ледника возможно при нулевом балансе массы через его верхнюю поверхность и стока в шельфовый ледник. Стационарное состояние шельфового ледника обеспечивается нулевым балансом притока льда из наземного ледника, через поверхность и оттока вследствие скола айсбергов.

Наземная часть ледника и шельф характеризуются малым отношением их характерных толщин к длинам (например, длина, толщина и характерное время изменения наземных частей ледников Антарктиды оцениваются как 10^3 км, 3 км и 10^4 лет). Это позволяет упростить задачу с помощью приближения тонкого слоя и получить модели, описывающие сдвиговое течение в наземной части ледника [4] (когда на ложе ставится условие прилипания) и течение растяжения в шельфе [5]. Однако для решения данных задач необходимо знание условий сопряжения толщины льда на линии налегания (где лед начинает всплывать), которые являются граничными условиями на функцию толщины льда для задач наземного ледника и шельфа. Для определения данных условий необходимо исследование переходной зоны ледник – шельф, в которой упрощение тонкого слоя непригодно и где сдвиговые и нормальные напряжения имеют один порядок, так как происходит переход от сдвигового течения в наземной части ледника к течению растяжения в шельфе.

Как правило, на линии налегания ставятся условия гидростатического равновесия льда и баланса массы [6], упрощенные в приближении тонкого слоя, что, вообще говоря, необосно-



Фиг. 1

ванно. Эти соотношения были модифицированы [7] за счет использования неизвестного параметра, характеризующего отклонение нормального девиаторного напряжения, полученного в приближении тонкого слоя, от его истинной величины. Однако алгоритм нахождения значения этого параметра не был определен. В то же время, как показали численные эксперименты [8], положение линии налегания чувствительно к изменению параметров, входящих в граничное условие на ней. Поэтому возникает задача нахождения неизвестных полей в переходной зоне и получения строго обоснованных граничных условий на линии налегания. Был проведен [9] анализ данной задачи для льда с постоянной вязкостью, но так как вязкость льда нелинейна, применимость этих результатов ограничена и необходимо рассмотреть общий случай степенной реологии.

Математическая модель наземного ледника, полученная упрощением тонкого слоя, найдена в пренебрежении нормальных девиаторных напряжений. В данном случае при степенном реологическом законе вязкость пропорциональна отрицательной степени величины сдвигового напряжения. Это приводит к непригодности данной модели в области ледораздела, так как на плоскости (или оси) симметрии ледника касательные напряжения равны нулю, а это приводит к бесконечной вязкости. Данная особенность определяет бесконечную кривизну верхней поверхности на ледоразделе [10]. Было показано [11], что при плоском течении льда в области ледораздела касательные и нормальные напряжения имеют один порядок, поэтому необходимо решать полную систему Стокса. Упрощенная модель динамики области ледораздела при плоском течении льда была построена [12] методами возмущений. Однако по форме многие ледовые купола почти осесимметричны, поэтому необходим математический анализ соответствующей задачи. Ранее данная проблема решалась только численно [13], при этом рассматривалось стационарное течение.

Сказанное выше определяет цель работы – построение обоснованно упрощенной математической модели, во-первых, ледникового покрова, взаимодействующего с океаном при плоском, стационарном течении льда (разд. 2), учитывающей особенности его основных зон: наземного ледника, шельфа и переходной зоны ледник – шельф; во-вторых, ледораздела наземного ледника при осесимметричном нестационарном течении льда (разд. 3).

1. Основные уравнения. Рассмотрим плоское или осесимметричное течение ледника, втекающего в океан (фиг. 1). Поместим начало декартовой или цилиндрической системы координат на уровень ложа на ледоразделе. Ось z направлена вверх и принадлежит плоскости симметрии при плоском течении или совпадает с осью симметрии при осесимметричном течении, а ось x направлена горизонтально вдоль течения. Область $0 < x < x_g$, где x_g – положение линии налегания, будет определять наземную часть ледника, а область $x_g < x < x_c$, где x_c – линия скола шельфа – плавающую.

Обозначения: θ – время, $s(\theta, x)$ – профиль верхней поверхности ледника, $b(\theta, x)$ – профиль нижней поверхности ледника, совпадающий в области $x < x_g$ с подъемом неподвижного жесткого ложа, p – давление, u – горизонтальная скорость частиц вдоль оси x , w – вертикальная скорость частиц, $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ – соответственно сдвиговое и нормальные девиаторные напряжения вдоль осей x, z и ϕ (в случае осесимметричного течения), μ^* – коэффициент эффективной вязкости, η – реологическая постоянная при реологическом законе [1]

$$\mu^* = 2^{1/\alpha-1} \eta^{1/\alpha} e_{(2)}^{(1-\alpha)/(2\alpha)}, \quad e_{(2)} = \frac{1}{2} \left[u_x^2 + w_z^2 + \frac{1}{2} (u_z + w_x)^2 + \left(\frac{nu}{x} \right)^2 \right]$$

где $e_{(2)}$ – второй инвариант тензора скоростей деформаций, $\alpha \geq 1$ – коэффициент ползучести, $f_s, (-f_b)$ – скорости аккумуляции льда на верхней и нижней поверхностях

соответственно (предполагается отсутствие абляции на ложе: $f_b = 0$, $x < x_g$), g – ускорение свободного падения, ρ_i , ρ_w – плотности льда и воды, l – уровень океана, $k = \rho_i/\rho_w$, $\delta = 1 - k$ – нормированная разность между плотностями воды и льда, ε – характерный наклон поверхности ледника, $n = 0$ при плоском течении и $n = 1$ при осесимметричном. Далее в различных выражениях t_i , T_i и e_i , E_i с точностью до множителей имеют физический смысл напряжений и скоростей деформации, а нижние индексы, соответствующие независимым переменным, означают частные производные.

Нестационарное течение льда в выбранной системе координат при учете несжимаемости льда описывается уравнениями Стокса

$$\begin{aligned} -(x^n p)_x + (x^n \tau_2)_x + (x^n \tau_1)_z &= n(-p + \tau_4) \\ -(x^n p)_z + (x^n \tau_1)_x + (x^n \tau_3)_z &= x^n \rho_i g \\ \tau_2 + \tau_3 + n\tau_4 &= 0, \quad (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = \mu^* \left(u_z + w_x, 2u_x, 2w_z, \frac{2u}{x} \right) \\ \mu^* &= \eta^{1/\alpha} \left[2u_x^2 + 2w_z^2 + (u_z + w_x)^2 + 2 \left(\frac{nu}{x} \right)^2 \right]^{(1-\alpha)/(2\alpha)}, \quad 0 < x < x_c, \quad b < z < s \end{aligned} \quad (1.1)$$

причем выражение для эффективной вязкости следует из определения реологического закона, приведенного выше.

Граничные условия определяются рассматриваемым процессом. На верхней поверхности напряжения равны нулю и действует закон сохранения массы. На ложе используется условие прилипания [3]. На нижней поверхности льда в области его плавления касательное напряжение равно нулю (при пренебрежении вязкостью воды), нормальное – гидростатическому давлению воды и выполняется закон сохранения массы. На ледоразделе течение предполагается симметричным и горизонтальная скорость равна нулю. На линии скола шельфа, положение которой считается заданным, как будет видно при решении, достаточно определить величину нормальной силы [14], значение которой в воде известно. Итак, граничные условия имеют вид

$$z = s: \quad s_x(-p + \tau_2) = \tau_1, \quad s_x \tau_1 = -p + \tau_3, \quad s_\theta + u s_x = w + f_s \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} z = b, \quad x > x_g: \quad b_x(p - \tau_2) &= b_x(l - b)\rho_w g - \tau_1, \quad b_x \tau_1 + p - \tau_3 = (l - b)\rho_w g \\ b_\theta + u b_x &= w + f_b \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$z = b, \quad x < x_g: \quad u = w = 0; \quad x = 0: \quad u = w_x = 0 \quad (1.4)$$

$$x = x_c: \quad \int_b^s (-p + \tau_2) dx = -\frac{1}{2} \rho_w g (l - b)^2 \quad (1.5)$$

Вдали от океана течение льда описывается в приближении тонкого слоя, где главную роль играют касательные напряжения и отношение характерной толщины льда к длине наземного ледника ε мало.

Далее будем опускать начальные условия для поверхности льда.

Для приведения соотношений (1.1) – (1.5) к безразмерному виду используем масштабы, найденные с помощью теории подобия [4] (ниже обозначаемые квадратными скобками):

$$\begin{aligned} [p] &= \rho_i g [z], \quad [w] = [f_s] = [f_b], \quad [u] = [x][f_s][z]^{-1}, \quad [s] = [z] = [b] = [l] = \varepsilon [x] \\ \varepsilon &= ([f_s] \eta (\rho_i g)^{-\alpha} [x]^{-\alpha-1})^{1/(2\alpha+2)}, \quad [\mu^*] = \eta^{1/\alpha} ([x][f_s][z]^{-2})^{1/\alpha-1}, \quad [\theta] = [z][f_s]^{-1} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Масштаб длины ледника $[x]$ и скорости аккумуляции льда на поверхности $[f_{s,b}]$ определяются из наблюдений. Физически данная связь между ε , f_s и остальными пара-

метрами обеспечивает равенство масштабов удельной силы, вызванной вертикальным изменением сдвигового напряжения и горизонтального перепада давления.

Рассматриваем случай, когда амплитуда высокочастотных составляющих функций профиля ложа мала по сравнению с толщиной льда, и поэтому будем ими пренебрегать, а именно считаем, что $h_s = O(\varepsilon)$, $x < x_g$. Предполагаем, что в точке $x = 0$ профиль ложа описывается гладкой кривой, поэтому вследствие симметрии $h_x(0) = 0$.

2. Построение модели морского ледника при плоском стационарном течении льда. Предполагаем, что стационарное течение ледника существует. Перейдем к безразмерным координатам, обозначенным прописными буквами. Так как главная задача данного раздела связана с моделированием переходной зоны, перенесем для удобства записи формул систему координат в точку ложа на линии налегания, которая в данном случае будет определяться как $X = 0$. Естественно, что при этом положение ледораздела задается выражением $X = -X_g$.

Система (1.1) – (1.5) при $n = 0$ может быть сведена к задаче определения функции тока $\Psi(U = \Psi_Z, W = -\Psi_X)$ и неизвестных верхней поверхности льда S и нижней поверхности шельфа ($X > 0$) B :

$$T_{1ZZ} + 2\varepsilon^2 T_{2XZ} - \varepsilon^2 T_{1XX} = 0, \quad -X_g < X < X_c, \quad B < Z < S \quad (2.1)$$

$$Z = S: \quad E_1(1 - \varepsilon^2 S_X^2) = 2\varepsilon^2 S_X E_2, \quad \Psi = \int_{-X_g}^X F_s dX \quad (2.2)$$

$$Z = B, \quad X < 0: \quad \Psi = \Psi_Z = 0 \quad (2.3)$$

$$Z = B, \quad X > 0: \quad E_1(1 - \varepsilon^2 B_X^2) = 2\varepsilon^2 B_X E_2, \quad \Psi = \int_0^X F_b dX \quad (2.4)$$

$$X = -X_g: \quad \Psi_Z = \Psi_{XX} = 0 \quad (2.5)$$

где

$$(T_1, T_2) = \mu(E_1, E_2), \quad E_1 = \Psi_{ZZ} - \varepsilon^2 \Psi_{XX}, \quad E_2 = 2\Psi_{XZ}, \quad \mu = [\varepsilon^2 E_2^2 + E_1^2]^{(1-\alpha)/(2\alpha)}$$

Уравнения поверхностей льда имеют вид

$$H^2 - \frac{1}{k}(L - B)^2 = 2\varepsilon^2 G, \quad B - S + kH = k\varepsilon^2 T_x \quad \text{при } X > 0, \quad B(+0) = 0 \quad (2.6)$$

$$H^2 - \frac{1}{k}L^2 = 2\varepsilon^2 G + 2 \int_{-X_g}^0 (HB_X + [IB_X + (1 + \varepsilon^2 B_X^2)\mu\Psi_{ZZ}]_{Z=B}) dX \quad \text{при } X < 0 \quad (2.7)$$

где для краткости используются следующие обозначения интегральных сил:

$$G = \int_B^S [2T_2 + J_X] dZ, \quad I = -\varepsilon^2 [T_2 + J_X], \quad J = \int_Z^S T_1 dZ, \quad T = J|_{Z=B}, \quad H = S - B \quad (2.8)$$

Уравнения (2.1) – (2.5) получены из задачи (1.1) – (1.5) исключением функции p . Первое равенство (2.6) и равенство (2.7) – это результат последовательного интегрирования первого уравнения (1.1) по z от b до s , а также по x от x до x_c и от x до x_g соответственно. Второе соотношение (2.6) получено из второго уравнения (1.1) интегрированием по z от b до s .

После приведения к безразмерным переменным полученные уравнения принимают вид (2.1) – (2.7).

С физической точки зрения первое равенство (2.6) и равенство (2.7) – это уравнения баланса сил для объемов льда, определенных областями (X, X_c) и $(X, 0)$, а второе уравнение (2.6) – для сечения $X = \text{const}$. Далее аналогичные уравнения для определения

поверхностей льда будут получены из (2.6), (2.7) преобразованием координат и поэтому имеют такой же физический смысл.

Использование уравнений в интегральном виде для определения поверхности льда вызвано тем, что напряжения могут на них вырождаться (это видно, например, из приводимых ниже соотношений (2.9)), что затрудняет анализ.

Все земные ледники характеризуются характерным наклоном поверхности ледника $\epsilon \approx 10^{-2}-10^{-3}$. Этот параметр отражает условия их существования.

Модель наземного ледника. Внешние разложения $\bar{\Psi}, \bar{S}$ функций тока Ψ и высоты поверхности S в области наземного ледника ($X < 0$) ищем в виде

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_0 + O(\epsilon^2), \quad \bar{S} = \bar{S}_0 + O(\epsilon^2)$$

Тогда из соотношений (2.1) – (2.8) находим аналогично изложенному ранее [4]

$$\bar{\Psi}_0 = \frac{Q}{\alpha+1} \left[(\alpha+2) \frac{Z-B}{\bar{H}_0} - 1 + \frac{(\bar{S}_0 - Z)^{\alpha+2}}{\bar{H}_0^{\alpha+2}} \right]$$

$$\bar{S}_{0,x} = - \left[(\alpha+2) \frac{Q}{\bar{H}_0^{\alpha+2}} \right]^{1/\alpha}; \quad Q = \int_{-X_g}^X F_s dX^-, \quad \bar{H}_0 = \bar{S}_0 - B \quad (2.9)$$

Здесь Q – горизонтальный поток массы.

Уравнение (2.9) для верхней поверхности льда не включает функцию тока и служит для определения профиля поверхности ледника вдали от линии налегания. Данная задача может быть решена численно, так как при произвольном профиле ложа ее решение аналитически затруднено. Если ложе плоское и горизонтальное, а скорость аккумуляции постоянна, то аналитическое решение данной задачи хорошо известно [15]. Так как (2.9) – уравнение первого порядка, то для получения единственного решения необходимо найти высоту поверхности внешнего разложения на линии налегания $\bar{S}_0(0)$ и величину X_g , которая также неизвестна. Эти параметры должны быть определены из сращивания профилей верхних поверхностей для различных зон ледника.

Построенное внешнее разложение характеризуется бесконечной кривизной верхней поверхности в точке $X = -X_g$, вблизи которой оно непригодно [10, 11]. Данная особенность может быть учтена построением внутреннего разложения в области ледо-раздела [12].

Модель течения льда в шельфе. Для применения теории методов возмущений при моделировании течения льда в шельфе необходимо перейти в систему координат, нормированных на масштабы, характерные для данной области течения. Характерные длины шельфа и наземного ледника примем равными. Введем неизвестный масштаб толщины шельфа $[z_s]$ и величину $\Delta_s = [z_s]/[z] \ll 1$. Перейдем к переменным

$$(\tilde{X}, \tilde{\Psi}) = (X, \Psi), \quad \tilde{V} = \frac{V}{\Delta}, \quad V = (Z, S, B, L), \quad \epsilon_s = \frac{[z_s]}{[x]} \ll \epsilon$$

В новых переменных уравнение и краевые условия для функции тока выглядят аналогично (2.1) – (2.5), если в данных уравнениях заменить символы (X, Z, ϵ) на $(\tilde{X}, \tilde{Z}, \epsilon_s)$ соответственно.

Уравнения поверхностей льда (2.6) дают

$$\tilde{H}^2 = \frac{2^{2+1/\alpha}}{\delta} \left(\frac{\epsilon}{\Delta_s} \right)^{1+1/\alpha} \int_{\tilde{B}}^{\tilde{S}} \tilde{\Psi}_{\tilde{X}\tilde{Z}}^{1/\alpha} d\tilde{Z} + O(\epsilon_s^2), \quad \tilde{H} = \tilde{S} - \tilde{B} \quad (2.10)$$

Приравняв множитель перед скобкой единице, можно найти характерную толщину шельфа. В случае произвольного масштаба длины шельфа $[x_s] \ll [x]$ данная формула

получается аналогично и имеет вид

$$[z_s] = (\eta 2^{2\alpha+1} (\rho_i g \delta)^{-\alpha} [x][f_s][x_s]^{-1})^{1/(\alpha+1)} \quad (2.11)$$

Разложив искомые функции в асимптотические ряды по степеням ϵ_s^2 и учитывая, что, как следует из уравнения (2.1), $\tilde{\Psi}_{\bar{z}\bar{z}} = O(\epsilon_s^2)$, найдем главные члены внешнего разложения

$$\tilde{\Psi}_0 = Q \frac{\tilde{Z} - \tilde{L}}{\tilde{H}_0} + kQ + \int_0^{\tilde{X}} F_b dX, \quad \tilde{S}_0 = \tilde{L} + \delta \tilde{H}_0, \quad \tilde{B}_0 = \tilde{L} - k \tilde{H}_0 \quad (2.12)$$

$$\tilde{H}_0 = Q \left(A + (\alpha + 1) \int_0^{\tilde{X}} Q^\alpha dX \right)^{-1/(\alpha+1)}; \quad Q = \int_{-\tilde{X}_g}^{\tilde{X}} F dX, \quad F = F_s - F_b, \quad A = \text{const}$$

Полученное аналитическое решение, описывающее течение растяжения (превалирование нормальных напряжений над касательными), совпадает с найденным ранее (см. работу [5] и ссылки в ней), однако связь масштабов длины и толщины шельфа (2.11) получена впервые. Данное решение описывает "плиточное" течение, характеризующееся отсутствием изменения горизонтальной скорости по вертикали. Параметр A определяется из сращивания разложений для различных зон и определяет толщину льда внешнего разложения на линии налегания. Очевидно, что наличие притока льда из наземного ледника соответствует конечной толщине льда на линии налегания, и если $0 < A < \infty$, то стационарное течение шельфового ледника реализуется.

Внешние разложения для функции тока в областях наземного ледника и шельфа невозможно срастить без введения пограничного слоя в окрестности точки $X = 0$ и построения внутреннего разложения, которое и будет определять переходную зону.

Модель переходной зоны. Найдем пространственные масштабы переходной зоны. Учитывая условия прилипания на ложе, в качестве вертикального масштаба естественно выбрать масштаб толщины льда. Определим горизонтальный масштаб. Отметим, что в области шельфа преобладают нормальные напряжения, в то время как в наземной части ледника – касательные. Поэтому в переходной зоне, где происходит смена режима течения, величины нормальных и касательных напряжений имеют один порядок. В наземной части ледника в первом уравнении (1.1) определяющими являются только два члена: градиент давления и удельная сила, вызванная сдвиговыми деформациями. В шельфе же все силы (члены в первом уравнении (1.1)) равнозначимы. Поэтому в данном уравнении, относящемся к переходной зоне, все члены должны иметь один порядок, что возможно, только если горизонтальный и вертикальный масштабы совпадают. Таким образом, горизонтальный пространственный масштаб переходной зоны равен масштабу толщины льда на линии налегания, и в частности отношение между ними не зависит от ϵ и δ . Кроме того, так как в переходной зоне масштабы напряжений, так же как пространственные масштабы, одинаковы, то невозможно срастить поверхности льда и получить граничные условия на линии налегания только из балансовых уравнений. Это может быть показано интегрированием уравнений движения по области переходной зоны (см. ниже соотношение (2.15), которое не удастся упростить до формы, не содержащей значения функции тока в переходной зоне).

Обозначим толщину льда на линии налегания через $\Delta = H(0)$. Введем переменные внутреннего разложения

$$\xi = \frac{X}{\epsilon \Delta}, \quad (y, \chi, \vartheta, \gamma, h) = \frac{1}{\Delta} (Z, S, B, L, H), \quad \psi = \frac{\Psi}{Q_0}; \quad Q_0 = \int_{-\tilde{X}_g}^0 F_s dX$$

где Q_0 – (неизвестный) поток массы на линии налегания, и перепишем соотношения

(2.1) – (2.8) в новых переменных

$$\begin{aligned} t_{1yy} + 2t_{2\xi y} - t_{1\xi\xi} &= 0, \quad -\infty < \xi < +\infty, \quad \vartheta < y < \chi \\ y = \chi: \quad e_1(1 - \chi_\xi^2) &= 2\chi_\xi e_2, \quad \psi = 1 + O(\varepsilon); \quad y = \vartheta, \quad \xi < 0: \quad \psi = \psi_y = 0 \\ y = \vartheta, \quad \xi > 0: \quad e_1(1 - \vartheta_\xi^2) &= 2\vartheta_\xi e_2, \quad \psi = O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$e_1 = \psi_{yy} - \psi_{\xi\xi}, \quad e_2 = 2\psi_{\xi y}, \quad (t_1, t_2) = \mu(e_1, e_2), \quad \mu = (e_1^2 + e_2^2)^{(1-\alpha)/(2\alpha)}$$

Уравнения для высоты поверхностей (баланс сил) имеют вид

$$\beta h^2 + 2kht_\xi - k\delta\beta^{-1}t_\xi^2 = 2\zeta, \quad \vartheta - \gamma + kh = k\delta\beta^{-1}t_\xi \quad \text{при } \xi > 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{2}\chi^2 - \chi\vartheta - \frac{\gamma^2}{(2k)} = \delta\beta^{-1} \left[\zeta + \int_{\xi}^0 (\mu\psi_{yy})_{y=\vartheta} d\xi \right], \quad \vartheta = O(\varepsilon) \quad \text{при } \xi < 0 \quad (2.15)$$

$$\beta = \delta\varepsilon^{-1}\Delta^{1+2/\alpha}Q_0^{-1/\alpha}, \quad \vartheta(+0) = 0 \quad (2.16)$$

где используются следующие обозначения интегральных сил:

$$\zeta = \int_{\vartheta}^{\chi} (2t_2 + j_\xi) dy, \quad j = \int_y^{\chi} t_1 dy, \quad t = j|_{y=\vartheta}$$

В данных переменных в переходной зоне наклон ложа и приток массы через поверхность вследствие накопления осадка оцениваются как $O(\varepsilon)$, а наклон верхней поверхности – как $O(\delta)$, что следует из второго уравнения (2.14), причем для ледников $\delta = 0.1$.

В данной постановке, где уравнения для функций тока и профиля верхней поверхности льда справедливы во всей области течения льда, предполагается гладкость указанных функций. Поэтому уравнением для определения величины параметра β будет условие сопряжения для нижней поверхности на линии налегания (второе уравнение (2.16)). Значения параметра β и уровня океана γ , неизвестного во внутренних координатах, определяют X_g и $H(0)$.

Вследствие перехода к безразмерным величинам в переходной зоне имеем

$$h = O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0$$

Асимптотический анализ первого уравнения (2.14) показывает, что $\beta = O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, иначе существует такая последовательность ε_n , $n \rightarrow \infty$, что $t_\xi \rightarrow 0$ или $t_\xi \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$; это противоречит выводу о равенстве пространственных масштабов переходной зоны, эквивалентного требованию о единичном порядке производных во внутренних переменных при $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Аналогичный анализ показывает, что

$$\beta = O(\delta^m), \quad \delta \rightarrow 0, \quad 0 \leq m \leq 1$$

Пусть $m > 0$, тогда после разложения функций задачи (2.13) – (2.16) по степеням δ получим, что главные члены разложения найдены при пренебрежении влиянием гидростатической силы (первый член в первом уравнении (2.14)), в то время как данная сила определяет динамику шельфа. Это говорит о том, что при $m > 0$ невозможно срастить внешнее разложение для шельфа и внутреннее разложение для переходной зоны. Окончательно имеем

$$\beta = O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0$$

Полагая $\beta = 1$ в первом уравнении (2.16), находим характерный масштаб толщины льда на линии налегания

$$[z_l] = \{\eta[f_s][x](\rho_i g \delta)^{-\alpha}\}^{1/(\alpha+2)}$$

Приравняв $[z_l] = [z_s]$ в (2.11), можно найти характерную величину тангенса наклона поверхности шельфа вблизи линии налегания $\varepsilon_l = 2^{-2\alpha-1}$. Данная величина мала при $\alpha \geq 2$.

Решение системы (2.13) – (2.16) ищем в виде асимптотических разложений по степеням ε и δ

$$v = (\psi, \vartheta, h, \beta) = v_0 + O(\varepsilon) + O(\delta), \quad d = (\chi, \gamma) = d_0 + \delta d_1 + O(\varepsilon) + O(\delta^2), \quad k = 1 - \delta$$

Для членов внутреннего разложения имеем

$$\begin{aligned} t_{1yy} + 2t_{2\xi y} - t_{1\xi\xi} &= 0, \quad -\infty < \xi < +\infty, \quad 1 - h_0 < y < 1 \\ y = 1: \quad \psi_{0yy} &= 0, \quad \psi_0 = 1; \quad y = 0, \quad \xi < 0: \quad \psi_0 = \psi_{0y} = 0 \\ y = 1 - h_0, \quad \xi > 0: \quad e_1(1 - h_{0\xi}^2) &= -2h_{0\xi}e_2, \quad \psi_0 = 0; \quad \beta_0 = \delta\varepsilon^{-1}\Delta^{1+2/a}Q_0^{-1/\alpha} \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$e_1 = \psi_{0yy} - \psi_{0\xi\xi}, \quad e_2 = 2\psi_{0\xi y}, \quad (t_1, t_2) = \mu(e_1, e_2), \quad \mu = (e_1^2 + e_2^2)^{(1-\alpha)/(2\alpha)}$$

Уравнение для толщины льда имеет вид

$$\frac{1}{2}\beta_0 h_0^2 + h_0 t_\xi = \int_{1-h_0}^1 \zeta dy \quad \text{при } \xi > 0; \quad h_0(0) = 1 \quad (2.18)$$

Члены разложения для нижней (ϑ), верхней (χ) поверхностей ледника и уровня океана (γ) определяются явными формулами

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= 0 \quad \text{при } \xi < 0; \quad \vartheta_0 = 1 - h_0 \quad \text{при } \xi > 0; \quad \gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = -1 - \beta_0^{-1} t_\xi|_{\xi=0} \\ \chi_0 &= 1, \quad \forall \xi; \quad \chi_1 = h_0 - 1 + \beta_0^{-1} (t_\xi - t_\xi|_{\xi=0}) \quad \text{при } \xi > 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\chi_1 = \beta_0^{-1} \left[\int_0^1 \zeta dy + \int_\xi^0 (\mu \psi_{0yy})_{y=0} d\xi - t_\xi|_{\xi=0} \right] - \frac{1}{2} \quad \text{при } \xi < 0$$

где

$$j = \int_y^1 t_1 dy, \quad t = j|_{y=1-h_0}, \quad \zeta = 2t_2 + j_\xi$$

Уравнение (2.17) для функции тока определено в бесконечной полосе с плоской горизонтальной верхней границей и неизвестной нижней при $\xi > 0$. При $\xi < 0$, т.е. в области наземного ледника, нижняя граница – также горизонтальная прямая. Первые члены разложения для высоты верхней поверхности и уровня океана находятся по формулам (2.19).

Решение задачи (2.17)–(2.19) может быть получено численными методами, так как аналитическое решение затруднительно. Замечательно, что в данных переменных определение функций ψ , h и ϑ с точностью $O(\delta)$ позволяет найти γ и χ с точностью $O(\delta^2)$. В полученную систему уравнений не входят параметры, определяющие влияние динамики наземной части ледника и шельфа, поэтому величина β зависит только от реологии льда.

Равномерно-пригодное разложение. Опишем алгоритм построения равномерно-пригодного решения для профилей поверхностей льда. Пусть решена задача (2.17)–

(2.19) и определено внутреннее разложение функций $\psi, \vartheta, \gamma, \chi, \beta$ в переходной зоне. Знание β и γ позволяет определить положение линии налегания X_g из первого соотношения (2.16), определяющего параметр β_0 :

$$\epsilon Q_0^{1/\alpha} \beta_0 = \delta[(L - B)/(\gamma_0 + \delta\gamma_1)]^{1+2/\alpha} \quad (2.20)$$

которое записано в переменных наземного ледника, причем $Q_0(X), L, B(X)$ – известные функции.

Если решения (2.20) не существует, то не существует и стационарного течения льда при данных условиях.

После определения положения линии налегания находится толщина льда на ней $\Delta = (L - B)(\gamma_0 + \delta\gamma_1)^{-1}$

Учитывая, что

$$\psi_0 = \bar{\psi} + O(\xi^{-2}), \quad \xi \rightarrow -\infty, \quad \bar{\psi} = [(\alpha + 2)y - 1 + (1 - y)^{\alpha+2}](\alpha + 1)^{-1}$$

и сращивая внутреннее и внешнее разложения профиля верхней поверхности льда в наземной части ледника, получим равномерно-пригодное разложение (во внутренних переменных)

$$\chi = \bar{S}_0 / \Delta + 1 + \delta\chi_1 - \chi^* \text{ при } \xi < 0; \quad \chi^* = 1 + \delta[\lambda - (\alpha + 2)^{1/\alpha} \beta_0^{-1} \xi]$$

$$\lambda = \beta_0^{-1} \left[\int_{-\infty}^0 (\mu \psi_{0yy} - \bar{\psi}_{yy}^{1/\alpha} \Big|_{\xi=0})_{y=0} d\xi - t_\xi \Big|_{\xi=0} \right] - \frac{1}{2}$$

Величина χ_1 определяется по формулам (2.19), $\bar{S}_0$ – решение уравнения (2.9) с граничным условием на линии налегания

$$\bar{S}_0(0) = \Delta(1 + \delta\lambda) + O(\delta^2)$$

Для сращивания построенных разложений в области плавления льда необходимо разложить функции внешнего разложения для шельфа в асимптотические ряды по δ , как это было сделано для переходной зоны. Внешнее разложение внутреннего разложения для толщины льда можно получить из формулы (2.12) при пренебрежении аккумуляцией льда на поверхности. Окончательно для толщины и высоты поверхностей льда получим равномерно-пригодные разложения (во внутренних переменных)

$$h = \tilde{H}_0 \Delta_s / \Delta + h_0 - h^*, \quad \chi = \tilde{S}_0 \Delta_s / \Delta + 1 + \delta\chi_1 - \chi^*, \quad \vartheta = \chi - h \text{ при } \xi > 0$$

где

$$h^* = [2^{2\alpha+1} (\alpha + 1)^{-1} \beta_0^{-\alpha} / (A_1 + \xi)]^{1/(\alpha+1)}, \quad \chi^* = 1 + \delta(\gamma_1 + h^*)$$

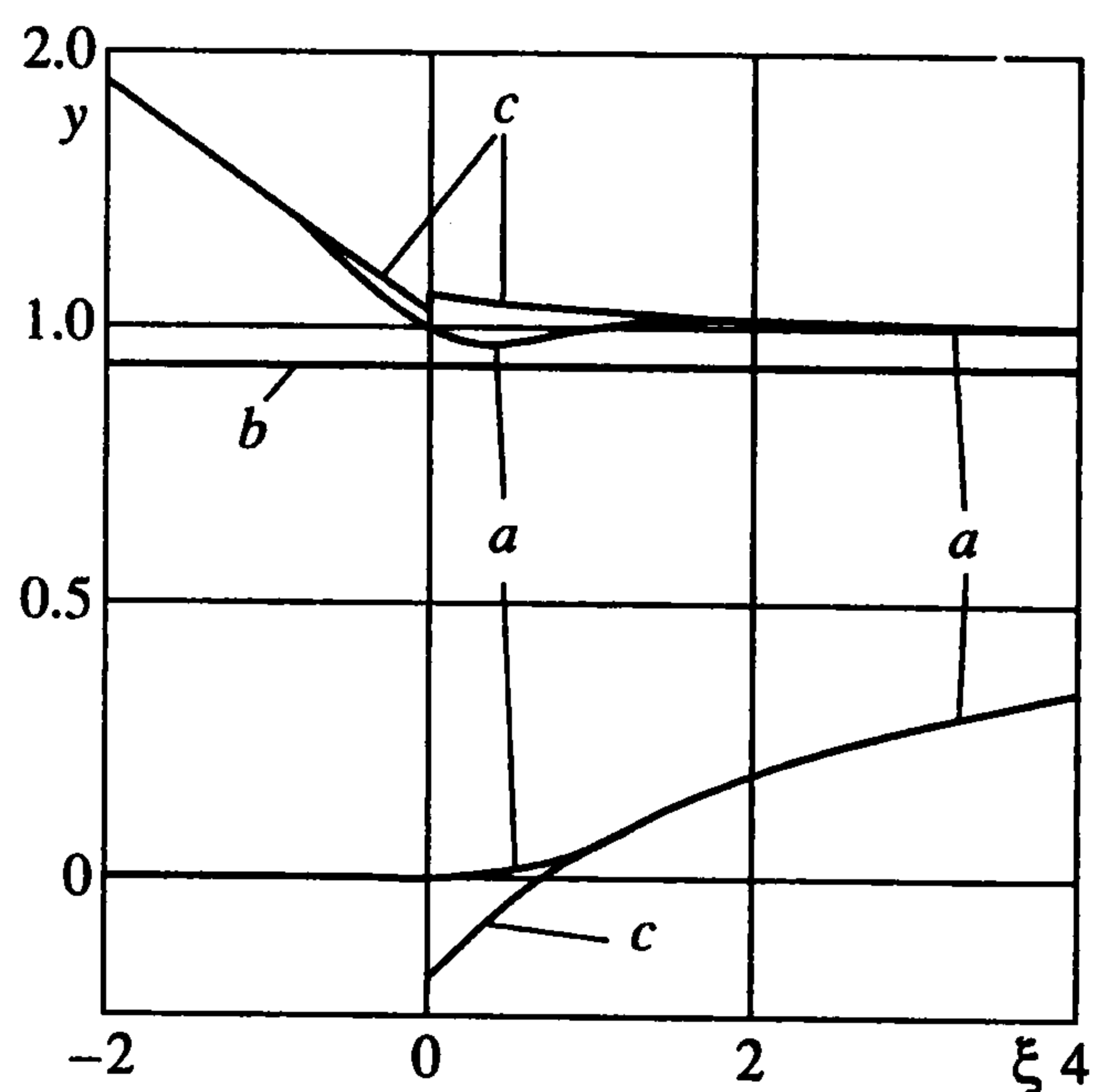
$$A = A_1 \epsilon \Delta (\alpha + 1) Q_0^\alpha$$

Функция h_0 и постоянная A_1 определяются решением задачи (2.17), (2.18), а $\tilde{H}_0$ (при известной постоянной A) и χ_1, γ_1 – по формулам (2.12), (2.19).

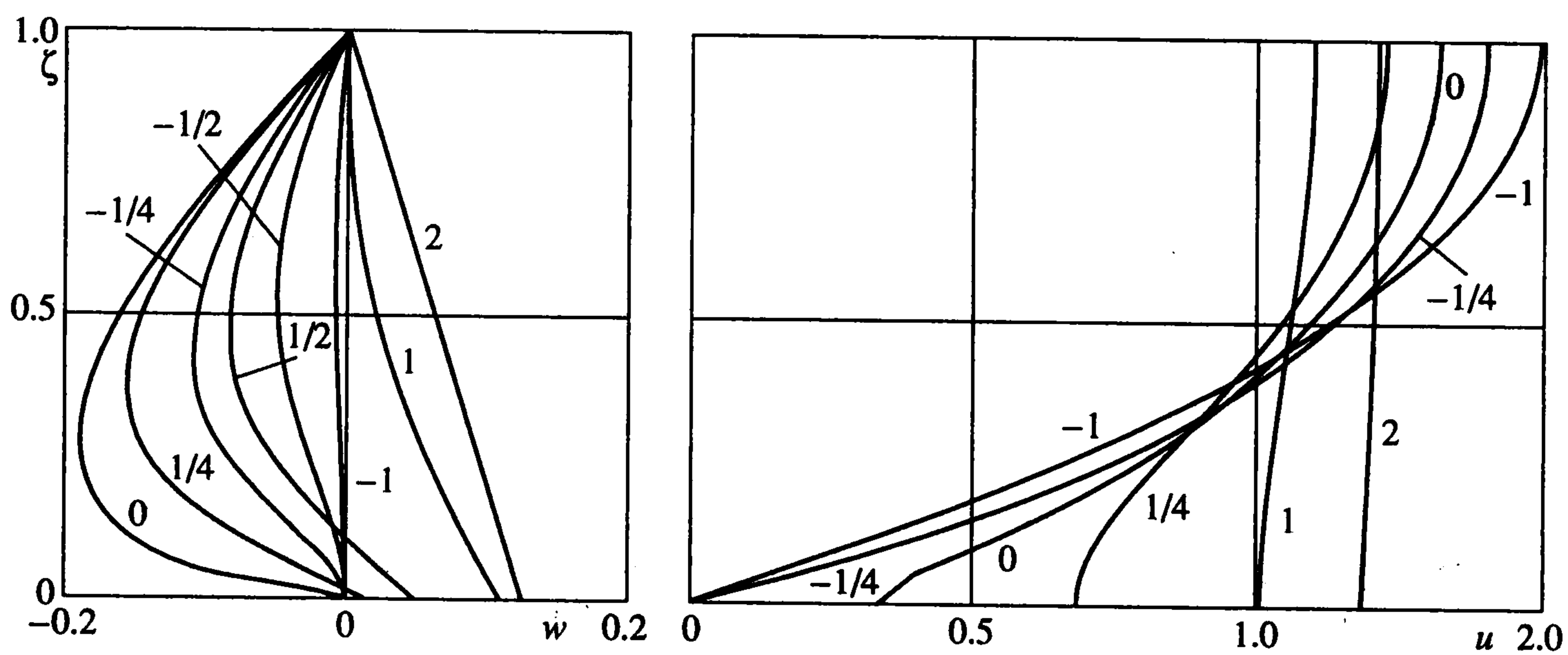
Численное решение для задачи переходной зоны. Система (2.17)–(2.19) решалась численно для льда с постоянной вязкостью. При этом область определения – бесконечная полоса с неизвестной нижней границей – усекалась вдали от линии налегания ($\xi_l < \xi < \xi_r$), а затем сводилась к прямоугольнику заменой переменных $\zeta = (y - 1 + h_0)/h_0$. В новых переменных уравнение для толщины льда (2.18) при известной функции тока будет уравнением третьего порядка. Для его решения использовались дополнительные граничные условия

$$h_{0\xi}(0) = h_{0\xi\xi}(0) = 0, \quad h_0(\xi_r) = h_r$$

последнее из которых, как показали расчеты, слабо влияло на решение.



Фиг. 2



Фиг. 3

Приведенные условия на линии налегания были получены из следующих рассуждений. Если $h_0 \equiv 1$, то асимптотическое решение задачи для функции тока (2.17) при $(\xi, y) \rightarrow (0, 0)$ может быть найдено [16]. Если подставить данное решение в уравнение для нижней поверхности льда, сведенного к виду, включающему только значения функции тока и ее производные на самой нижней поверхности [9], то функция $h_0 \equiv 1$ удовлетворяет данному уравнению. Это позволяет сделать предположение о гладкости функции нижней поверхности на линии налегания.

По результатам вычислений получено

$$\beta_0 = 1.5, \quad \gamma_1 = 0.67, \quad \lambda = 0.32, \quad A_1 = 1.86$$

На фиг. 2 изображены рассчитанные внешние поверхности льда (линии a) вблизи линии налегания. Линиями c обозначены решения для наземной части ледника и шельфа, найденные в приближении тонкого слоя. Уровень океана b . Видно, что аппроксимация тонкого слоя верна вне окрестности линии налегания в несколько толщин. Характерно существование локального минимума функции верхней поверхности ледника вблизи линии налегания.

На фиг. 3, 4 изображены результаты вычислений безразмерных вертикальной ($w = -\psi_{0\xi}$) и горизонтальной ($u = \psi_{0y}$) скоростей, а также сдвигового ($t_1 = \psi_{0yy} - \psi_{0\xi\xi}$) и нормального девиаторного ($t_2 = 2\psi_{0\xi y}$) напряжений. Каждая линия соответствует

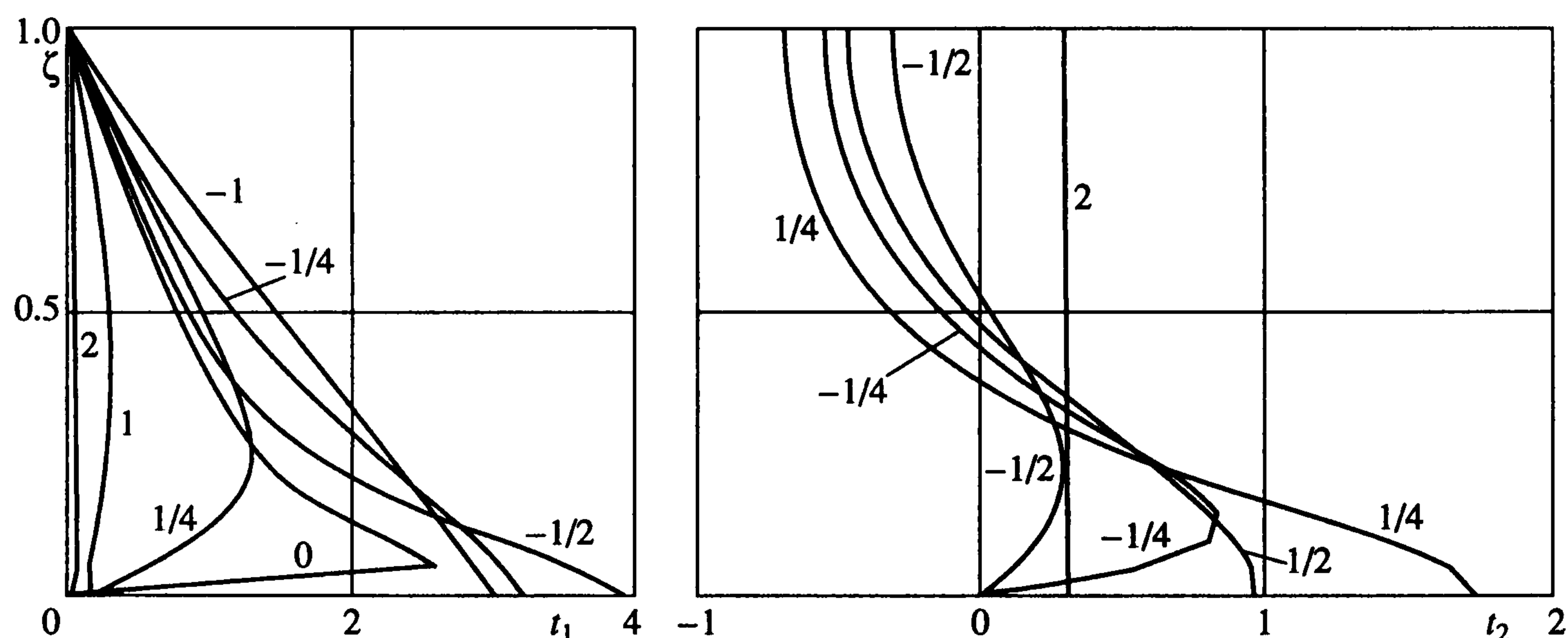
распределению функции в сечении, а число у линии показывает расстояние данного сечения от линии налегания ξ в толщинах льда на ней. Для наглядности используется вертикальная координата $\zeta = (y - 1 + h_0)/h_0$, в которой нижняя и верхняя поверхности определяются как $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$ соответственно. Например, в левой части фиг. 3 метка $-1/2$ показывает график распределения вертикальной скорости по толщине льда на расстоянии от линии налегания в сторону наземного ледника, равном $1/2$ толщины льда на линии налегания. На расстоянии одной толщины льда (метка -1) течение близко к течению Пуазейля, поэтому вертикальная скорость близка к нулю, а горизонтальная имеет степенной профиль (правая часть фиг. 3). На расстоянии в две толщины льда в сторону шельфа (метка 2) течение близко к течению растяжения (поршневому течению), когда горизонтальная скорость постоянна по глубине (правая часть фиг. 3), что вследствие баланса массы ведет к линейному профилю вертикальной скорости. Так как в переходной зоне пренебрегается притоком массы через поверхность, то поверхность льда является материальной поверхностью, вследствие этого на верхней (горизонтальной) поверхности вертикальная скорость равна нулю, а на нижней (наклонной) зависит от горизонтальной скорости и наклона данной поверхности. Видно, что характер течения резко меняется в области, длина которой равна трем толщинам льда. Вне этой области приемлемо приближение тонкого слоя.

Заключение. Проведенный в разд. 2 анализ позволил найти строгое граничное условие на линии налегания (2.20). Параметр β определяется решением только внутренней задачи, хотя для реальных ледников он может находиться из натурных измерений.

Численное решение задачи для переходной зоны определило существование локального минимума профиля верхней поверхности ледника вблизи линии налегания, что может быть использовано для ее обнаружения при полевых исследованиях ледников, взаимодействующих с океаном.

Как следует из приведенного анализа, на линии налегания лед близок к состоянию гидростатического равновесия (в общем случае погрешность оценивается как $O(\delta) = 10\%$). В случае постоянной вязкости льда численные расчеты показали, что толщина льда, соответствующая внутреннему решению для переходной области и внешнему решению для наземного ледника на линии налегания, отличается от толщины льда при его гидростатическом равновесии на -3.3 и 0.1% соответственно. Таким образом, условие гидростатического равновесия льда в воде может быть использовано как граничное условие для наземной части ледника на линии налегания.

Комплексный подход к изучению всей гляциологической системы (наземная часть, шельф, переходная зона) позволяет установить связь между характерными масшта-



Фиг. 4

бами ее частей через параметры ϵ и δ , которые характеризуют внешние условия существования ледника, а также построить обоснованно упрощенную замкнутую модель, описывающую ее динамику и учитывающую особенности всех ее зон.

3. Анализ динамики области ледораздела при осесимметричном течении льда.

Далее будем рассматривать нестационарное осесимметричное течение льда, причем для анализа особой зоны ледораздела достаточно рассмотреть динамику только наземного ледника (при этом может рассматриваться ледник, полностью находящийся на суше). Знания положения конца ледника X_g и высоты поверхности на нем Δ (причем $\Delta = 0$ для сухопутного ледника) достаточно для постановки задачи для главных членов разложения в замкнутом виде, так как уравнение (3.5) (см. ниже) для определения главного члена внешнего разложения функции профиля верхней поверхности льда является интегродифференциальным уравнением первого порядка по пространственной переменной.

После перехода к безразмерным переменным задача (1.1)–(1.5), как и при моделировании плоского течения, может быть сведена к задаче для определения функции тока Ψ ($U = \Psi_Z/R$, $W = -\Psi_R/R$) и неизвестной поверхности льда S при $n = 1$ (новые переменные обозначены прописными буквами, причем $R = x/[x]$)

$$T_{1ZZ} = \epsilon^2[(V(RT_1)_R)_R + T_{3RZ} + VT_{4Z} - V(RT_{2Z})_R], \quad 0 < R < R_g, \quad B < Z < S \quad (3.1)$$

$$Z = S: \quad \epsilon^2 S_R(T_2 - T_3) = (1 - \epsilon^2 S_R^2)T_1, \quad \Psi = \int_0^R R(F_s - S_\Theta)dR \quad (3.2)$$

$$Z = B: \quad \Psi = \Psi_Z = 0; \quad R = 0: \quad \Psi_Z = (V\Psi_R)_R = 0; \quad S(R_g) = \Delta \quad (3.3)$$

где

$$E_1 = V\Psi_{ZZ} - \epsilon^2(V\Psi_R)_R, \quad E_2 = (V\Psi_Z)_R, \quad E_3 = -V\Psi_{RZ}, \quad E_4 = V^2\Psi_Z, \quad V = 1/R$$

$$\mu = [E_1^2 + 2\epsilon^2(E_2^2 + E_3^2 + E_4^2)]^{(1-\alpha)/(2\alpha)} \quad (T_1, T_2, T_3, T_4) = \mu(E_1, 2E_2, 2E_3, 2E_4)$$

Уравнение для профиля верхней поверхности льда имеет вид

$$V\Sigma_R = B_R[H + \epsilon^2 I|_{Z=B}] + (1 + \epsilon^2 B_R^2)[\mu V\Psi_{ZZ}]_{Z=B} + V\Phi \quad (3.4)$$

где

$$V\Sigma = -\frac{H^2}{2} + \epsilon^2 \int_B^S (-I + T_2)dZ, \quad \Phi = -\frac{H^2}{2} + \epsilon^2 \int_B^S (-I + T_4)dZ$$

$$I = T_3 - V\left(\int_Z^S RT_1 dZ\right)_R, \quad H = S - B$$

Уравнение (3.4) получено интегрированием первого уравнения (2.1) по z от b до s и является уравнением баланса сил в вертикальном сечении $x = \text{const}$.

Модель наземного ледника. Внешние разложения $\bar{\Psi}, \bar{S}$ для функций тока Ψ и высоты поверхности S вдали от ледораздела ищем в виде

$$\bar{J} = \bar{J}_0 + O(\epsilon^2), \quad J = (\Psi, S)$$

Тогда из соотношений (3.1)–(3.4) находим аналогично изложенному ранее [17]

$$\bar{\Psi}_0 = \frac{RQ}{\alpha+1} \left[(\alpha+2) \frac{Z-B}{\bar{H}_0} - 1 + \frac{(\bar{S}_0 - Z)^{\alpha+2}}{\bar{H}_0^{\alpha+2}} \right] \quad (3.5)$$

$$\bar{S}_{0R} = - \left[(\alpha+2) \frac{Q}{\bar{H}_0^{\alpha+2}} \right]^{1/\alpha}, \quad \bar{S}_0(R_g) = \Delta$$

где

$$\bar{H}_0 = \bar{S}_0 - B, \quad Q = V \int_0^R R(F_s - \bar{S}_{0\Theta}) dR$$

Уравнение для профиля верхней поверхности льда (второе уравнение (3.5)) есть интегродифференциальное уравнение первого порядка. Оно может быть сведено к дифференциальному уравнению параболического типа с дополнительным граничным условием $\bar{S}_{0R}(\Theta, 0) = 0$. Его можно решить численно, так как при произвольном виде функций B и F_s нахождение аналитического решения затруднительно. Если ложе плоское и горизонтальное, а также скорость аккумуляции постоянна, стационарное решение можно найти аналитически [17].

Вблизи ледораздела ($R \rightarrow 0$) получим

$$\bar{\Psi}_0 = \Omega R(\alpha + 1)^{-1} \left[(\alpha + 2) \frac{Z}{\bar{S}_0} - 1 + \frac{(\bar{S}_0 - Z)^{\alpha+2}}{\bar{S}_0^{\alpha+2}} \right]_{R=0} + O(R^{1+1/\alpha}) \quad (3.6)$$

$$\bar{S}_0 = \bar{S}_0(0) - \bar{S}_0(0)^{-1-2/\alpha} \alpha(\alpha + 1)^{-1} (\alpha + 2)^{1/\alpha} \Omega^{1/\alpha} R^{1+1/\alpha} + O(R^{2+1/\alpha})$$

$$\Omega = \frac{1}{2} (F_s - \bar{S}_{0\Theta})_{R=0}$$

Второе уравнение (3.5) служит для определения профиля поверхности ледника вдали от ледораздела. Из формулы (3.1) следует, что внешнее разложение, использующее малость отношения нормального девиаторного напряжения к сдвиговому, непригодно при $R = O(\epsilon)$, так как в этом случае $\bar{\Psi}_{ZZ} = O(\epsilon^2)$ и сдвиговые и нормальные напряжения имеют один порядок. Поэтому в области ледораздела необходимо находить внутреннее разложение. Несмотря на то что второе уравнение (3.5) непригодно вблизи ледораздела, данное решение необходимо для нахождения толщины льда на нем, которая определяется только при помощи процедуры сращивания. Очевидно, что вследствие пренебрежения скоростью деформаций растяжения по сравнению со скоростью сдвиговых деформаций в уравнении (3.1) величины напряжений (а следовательно, и скоростей), полученные с помощью внешнего разложения в области ледораздела, отличаются от истинных на величину, сравнимую с самими напряжениями (скоростями). Кроме того, как видно из второго уравнения (3.6), внешнее разложение функции профиля верхней поверхности обладает бесконечной кривизной при $R = 0$.

Модель динамики ледораздела. Обозначим через $\Delta_d = S(0)$ неизвестную толщину льда на оси симметрии ледника в переменных (R, Z) , которая будет определяться из сращивания. Введем переменные внутреннего разложения в области ледораздела

$$\xi = \frac{R}{\epsilon \Delta_d}, \quad (y, \chi, \vartheta) = \frac{1}{\Delta_d} (Z, S, B), \quad \psi = \frac{2\Psi}{\epsilon^2 \Delta_d^2 (F_s(0) - \Delta_{d\Theta})}$$

В новых переменных уравнения для определения функции тока выглядят аналогично (3.1)–(3.3), если в данных уравнениях заменить символы $(\epsilon, R, Z, S, B, \Psi, T_k)$ на $(1, \xi, y, \chi, \vartheta, \psi, t_k)$, причем

$$\psi|_{y=\chi} = \xi + O(\epsilon), \quad \vartheta = O(\epsilon^2)$$

где второе равенство следует из гладкости и симметричности функции профиля ложа при $R = 0$: $B_R(0) = 0$. При этом уравнение для профиля верхней поверхности (баланс сил в сечении) примет вид

$$-(\chi^2/2)_\xi = \epsilon^{1+1/\alpha} \Omega_d \left\{ \nu (\mu \psi_{yy})_{y=\vartheta} + \nu \int_{\vartheta}^{\chi} (t_4 - t_2) dy - \left[\int_{\vartheta}^{\chi} (-i + t_2) dy \right]_{\xi} \right\} + O(\epsilon^2), \quad \chi(0) = 1$$

где

$$i = t_3 - \nu \left(\int_y^{\chi} \xi t_1 dy \right)_{\xi}, \quad \nu = \frac{1}{\xi}, \quad \Omega_d = \Delta_d^{-1-1/\alpha} \left(\frac{F_s(0) - \Delta_d \Theta}{2} \right)^{1/\alpha}$$

Внутреннее разложение ищем в виде

$$\psi = \psi_0 + O(\varepsilon), \quad \vartheta = 0 + O(\varepsilon^2), \quad \chi = \chi_0 + \varepsilon^{1+1/\alpha} \chi_1 + O(\varepsilon^2)$$

Для членов разложения имеем систему

$$\begin{aligned} t_{1yy} + \nu (\xi t_{2y})_{\xi} - (\nu (\xi t_1)_{\xi})_{\xi} - t_{3\xi y} &= \nu t_{4y}, \quad 0 < \xi < +\infty, \quad 0 < y < 1 \\ y=1: \quad e_1 &= 0, \quad \psi_0 = \xi; \quad y=0: \quad \psi_0 = \psi_{0y} = 0 \\ \xi=0: \quad \psi_{0y} &= (\nu \psi_{0\xi})_{\xi} = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Члены разложения для высоты поверхности определяются по явным формулам

$$\chi_0 = 1, \quad \chi_1 = \Omega_d \left\{ \int_0^1 (-i + t_2) dy \right\}_{\xi}^{\xi} - \int_0^{\xi} \nu \left[(\mu \psi_{yy})_{y=0} + \int_0^1 (t_4 - t_2) dy \right] d\xi \Bigg\}$$

где

$$\begin{aligned} e_1 &= \nu \psi_{0yy} - (\nu \psi_{0\xi})_{\xi}, \quad e_2 = (\nu \psi_{0y})_{\xi}, \quad e_3 = -\nu \psi_{0\xi y}, \quad e_4 = \nu^2 \psi_{0y}, \quad \nu = 1/\xi \\ \mu &= [e_1^2 + 2(e_2^2 + e_3^2 + e_4^2)]^{(1-\alpha)/(2\alpha)}, \quad (t_1, t_2, t_3, t_4) = \mu(e_1, 2e_2, 2e_3, 2e_4) \end{aligned}$$

Полученная система уравнений описывает течение ледника в зоне ледораздела. Отметим, что первый член разложения для высоты верхней поверхности полностью определяется нулевым членом разложения для функции тока. Легко проверить, что для ньютоновской жидкости ($\alpha = 1$) внешнее разложение (приближение тонкого слоя) (3.6) для функции тока удовлетворяет внутренней задаче (3.7) с точностью $O(\varepsilon^2)$.

Задача (3.7) для нормированной функции тока ψ_0 не включает параметры, зависящие от времени, в отличие от первой формулы (3.6) для функции тока $\bar{\Psi}_0$.

С точностью $O(\varepsilon^{1+1/\alpha})$ можно пренебречь наклоном верхней поверхности ледника, так как область определения задачи (3.7) есть бесконечный слой единичной толщины с горизонтальными плоскими границами. Однако равномерно-пригодное разложение для верхней поверхности, найденное с точностью $O(\varepsilon^{1+1/\alpha})$ (т.е. после сращивания функций χ_0 и $\bar{S}_0$), будет иметь бесконечную кривизну при $\xi = 0$, поэтому при сращивании имеет смысл учитывать следующий член разложения для χ , а именно χ_1 . Величина Δ_d определяется условием сращивания внутреннего разложения с внешним.

Учитывая соотношения (3.6) и то, что

$$\psi_0 = \psi^{\infty} + O(1), \quad \xi \rightarrow \infty; \quad \psi^{\infty} = \frac{\xi^2}{\alpha+1} [(\alpha+2)y - 1 + (1-y)^{\alpha+2}]$$

после сращивания получим равномерно-пригодное решение для профиля поверхности ледника (во внутренних переменных)

$$\chi = 1 + \varepsilon^{1+1/\alpha} \chi_1 + \frac{\bar{S}_0}{\Delta_d} - \chi^*$$

где

$$\chi_1 = \Omega_0 \left\{ \zeta \left| \int_0^{\xi} \nu [(\mu \psi_{0yy})_{y=0} + \omega] d\xi \right. \right\}, \quad \zeta = \int_0^1 (-i + t_2) dy$$

$$\Delta_d = \bar{S}_0(0)(1 - \varepsilon^{1+1/\alpha}\lambda), \quad \Omega_0 = \bar{S}_0(0)^{-1-1/\alpha}(F_s/2 - \bar{S}_{0\Theta}/2)_{\xi=0}^{1/\alpha}$$

$$\chi^* = 1 + \varepsilon^{1+1/\alpha}\Omega_0[C - \alpha(\alpha+2)^{1/\alpha}(\alpha+1)^{-1}\xi^{1+1/\alpha}]$$

$$C = - \int_0^{+\infty} \nu \{ [\mu\psi_{0yy} - (\psi_{yy}^\infty)^{1/\alpha}]_{y=0} + \omega \} d\xi - \zeta|_{\xi=0}, \quad \lambda = \Omega_0 C, \quad \omega = \int_0^1 (t_4 - t_2) dy$$

Из данного решения и второй формулы (3.6) следует, что график функции $\bar{S}_0/\Delta - \chi^*$ имеет конечную кривизну на оси симметрии ледника. С другой стороны, в выражение для χ_1 входят гладкие функции (предполагается, что функция тока – решение системы (3.7) – имеет непрерывные производные четвертого порядка). Поэтому построенное решение характеризуется конечной кривизной верхней поверхности на оси симметрии ледника.

Заключение. Проведенные в разд. 3 исследования показали, что при осесимметричном течении льда в области ледораздела все неизвестные характеристики могут вычисляться в бесконечном слое с горизонтальными плоскими границами, толщина которого с достаточной степенью точности совпадает с найденной при помощи упрощения тонкого слоя (сдвиговое течение).

Заменой переменных задача, описывающая динамику области ледораздела, может быть приведена к виду, не включающему параметры, зависящие от времени, длины ледника, скорости аккумуляции льда на поверхности, реологического параметра и толщины льда, и может быть решена отдельно от задачи для ледника в целом.

Решение стационарной задачи для области ледораздела позволяет определить его нестационарные поля путем растяжения координатных осей и перенормировки функции тока.

Кривизна верхней поверхности ледника конечна на его оси симметрии.

Упрощение тонкого слоя не может быть использовано для вычисления скоростей и напряжений в области ледораздела.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00346).

ЛИТЕРАТУРА

1. Glen J.W. The creep of polycrystalline ice // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1955. V. 228. № 1175. P. 519–538.
2. Саламатин А.Н. Взаимодействие температурных и гидродинамических полей в стационарных куполовидных ледниках // Материалы гляциологич. исслед. 1981. Вып. 42. С. 122–128.
3. Fowler A.C. A theoretical treatment of the sliding of glaciers in the absence of cavitation // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1981. V. 298. № 1445. P. 637–681.
4. Саламатин А.Н., Мазо А.Б. Исследование общей математической модели куполовидного ледника методами теории подобия // Исследования по прикладной математике. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. Вып. 10. С. 139–149.
5. MacAyeal D.R., Barclon V. Ice-shelf response to ice-stream discharge fluctuations: I. Unconfined ice tongues // J. Glaciol. 1988. V. 34. № 116. P. 121–127.
6. Thomas R.H., Bentley C.R. A model for Holocene retreat of the West Antarctic ice sheet // Quaternary Res. 1978. V. 10. № 2. P. 150–170.
7. Саламатин А.Н. О движении края покровного ледника // Исслед. по прикл. математике. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. Вып. 10. С. 150–154.
8. Lingle C.S. A numerical model of interactions between a polar ice stream and the ocean: Application to ice stream E, West Antarctica // J. Geophys. Res. Ser. C. 1984. V. 89. № 3. P. 3523–3549.
9. Chugunov V.A., Wilchinsky A.V. Modelling of a marine glacier and ice-sheet – ice-shelf transition zone based on asymptotic analysis // Ann. Glaciol. 1996. V. 23. P. 59–67.
10. Morland L.W., Johnson I.R. Steady motion of ice sheets // J. Glaciol. 1980. V. 25. № 92. P. 229–246.

11. *Fowler A.C.* Modelling ice sheet dynamics // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 1992. V. 63. № 1–4. P. 29–65.
12. *Wilchinsky A.V., Chugunov V.A.* Modelling ice-divide dynamics by perturbation methods // *J. Glaciol.* 1997. V. 43. № 144. P. 352–358.
13. *Hvidberg C.S.* Steady-state thermomechanical modelling of ice flow near the centre of large ice sheets with the finite-element technique // *Ann. Glaciol.* 1996. V. 23. P. 116–123.
14. *Weertman J.* Deformation of floating ice shelves // *J. Glaciol.* 1957. V. 3. № 21. P. 38–42.
15. *Vialov S.S.* Regularities of glacial shields movement and theory of plastic viscous flow // *Publ. Assoc. Intern. Hydrol. Scient.* 1958. V. 47. P. 266–275.
16. *Barcilon V., MacAyeal D.R.* Steady flow of a viscous ice stream across a no-slip/free-slip transition at the bed // *J. Glaciol.* 1993. V. 39. № 131. P. 167–185.
17. *Johnson I.R.* The steady profile of an axisymmetric ice sheet // *J. Glaciol.* 1981. V. 27. № 95. P. 25–37.

Казань
e-mail: chug@ksu.ru

Поступила в редакцию
14.VII.1998