

УДК 532.595

© 2001 г. И.А. Луковский, А.Н. Тимоха

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН С АКУСТИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ

Рассматриваются потенциальные течения в системе, состоящей из сжимаемых, баротропных идеальных жидкости и газа с поверхностью раздела и акустическим высокочастотным вибратором, помещенным в газе. Система двух сред полностью занимает ограниченный абсолютно твердый сосуд. Метод двухмасштабных разложений применяется к задаче в дифференциальной и вариационной постановке в форме Гамильтона – Остроградского. Это позволяет вывести как усредненные уравнения движения, так и принцип минимума квазипотенциальной энергии для усредненных поверхностных рельефов (капиллярно-звуковых форм равновесия). При этом в получаемых уравнениях и функционале появляются члены, отвечающие за силы вибрационного происхождения. Обсуждается задача о квазиравновесии бифуркации квазиравновесных форм в случае, когда плоская поверхность раздела является одновременно капиллярной и капиллярно-звуковой равновесной формой. Приводятся спектральные теоремы для задачи о нормальных колебаниях относительно квазиравновесия, формулируются спектральные и вариационные критерии устойчивости.

Проблема взаимодействия границы раздела двух ограниченных жидких сред с акустическими полями связывается с описанием технологических процессов, где присутствуют паразитические или целенаправленные высокочастотные вибрации. Такие вибрации могут изменить характер поверхностных волновых явлений и приводить к стабилизации (дестабилизации) подвижной границы. Рассматривались вибрационные воздействия массовых сил (вибрации сосуда) [1–3]. Аналогичный класс задач возникает при описании поведения ограниченного объема жидкости со свободной границей в стоячих акустических полях. Серия экспериментальных и теоретических исследований левитирующей капли [4–6] выявила ряд новых поверхностных физических явлений, описанных численно и при помощи феноменологических подходов. Другой путь связывается с применением асимптотических и вариационных методов, развитых для конечномерных и бесконечномерных консервативных механических задач [3, 7].

В данной работе развивается вариант комбинированной асимптотической и вариационной теорий для задачи о плескании капиллярной жидкости в сосуде под воздействием акустических полей, создаваемых в газе над жидкостью [8]. Идея такого подхода была предложена ранее [9, 10]¹ и успешно развита [2, 3] для описания поверхностных рельефов в вибрирующем сосуде. Теория приводит к новому классу нелинейных стационарных краевых задач со свободной границей, являющихся обобщением задачи о капилляре. Устойчивость этих равновесных поверхностей может быть связана с положительностью спектра задачи об относительных нормальных колебаниях или с минимумом стационарного функционала квазипотенциальной энергии [7].

1. Постановка задачи. Пусть абсолютно твердый сосуд занят газом (объем $Q_1(t)$) и жидкостью (объем $Q_2(t)$). Подвижная односвязная граница раздела $\Sigma(t)$ подвергается

¹ См. также: Тимоха А.Н. Прямые методы решения статических и спектральных задач теории взаимодействия поверхностных волн с акустическими полями: Препринт № 93.15. Киев: Ин-т математики, 1993.

воздействию акустических полей, которые создаются высокочастотным вибратором, размещенным на стенке сосуда и контактирующим с газом. Пульсационные акустические движения гидродинамической системы могут быть описаны в рамках потенциальной теории идеальных сред². Соответствующая нелинейная эволюционная краевая задача связывает потенциалы скоростей φ_i , функции давления p_i и плотности ρ_i в газе ($i = 1$) и жидкости ($i = 2$) и в безразмерном виде (линейный размер полости l и период пульсаций $2\pi/\nu$ выбраны в качестве характерного размера и времени) записывается следующим образом:

$$\rho_i \nabla \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_i)^2 + v_*^{-2} B x \right) = -\nabla p_i; \quad \rho_i = \left(\frac{p_i}{p_{0i}} \right)^{1/\gamma_i} \quad \text{в } Q_i(t) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \nabla \varphi_i) = 0 \quad \text{в } Q_i(t) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_i; \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = -\frac{\xi_t}{|\nabla \xi|} \quad \text{на } \Sigma(t) \quad (1.3)$$

$$-p_2 + v_*^{-2} (K_1 + K_2) = -p_1 \frac{\rho_{01}}{\rho_{02}} \quad \text{на } \Sigma(t) \quad (1.4)$$

$$-\frac{(\nabla W, \nabla \xi)}{|\nabla W| |\nabla \xi|} = \cos \alpha \quad \text{на } \partial \Sigma(t) \quad (1.5)$$

$$\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon V(x, y, z) \frac{\mu_0}{k} \sin t \quad \text{на } S_0 \quad (1.6)$$

Полость сосуда $Q = Q_1 \cup Q_2$ задается неравенством $W(x, y, z) < 0$, $\xi(x, y, z, t) = 0$ – уравнение границы раздела, $S_i = \partial Q \cap \partial Q_i$ – стенки сосуда, контактирующие с газом и жидкостью соответственно, K_i – главные кривизны поверхности $\Sigma(t)$, $v_*^2 = v^2 \rho_{02} l / \sigma$ – квадрат безразмерной частоты, $B = g l^2 \rho_{02} / \sigma$ – число Бонда, $k = \nu l / c$ – волновое число акустического поля в газе, c – скорость звука в газе, σ – коэффициент поверхностного натяжения, g – ускорение силы тяжести, γ_i – константы уравнения состояния Тэта, ν – частота вибрации, $V_0(x, y, z) \sin(\nu t)$ – заданное распределение нормальных скоростей на акустическом вибраторе $S_0 \subset S_1$, ρ_{0i} – средние плотности газа и жидкости, α – угол смачивания. Нормаль n к свободной поверхности – внешняя по отношению к объему жидкости $Q_2(t)$. Кроме того, $V = V_0 / \sup |V_0|$, $\mu_0 = O(1)$ – введенный безразмерный коэффициент пропорциональности между безразмерной амплитудой $\varepsilon = \sup |V_0| / (c \mu_0) \ll 1$ и числом Маха акустических вибраций.

Заметим, что среды баротропны и первая пара уравнений допускает интеграл типа Лагранжа – Коши. Это позволяет избавиться от уравнения состояния Тэта, однако не упрощает технику двухмасштабных асимптотических разложений, применяемых ниже.

2. Асимптотическая редукция задачи. Малыми величинами служат отношения плотности газа к плотности жидкости $\rho_{01}/\rho_{02} \ll 1$ и $v_*^{-2} \ll 1$. Последнее потому, что частоты акустических вибраций значительно превосходят основной тон собственных колебаний капиллярной жидкости в сосуде.

² Подробнее обсуждение проблемы выбора гидромеханической модели см.: Луковский И.А., Тимоха А.Н. Нелинейная динамика поверхности раздела жидкости и газа при наличии в газе высокочастотного акустического поля. Установившиеся режимы движения: Препринт № 88.9. Киев: Ин-т математики, 1988.

Будем предполагать выполненными следующие асимптотические соотношения между малыми параметрами:

$$\rho_{01}/\rho_{02} = \delta = \mu_1 \epsilon, \quad |\mu_1| = O(1); \quad v_*^{-2} = \mu \mu_1 \epsilon^3, \quad \mu = O(1) \quad (2.1)$$

В соответствии с методом двухмасштабных разложений [11] выделим пульсационную и медленно осциллирующую составляющие в задаче (1.1)–(1.6). Первая связана с акустическими вибрациями сплошных сред и имеет характерный период $O(2\pi)$. Медленная компонента обусловлена подвижностью границы раздела и зависит от возвратных потенциальных полей. В исследуемом случае характерное время медленных колебаний τ пропорционально корню квадратному из абсолютной величины, стоящей при потенциальных членах: $\pi = \epsilon^{3/2} t = \epsilon_1^3 t$.

Представив решение задачи (1.1)–(1.6), (2.1) в виде

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_1^k \varphi_i^{(k)}(x, y, z, t, \tau), \quad p_i = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_1^k p_i^{(k)}(x, y, z, t, \tau) \\ \rho_i &= \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_1^k \rho_i^{(k)}(x, y, z, t, \tau), \quad \xi = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_1^k \xi_k(x, y, z, t, \tau) \end{aligned} \quad (2.2)$$

выведем усредненную задачу, приближенно описывающую медленные колебания системы,

$$\Delta \varphi = 0 \text{ в } \langle Q_2 \rangle(\tau) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \langle S_2 \rangle(\tau) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\zeta_\tau}{|\nabla \zeta|} \text{ на } \langle \Sigma \rangle(\tau) \quad (2.5)$$

$$\varphi_\tau + \frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2 + \mu \mu_1 (Bx - (K_1 + K_2)) + \frac{\mu_1}{4}(k^2 \Phi^2 - (\nabla \Phi)^2) = \text{const на } \langle \Sigma \rangle(\tau) \quad (2.6)$$

$$-\frac{(\nabla W, \nabla \zeta)}{|\nabla W| |\nabla \zeta|} = \cos \alpha \text{ на } \partial \langle \Sigma \rangle(\tau); \quad \int_{\langle Q_2 \rangle} dQ = \text{const}$$

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0 \text{ в } \langle Q_1 \rangle(\tau)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } \langle S_1 \rangle(\tau) \cup \langle \Sigma \rangle(\tau); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \mu_0 \frac{V(x, y, z)}{k} \text{ на } S_0 \quad (2.7)$$

Здесь $\langle \cdot \rangle$ означает усреднение по быстрому времени t .

Краевая задача (2.3)–(2.7) связывает главные члены асимптотического разложения (2.2)

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \epsilon_1^3 \varphi(x, y, z, \tau) + o(\epsilon_1^3) \\ \varphi_1 &= \epsilon_1^2 \Phi(x, y, z, \tau) \sin t + O(\epsilon_1^3); \quad \xi = \zeta(x, y, z, \tau) + o(\epsilon_1^3) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Краевая задача (2.3)–(2.6) по форме совпадает с задачей о волнах на поверхности капиллярной жидкости [12–15]. Дополнительные псевдодифференциальные члены в динамическом краевом условии (2.6) имеют смысл давления (акустического радиационного), приложенного к свободной поверхности. Это давление параметрически зависит от положения поверхности $\langle \Sigma \rangle(\tau)$ (Φ – решение задачи Неймана (2.7) с подвижной границей).

3. Задача о капиллярно-звуковой равновесной форме. Если положение усредненной поверхности не зависит от τ , т.е.

$$\langle \Sigma \rangle = \Sigma_0 : \zeta_0 = \zeta_0(x, y, z) = 0, \quad \langle Q_1 \rangle = Q_0, \quad \varphi = 0, \quad \Phi = \Phi_0(x, y, z)$$

то задача (2.3)–(2.7) редуцируется к стационарной краевой задаче

$$-\mu(K_1 + K_2) - \mu Bx + \frac{1}{4}(k^2\Phi_0^2 - (\nabla\Phi_0)^2) = \text{const на } \Sigma_0 \quad (3.1)$$

$$-\frac{(\nabla W, \nabla\zeta_0)}{|\nabla W||\nabla\zeta_0|} = \cos \text{ на } \partial\Sigma_0; \quad \int_{\langle Q_2 \rangle} dQ = \text{const}$$

причем Φ_0 удовлетворяет задаче

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_0 + k^2\Phi_0 &= 0 \text{ в } Q_0 \\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} &= 0 \text{ на } \langle S_1 \rangle \cup \Sigma_0; \quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = \mu_0 \frac{V(x, y, z)}{k} \text{ на } S_0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) выражает баланс между капиллярными, гравитационными и акустическими радиационными силами. По аналогии с капиллярной формой равновесия поверхность Σ_0 , определяемая из (3.1), (3.2), была названа авторами *капиллярно-звуковой равновесной формой* (КЗРФ). При введенных асимптотических соотношениях (2.1) геометрия капиллярно-звуковой поверхности может существенно отличаться от геометрии капиллярной поверхности. Соответственно изменится характер плесканий жидкости и устойчивость поверхности раздела двух фаз.

4. Теория линейных нормальных колебаний относительно капиллярно-звуковой равновесной формы. Устойчивость форм квазиравновесия. Линеаризуем задачу (2.3)–(2.7) относительно КЗРФ Σ_0 : $x = H_0(y, z)$ и будем искать нормальные колебания вида

$$h = \exp(i\omega t) H(y, z); \quad \varphi = i\omega \exp(i\omega t) \psi(x, y, z);$$

$$\Phi = i\omega \exp(i\omega t) \Psi(x, y, z)$$

Это приводит к следующей спектральной краевой задаче относительно H и ψ :

$$\Delta\psi = 0 \text{ в } \langle Q_2 \rangle; \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \text{ на } \langle S_2 \rangle; \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{H}{(1 + (\nabla H_0)^2)^{1/2}} \text{ на } \Sigma_0 \quad (4.1)$$

$$-\omega^2\psi + \mu_1\mu AH = 0 \text{ на } \Sigma_0 \quad (4.2)$$

со спектральным параметром ω^2 . Линейный оператор $A = A_1 + A_2$ имеет вид

$$\begin{aligned} AH = [A_1H] + [A_2H] &= \left[-\text{div} \left\{ \frac{\nabla H}{(1 + (\nabla H_0)^2)^{1/2}} - \frac{(\nabla H, \nabla H_0)\nabla H_0}{(1 + (\nabla H_0)^2)^{3/2}} \right\} \right] + \\ &+ \left[\frac{1}{2\mu} \left\{ k^2\Phi_0\Phi_{0x}H - (\nabla\Phi_0, \nabla\Phi_{0x})H + k^2\Phi_0\Psi - (\nabla\Phi_0, \nabla\Psi) \right\} + BH \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\frac{W_y H_y + W_z H_z}{|\nabla_2 W|} = \frac{W_y H_{0y} + W_z H_{0z}}{|\nabla_2 W|} \frac{(\nabla H, \nabla H_0)}{(1 + (\nabla H_0)^2)^{1/2}} \text{ на } \partial\Sigma_0; \quad \int_{\Sigma_0} H dydz = 0$$

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0 \text{ в } Q_0; \quad \frac{\partial\Psi}{\partial n} = 0 \text{ на } \langle S_1 \rangle \cup S_0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = \frac{\Phi_{0xx}H - \Phi_{0z}H_z - \Phi_{0y}H_y - [\Phi_{0xy}H_{0y} + \Phi_{0xz}H_{0z}]H}{(1 + (\nabla H_0)^2)^{1/2}} \text{ на } \Sigma_0$$

Были исследованы спектральные свойства псевдодифференциального оператора A и показано, что он самосопряжен и имеет точечный действительный спектр с

конечным числом отрицательных собственных значений (см. работу, цитированную в сноске 1).

Следующая теорема устанавливает основные свойства спектральной задачи (4.1), (4.2) для оператора (4.3), (4.4).

Теорема 1. Пусть H_0, Φ_0 – решение задачи о КЗРФ (2.3)–(2.7), причем $H_0 \in C^2(P\Sigma_0)$, $\Phi_0 \in C^2(Q_0 \cup \Sigma_0)$ ($P\Sigma_0$ – проекция Σ_0 на Oyz). Тогда 1) спектральная задача (4.1)–(4.4) имеет точечный действительный спектр, состоящий из собственных значений, и $\{H_n\}$ – базис в фактор-пространстве $L_2(P\Sigma_0)/\text{const}$; 2) множество отрицательных собственных значений ω_n^2 конечно.

Доказательство. Введем вспомогательный оператор $T: H \rightarrow \psi|_{\Sigma_0}$, определяемый решением задачи Неймана (4.1). Оператор T предкомпактен и обратим на всюду плотном множестве в $L_2(P\Sigma_0)/\text{const}$. Краевое условие (4.2) приводит к спектральному уравнению

$$C_0(\omega^2)H = (\mu\mu_1 A - \omega^2 T)H = 0 \quad (4.5)$$

со спектральным параметром ω^2 . Множество его решений совпадает со спектром исходной задачи (4.1)–(4.4).

Рассмотрим оператор A_1 , определенный формулами (4.3). Он возникает при анализе нормальных колебаний капиллярной жидкости и является неограниченным, самосопряженным и положительным в $L_2(P\Sigma_0)/\text{const}$ [14]. Введем вспомогательные операторы C_1 и C_2

$$C_1(\omega^2) = \omega^2 A_1^{-1} T - \mu\mu_1 (E + A_1^{-1} A_2) = C_2(\omega^2) - \mu\mu_1 E$$

где C_1 получен действием A_1^{-1} слева на оператор C_0 уравнения (4.5). Оператор $C_2(\omega^2)$ является предкомпактным в $L_2(P\Sigma_0)/\text{const}$. Таким образом, если ω^2 – решение уравнения (4.5), то $\mu\mu_1$ – собственное значение оператора C_2 , и, следовательно, ω^2 – собственное значение спектральной задачи (4.1)–(4.4). Поскольку T и A – самосопряженные операторы, то эти собственные значения действительны.

Регулярное множество спектральной задачи (4.1)–(4.4) не пусто и содержит, по крайней мере, комплексные числа с ненулевой мнимой компонентой. Для регулярной точки ω_0^2 уравнение (4.5) эквивалентно спектральному уравнению вида

$$(C + (\omega^2 - \omega_0^2)^{-1} E)H = 0$$

где $C(\omega_0^2) = C_1(\omega_0^2)^{-1} A_1^{-1} T$ – вполне непрерывный оператор в $L_2(P\Sigma_0)$. Поскольку оператор C компактен, то его спектр точечный состоит из собственных значений и верно утверждение 1 теоремы.

Все собственные значения оператора $A_1^{-1} T$ положительны как собственные значения задачи о колебаниях капиллярной жидкости, т.е. при всех допустимых H

$$(A_1^{-1} T H, H) > 0$$

Тогда

$$\omega_n^2 = \mu\mu_1 ((H_n, H_n) + (A_1^{-1} A_2 H_n, H_n)) / (A_1^{-1} T H_n, H_n)$$

где $(H_n, H_n) = 1$, $(A_1^{-1} T H_n, H_n) > 0$. Поскольку оператор $A_1^{-1} A_2$ компактен и $\{H_n\}$ – базис в $L_2(P\Sigma_0)$, то $(A_1^{-1} A_2 H_n, H_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Следовательно, верно утверждение 2.

Следствие 1. Потеря устойчивости КЗРФ может происходить лишь конечным числом линейно независимых способов (возмущений).

Следствие 2. КЗРФ устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения оператора A положительны.

Второе следствие совпадает по форме со спектральным принципом устойчивости, применявшимся ранее для анализа устойчивости капиллярной формы равновесия [14] (устойчивость исследовалась на основе спектральных свойств оператора типа A_1).

5. Плоская капиллярно-звуковая равновесная форма. Плоская капиллярная поверхность в прямом цилиндрическом сосуде реализуется в случае, когда угол смачивания прямой. Эта поверхность остается плоской, если акустический вибратор на верхнем торце создает плоскую акустическую волну

$$V_0(x, y, z) = V_0 = \text{const}$$

$$(\epsilon = -\frac{V_0}{c \sin(kh_1)}, \mu_0 = -\sin(kh_1), V(y, z) = 1)$$

Задача о КЗРФ имеет тогда "тривиальное" решение

$$H_0(y, z) \equiv 0; \Phi_0(x, y, z) = k^{-2} \cos(kx) \quad (5.1)$$

Этот модельный случай удобен для сравнения свойств капиллярной формы и КЗРФ. Известно (см. [14, 16]), что плоская капиллярная поверхность соответствует единственному решению задачи о капилляре в сосуде в форме кругового цилиндра, если $B > \kappa_{11}^2$, где κ_{11} – минимальный корень уравнения $J_1'(\kappa_{11}) = 0$ ($J_p(\cdot)$ – функции Бесселя). Разложим решение нелинейной краевой задачи (3.1), (3.2) в ряд Фурье по полной системе функций

$$h_{pq}(r, \theta) = J_p(\kappa_{pq}r) \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} (p\theta)$$

(в полярной системе координат). Получим

$$H_0(r, \theta) = \sum_{pq \neq 00} \eta_{pq} h_{pq}(r, \theta) \quad (5.2)$$

$$\Phi_0(x, y, z) = k^{-2} \cos(kx) + \sum_{pq \neq 00} \chi_{pq} b_{pq}(x) h_{pq}(r, \theta) + \chi_{00} \cos(k(x - h_1)) \quad (5.3)$$

$$b_{pq}(x) = \begin{cases} -\frac{\text{ch}(\phi(x - h_1))}{\text{ch}(\phi h_1) \phi \text{th}(\phi h_1)}, & \kappa_{pq} > k, \\ -\frac{\cos(\phi(x - h_1))}{\cos(\phi h_1) \phi \text{tg}(\phi h_1)}, & \kappa_{pq} < k, \end{cases} \quad \phi = \sqrt{|\kappa_{pq}^2 - k^2|}$$

Здесь η_{pq}, χ_{pq} – неизвестные коэффициенты, причем каждому индексу pq соответствует два неизвестных коэффициента в случае неосесимметричной и один – в случае симметричной функции $h_{pq}(r, \theta)$, т.е.

$$\eta_{pq} h_{pq}(r, \theta) = \begin{cases} \eta'_{pq} J_p(\kappa_{pq}r) \sin p\theta + \eta''_{pq} J_p(\kappa_{pq}r) \cos p\theta, & p \neq 0 \\ \eta_{0q} J_0(\kappa_{0q}r), & p = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Подставляя разложения (5.2), (5.3) в уравнения (3.1), (3.2) и используя альтернативу Фредгольма, получим бесконечную систему нелинейных уравнений относительно $\eta = \{\eta_{pq}\}$. С точностью до $O(\|\eta\|)$ имеем

$$G_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} + o(\|\eta\|) = 0 \quad (5.5)$$

$$C_{pq} = \mu(B + \kappa_{pq}) + \frac{1}{2} b_{pq}(0), \quad p = 0, 1, \dots; \quad q = 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

Система (5.5) имеет "тривиальное" решение $\eta = 0$, что соответствует плоской форме равновесия. Кроме того, C_{pq} – собственные значения оператора A . Это означает, что при $C_{pq} > 0$ "тривиальное" решение определяет устойчивую КЗРФ. Если существует индекс pq , такой что $C_{pq}(k) = 0$, то "тривиальное" решение может быть неединственным решением задачи о КЗРФ. Для собственных значений с $p \neq 0$ тогда сразу два уравнения в (5.5) не имеют линейной компоненты по η . В соответствии с соотношениями (5.4) собственные значения $C_{0q}(q = 1, 2, \dots)$ имеют единичную кратность, и теорема М.А. Красносельского ([17], с. 135) дает достаточное условие бифуркации "тривиального" решения.

6. Вариационная постановка задачи и принцип минимума для капиллярно-звуковых равновесных форм. Приведенный выше пример показывает, что определение устойчивых КЗРФ, исходя из дифференциальной постановки (3.1), (3.2), может быть эффективным в случае, когда разыскиваемые формы совпадают с капиллярными. Если КЗРФ имеет геометрию, отличную от капиллярной, то более эффективным методом определения устойчивых форм равновесия был бы метод вариации границы [14, 15]. Однако в отличие от задачи о капилляре задача (3.1), (3.2) не имеет вариационного аналога (функционала потенциальной энергии). Было показано [3, 10], что вариационная задача, эквивалентная (1.1)–(1.6), может быть построена четырьмя независимыми способами, которые могут быть условно связаны с функционалами Гамильтона–Остроградского, Бейтмена, Бердичевского и Люка [18–21]. Использование вариационной задачи в форме Гамильтона–Остроградского, усредненного по быстрым вибрациям, позволяет построить вариационный принцип устойчивости КЗРФ, который по форме совпадает с принципом минимума потенциальной энергии. Доказана [7] возможность такой усредненной вариационной формулировки для гамильтоновых систем. Было выполнено [3] построение такого функционала для случая вибрирующего сосуда. Используем теорему 1 работы [3] (вариационная задача типа Гамильтона–Остроградского), которая утверждает, что множество гладких решений задачи (1.1)–(1.6) совпадает с множеством стационарных точек функционала

$$G(\xi, \varphi_i, \rho_i) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{Q_2} \rho_2 \left(\frac{(\nabla \varphi_2)^2}{2} - U_2(\rho_2) - \mu \mu_1 \varepsilon^3 B x \right) dQ - \mu \mu_1 \varepsilon^3 (|\Sigma| - \cos \alpha |S_2|) + \right. \\ \left. + \varepsilon \int_{Q_1} \rho_1 \left(\frac{(\nabla \varphi_1)^2}{2} - U_1(\rho_1) - \mu \mu_1 \varepsilon^3 B x \right) dQ \right\} dt \quad (6.1)$$

при ограничениях (1.1)–(1.3), (1.6) и условиях для гладких изохронных вариаций

$$\delta \xi|_{t_1, t_2} = 0, \quad \delta \rho_i|_{t_1, t_2} = 0 \quad (6.2)$$

где $p_i = \rho_i^2 dU_i / d\rho_i$.

Используя технику двухмасштабных разложений [3], можно показать, что

$$\langle G(\xi, \varphi_i, \rho_i) \rangle = \text{const} + \varepsilon_1^3 \mathcal{G}(\zeta, \psi) + O(\varepsilon_1^4)$$

где

$$\mathcal{G}(\zeta, \psi) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \int_{\langle Q_2 \rangle} \left(\frac{(\nabla \Phi)^2}{2} - \mu \mu_1 B x \right) dQ - \mu \mu_1 (|\langle \Sigma \rangle| - \cos \alpha |\langle S_2 \rangle|) + \right. \\ \left. + \frac{\mu_1}{4} \int_{\langle Q_1 \rangle} (k^2 \Phi^2 - (\nabla \Phi)^2) dQ - \frac{\mu_0 \mu_1}{2k} \int_{S_0} \Phi V(x, y, z) ds \right\} d\tau \quad (6.3)$$

Следующая теорема выражает принцип минимума для КЗРФ.

Теорема 2. Задача определения устойчивых гладких решений задачи о КЗРФ Σ_0 : $\zeta_0 = 0$ эквивалентна задаче нахождения строгих минимумов функционала

$$\Pi(\zeta_0) = \mu \left(|\Sigma_0| + \cos \alpha |\langle S_1 \rangle| + \int_{\langle Q_2 \rangle} B x dQ \right) + \\ + \left(\frac{1}{4} \int_{Q_0} (k^2 \Phi_0^2 - (\nabla \Phi_0)^2) dQ + \frac{\mu_0}{2k} \int_{s_0} V(x, y, z) \Phi_0 ds \right) = -\mathcal{G}(\zeta_0(x, y, z), \Phi_0(x, y, z))$$

где Φ_0 – решение краевой задачи (3.2), и выполнено условие сохранения объема

$$\int_{\langle Q_2 \rangle} dQ = \text{const}$$

Доказательство проводится путем подсчета второй вариации функционала $\Pi(\zeta_0)$ при $\zeta_0 = x - H_0$. Вторая вариация по Σ_0 вычислена ранее в ([14, гл. 1]) (первая вариация по Φ_0 , как легко заметить, равна нулю при ограничении (3.2), а первая вариация по ζ_0 ведет к уравнениям (3.1)), связывающим Φ_0 и ζ_0 . При этом

$$\delta^2 \Pi = \mu^{-1} \int_{P\Sigma_0} (A \delta H, \delta H) dy dz$$

где A – оператор (4.3)–(4.4). Условие $\delta^2 \Pi > 0$ эквивалентно спектральному принципу устойчивости.

Заметим, что использование вариационного подхода позволяет ввести понятие обобщенного решения задачи. Строгое математическое решение проблемы построения теории обобщенных решений задачи (3.1), (3.2) – предмет дополнительных математических исследований.

Авторы благодарят рецензента за замечания.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Германского исследовательского общества (DFG N 436 UKR 113/33/00).

ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов Д.В., Черепанов А.А. О возникновении стационарного рельефа на поверхности раздела жидкостей в вибрационном поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 8–13.
2. Тимоха А.Н. Влияние поперечных вибраций сосуда на свободную поверхность жидкости // Техн. механика. 1997. Вып. 5. С. 33–41.
3. Beyer K., Gawrilyuk I., Günther M. et al. Compressible potential flows with free boundary. PI: Vibricapillary equilibria: Preprint N NTZ-1. Leipzig: Univ. Leipzig, 1999. 18 S.
4. Tian Y., Holt R.G., Apfel R.E. Deformation and location of an acoustically levitated liquid drop // J. Acoust. Soc. Amer. 1995. V. 93. № 6. P. 3096–3104.
5. Apfel R.E., Tian Y., Jankovsky J. et al. Free oscillations and surfactant studies of superdeformed drops in microgravity // Phys. Rev. Letts. 1998. V. 78. № 10. P. 1912–1915.
6. Lee C.P., Anilkumar A.V., Hmelo A.B. et al. Equilibrium of liquid drops under effects of rotation and acoustic flattening: results from USML-2 experiments in space // J. Fluid Mech. 1998. V. 354. P. 43–67.
7. Юдович В.И. Вибродинамика систем со связями // Докл. РАН. 1997. 354, № 5. С. 622–624.
8. Shi T., Apfel R. Instability of an interface between two fluids in an acoustic field // ASA 127th Meeting M.I. T. 1994. P. 1–2.
9. Луковский И.А., Тимоха А.Н. О стабилизации поверхности раздела жидкости и газа при взаимодействии с акустическими полями в газе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 3. С. 80–86.
10. Луковский И.А., Тимоха А.Н. Вариационные формулировки задачи о взаимодействии поверхности раздела "жидкость–газ" с акустическим полем // Мат. методы исследования прикладных задач динамики тел, несущих жидкость. Киев: 1992. С. 3–10.

11. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. Киев: Изд-во Всеукраинской АН, 1934. 112 с.
12. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
13. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. Киев: Наук. думка, 1990. 295 с.
14. Мышкис А.Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю. и др. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / Под ред. А.Д. Мышкиса. Киев: Наук. думка, 1992. 592 с.
15. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 230 с.
16. Уральцева Н.Н. Разрешимость задачи о капиллярах // Вестн. ЛГУ. 1975. № 1. Вып. 1. С. 143–149.
17. Красносельский М.А. Топологические методы и теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956. 392 с.
18. Hargreaves R. A pressure integral as kinetic potential // Phil. Mag. 1908. V. 16. P. 436–444.
19. Bateman H. Partial Differential Equations of Mathematical Physics. N.-Y.: Dover, 1944. 522 p.
20. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
21. Luke J.C. A variational principle for fluid with free surface // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. Pt 2. P. 395–397.

Киев
tim@imath.kiev.ua

Поступила в редакцию
27.IV.2000 г.