

УДК 533.72

© 2001 г. В.С. Галкин, В.А. Жаров

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА И СТРУКТУРЕ СЛАБОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В МНОГОАТОМНОМ ГАЗЕ ПРИ ПОМОЩИ УРАВНЕНИЙ БАРНЕТТА

Представлены выражения для линейных барнеттовых переносных свойств с коэффициентами переноса в приближении Мэзона–Мончика. С их помощью решены задачи о распространении звука и структуре слабой ударной волны.

Впервые вопрос о значимости влияния внутренних степеней свободы молекул на барнеттовы коэффициенты переноса был поставлен Макклом и Далером [1]; дан вывод формул для этих коэффициентов для классических моделей молекул с вращательными степенями свободы (шероховатые сферы, нагруженные сферы, сфероцилиндры) и рассмотрены указанные в аннотации задачи. Однако эти модели обладают известными недостатками, и предпочтение отдается квазиклассическому подходу [2, 3], в рамках которого получены выражения для барнеттовых коэффициентов переноса [4].

Подчеркнем, что результаты данной статьи дают, вообще говоря, оценку сверху влияния вращений молекул на барнеттовы коэффициенты переноса: они основаны на данных [4], полученных для случая легких обменов поступательной и внутренней энергии молекул, и не учитывают релаксацию вращений молекул.

1. Линейные переносные свойства. Барнеттовы коэффициенты переноса многоатомного газа приближенно выражаются [4] через коэффициенты сдвиговой η и объемной ζ вязкости, коэффициенты поступательной λ_t и внутренней λ_v теплопроводности, коэффициент σ . Например, для коэффициентов при линейных слагаемых тензора напряжений и вектора теплового потока имеем

$$\xi_2 \approx \frac{2\eta^2}{p}, \quad \xi_4 \approx \frac{4\eta}{5p} \lambda_t, \quad \omega_2 \approx \frac{\zeta}{p} (\lambda_t - \sigma \lambda_v), \quad \omega_2 \approx \frac{3\zeta^2}{2p} (1 + \sigma) \quad (1.1)$$

$$\gamma_2 \approx -\frac{2}{5Rp} \left(\lambda_t^2 + \frac{5}{2} \frac{k_B}{c_v} \lambda_v^2 \right), \quad \gamma_5 \approx \frac{4\eta \lambda_t}{5Rp}, \quad \gamma_{12} \approx \frac{\zeta}{Rp} (\lambda_t - \sigma \lambda_v)$$

Здесь использованы принятые ранее обозначения [4], давление $p = \rho RT$, $R = k_B/m$ – газовая постоянная, k_B – постоянная Больцмана, m – масса молекулы, c_v – теплоемкость из-за внутренних степеней свободы при постоянном объеме. Можно показать [2, 3], что

$$\sigma = \frac{3k_B}{2c_v} = \frac{3(\gamma - 1)}{5 - 3\gamma}, \quad \zeta = \frac{1}{4} \pi k_B c_v \eta Z \left(\frac{3}{2} k_B + c_v \right)^{-2} \quad (1.2)$$

где γ – отношение удельных теплоемкостей, Z – отношение времен вращательной и поступательной релаксаций (для различных газов известны полуэмпирические зависимости $Z(T)$ [3]).

Согласно приближению Мэзона–Мончика, коэффициент η такой же, как и для соответствующего одноатомного газа, в то же время [3]

$$(\lambda_i, \lambda_v) = \frac{15}{4} R\eta(\lambda_i^*, \lambda_v^*), \quad \lambda_i^* = 1 - \frac{A}{\sigma}, \quad \lambda_v^* = \frac{2\beta}{5\sigma}(1 + A) \quad (1.3)$$

$$A = \frac{5 - 2\beta}{\pi Z} \left[1 + \frac{2}{\pi Z} \left(\frac{5}{2\sigma} + \beta \right) \right]^{-1}, \quad \beta = \frac{\rho D}{\eta} \varphi(Z) \approx 1.328 \varphi(Z)$$

Здесь использована формула (1.2) для σ , D – коэффициент самодиффузии одноатомного газа. При $Z \geq 3$ имеем $\varphi \approx 1$ [3]. Далее полагаем $\varphi = 1$, тогда влияние вращений проявляется через γ и Z .

В случае легких обменов $Z \sim 1$. При фиксированном Z случай одноатомного газа формально получаем, полагая $c_v = 0$ ($\sigma = \infty$), тогда $\zeta = 0$, $\lambda_i^* = 1$, $\lambda_v^* = 0$. Одноатомные значения η , λ имеем в случае замедленных обменов ($Z \gg 1$), когда температура определяется кинетической энергией молекул, объемная вязкость отсутствует, заселенности вращательных уровней удовлетворяют системе релаксационных уравнений.

Используя соотношения (1.1)–(1.3) и полученные ранее формулы [4], для рассматриваемых ниже одномерных линеаризованных течений находим следующие выражения для напряжения и теплового потока:

$$\tau \equiv \tau_{xx} = -\frac{4}{3} \eta B \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{4}{3} \frac{\eta^2}{\rho \rho} Q_2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{2\eta^2}{T \rho} Q_3 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1.4)$$

$$q \equiv q_x = -\frac{15}{4} R\eta \Lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{7}{4} \frac{\eta^2}{\rho} Q_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.5)$$

$$B = 1 + \frac{3}{4} \frac{\zeta}{\eta} \approx 1 + \frac{3\pi}{32} Z(\gamma - 1)(5 - 3\gamma), \quad \Lambda = \lambda_i^* + \lambda_v^* \quad (1.6)$$

$$Q_1 = \frac{15\sigma}{7(1+\sigma)} \left(\lambda_i^{*2} + \frac{5}{3} \sigma \lambda_v^{*2} \right) - \frac{8}{7} \lambda_i^* - \frac{20}{7} (B - 1)(\lambda_i^* - \sigma \lambda_v^*) \quad (1.7)$$

$$Q_2 = 1 + 2(1 + \sigma)(B - 1)^2, \quad Q_3 = \lambda_i^* + \frac{5}{2} (\lambda_i^* - \sigma \lambda_v^*)(B - 1) \quad (1.8)$$

Слагаемые с первыми производными (1.4), (1.5) соответствуют приближению Навье–Стокса, со вторыми – Барнетта, u – скорость газа. В случае одноатомного газа $B = \Lambda = Q_m = 1$ ($m = 1, 2, 3$). Влияние внутренних степеней свободы молекул на коэффициенты переноса проявляется через зависимости B , Λ , Q_m от γ и Z . Конечной целью является установление меры этого влияния на Q_m и на решение задач (т.е. зависимостей решений от отклонений Q_m от единицы).

В дальнейшем предполагаем вращения полностью возбужденными, так что $\gamma = \text{const}$. Тогда зависимость величин B , Λ , Q_m от T выражается через функцию $Z(T)$.

Представленные в табл. 1 данные характеризуют зависимости коэффициентов переноса от Z , γ . Для азота имеем [3] $Z = 3, 6, 10$ при $T \approx 200, 400, 1000$ К; значение $Z = 20$ близко к предельному (напомним, что для функции $Z(T)$ характерен большой разброс имеющихся данных).

С увеличением Z величина B линейно растет, что обусловлено усилением влияния объемной вязкости (так как $Z \sim \zeta/\eta$), в то время как Λ стремится к значению, даваемому модифицированной формулой Эйкена [2, 3]. Вращения молекул оказывают значительно большее влияние на барнеттовы коэффициенты переноса Q_m , чем на навье-стоксовы. Коэффициент Q_1 с ростом Z сначала меняет знак, а затем

Таблица 1

Z	γ	B	Λ	Q_1	Q_2	Q_3
3	$\frac{7}{5}$	1.28	1.31	0.315	1.40	1.10
	$\frac{4}{3}$	1.29	1.47	0.246	1.35	1.05
6	$\frac{7}{5}$	1.56	1.32	-0.034	2.60	1.44
	$\frac{4}{3}$	1.59	1.49	-0.116	2.39	1.40
10	$\frac{7}{5}$	1.94	1.33	-0.520	5.44	1.88
	$\frac{4}{3}$	1.98	1.50	-0.619	4.86	1.86
20	$\frac{7}{5}$	2.88	1.34	-1.76	18.76	2.99
	$\frac{4}{3}$	2.96	1.52	-1.91	16.42	3.02

$|Q_1|$ увеличивается примерно линейно по Z , как и Q_3 . Особенно сильно растет Q_2 в силу его квадратичности по Z .

Влияние γ существенно меньше влияния Z (за исключением Q_1).

2. Распространение звука. Рассмотрим задачу о распространении вынужденных плоских ультразвуковых колебаний с фиксированной частотой ω вдоль оси $x > 0$ в многоатомном газе. Для возмущений газодинамических перемен имеем

$$\delta\rho = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \ll 1, \quad \delta T = \frac{T - T_0}{T_0} \ll 1, \quad u \ll c \quad (2.1)$$

$$\delta p = \frac{p - p_0}{p_0} = \delta\rho + \delta T \ll 1, \quad u \equiv u_x, \quad c = \sqrt{\gamma R T_0}$$

где ρ_0, T_0, p_0 – массовая плотность, температура и давление в невозмущенном газе, c – скорость звука при числе Кнудсена $\text{Kn} = 0$. Полагаем

$$\text{Kn} = \frac{\omega \eta_0}{p_0}, \quad \eta_0 = \eta(T_0), \quad \tau_{xx} = \tau, \quad q_x = q \quad (2.2)$$

Число Kn определено, как в одноатомном газе [5], для более наглядной демонстрации влияния внутренних степеней свободы молекул. В переменных (2.1), (2.2) запишем линеаризованные уравнения неразрывности и энергии

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial \delta T}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{p_0} \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

Используя уравнение (2.4) и уравнение состояния, приводим уравнение импульса к виду

$$\frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \delta T}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{p_0} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial t} = 0 \quad (2.5)$$

Будем искать решение в виде

$$(\delta\rho, \delta p, \delta T, u) \sim \exp(-kx^* + t^*) \quad (2.6)$$

$$k = K \frac{c}{\omega} \equiv \alpha + i\beta, \quad x^* = \frac{\omega}{c} x, \quad t^* = i\omega t$$

Здесь K – волновое число, t – время, i – мнимая единица, α – коэффициент поглощения, β – коэффициент дисперсии (обратно пропорциональный фазовой скорости).

Подставим выражения (1.4), (1.5) в уравнения (2.3), (2.5), исключив производную от δr при учете уравнения (2.4), и введем новые переменные

$$v = \frac{u}{c} \exp(-t^*), \quad \theta = \delta T \exp(-t^*)$$

полагая затем

$$\frac{\partial}{\partial t^*} = 1, \quad ()^{(n)} = \frac{d^n ()}{dx^{*n}}, \quad n = 1, \dots, 5$$

В итоге поиск решения в виде (2.6) приводит к системе уравнений

$$v + \frac{1}{\gamma} \left(1 + \frac{4}{3} i \text{Kn} B_0 \right) v^{(2)} - \frac{4}{3\gamma^2} \text{Kn}^2 Q_{20} v^{(4)} - \frac{i}{\gamma} \theta^{(1)} - \frac{2i}{3\gamma^2} \text{Kn}^2 S \theta^{(3)} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{2}{3} v^{(1)} - \frac{7}{6\gamma} \text{Kn}^2 Q_{10} v^{(3)} + \frac{2i}{3(\gamma-1)} \theta - \frac{5}{2\gamma} \text{Kn} \Lambda_0 \theta^{(2)} = 0, \quad S = 3Q_{30} - 2Q_{20}$$

Значения B_0 , Λ_0 , Q_{m0} получаем с помощью соотношений (1.3), (1.6)–(1.8), заменяя Z на $Z_0 = Z(T_0)$.

Из системы (2.7) имеем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} & k^6 \frac{\gamma-1}{6\gamma^3} \text{Kn}^3 (7 \text{Kn} Q_{10} S - 30i \Lambda_0 Q_{20}) + \\ & + k^4 \frac{1}{12\gamma^2} \{ \text{Kn} [3(\gamma-1)(8Q_{30} - 7Q_{10} - 20B_0 \Lambda_0) - 16Q_{20}\gamma] + 45i(\gamma-1)\Lambda_0 \} + \\ & + k^2 \frac{\text{Kn}}{12\gamma} \{ i \text{Kn} [45(\gamma-1)\Lambda_0 + 16B_0] + 12\gamma \} + 1 = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

В дальнейшем рассматриваем только звуковую моду [5]. При $\text{Kn} \ll 1$ из уравнения (2.8) следует

$$\alpha = \alpha_1 \text{Kn} + O(\text{Kn}^3), \quad \beta = 1 - \beta_2 \text{Kn}^2 + O(\text{Kn}^4), \quad \beta_2 = \kappa_1 + \kappa_2 \quad (2.9)$$

Разложение (2.9) обсуждалось [5] в случае одноатомного газа.

Величина α_1 определяется приближением Навье–Стокса

$$\alpha_1 = \frac{2B_0}{3\gamma} + \frac{15}{8\gamma^2} \Lambda_0 (\gamma-1)^2 \quad (2.10)$$

В то же время β_2 дает вклад как приближение Навье–Стокса (κ_1), так и приближение Барнетта (κ_2)

$$\kappa_1 = \frac{2B_0^2}{3\gamma^2} + \frac{25B_0}{4\gamma^3} \Lambda_0 (\gamma-1)^2 + \frac{225\Lambda_0^2}{128\gamma^4} (\gamma-1)^3 (3\gamma-7) \quad (2.11)$$

$$\kappa_2 = \frac{\gamma-1}{\gamma^2} \left(\frac{7}{8} Q_{10} - Q_{30} \right) + \frac{2Q_{20}}{3\gamma}$$

Формулы (2.9)–(2.11) – асимптотическое ($\text{Kn} \rightarrow 0$) решение задачи в приближении Барнетта, в следующие члены рядов дают вклады более высокие приближения метода Чепмена–Энскога.

Таблица 2

№	γ	Z_0	β_2	κ_1/κ_2	G_1	G_2	G_3	G	Δ_G
1°	$7/5$	3	1.53	2.07	-239	25	449	235	1.22
2°	$7/5$	6	2.38	1.54	-309	34	723	448	3.39
3°	$7/5$	10	4.20	0.985	-424	49	1367	992	30.4
4°	$7/5$	20	12.10	0.511	-818	96	4378	3656	-11.6
5°	$4/3$	3	1.57	2.04	-211	19	363	171	1.16
6°	$4/3$	6	2.42	1.65	-283	26	573	316	3.85
7°	$4/3$	10	4.18	1.12	-400	38	1066	704	-30.7
8°	$4/3$	20	11.80	0.609	-806	77	3370	2641	-6.78
9°	$5/3$	—	1.08	1.90	-353	51	756	454	—

В табл. 2, 3 представлены некоторые результаты расчетов для данного и следующего разделов. Случай 9° соответствует одноатомному газу ($\gamma = 5/3$). Естественно, что при одинаковых γ и $Z_0 = Z$ значения коэффициентов переноса B_0 , Λ_0 , Q_{m0} равны значениям коэффициентов B , Λ , Q_m , приведенным в табл. 1.

Величины β_2 , κ_1/κ_2 характеризуют дисперсию и сравнительный вклад в нее приближений Навье–Стокса и Барнетта. Отношение κ_1/κ_2 уменьшается с ростом Z , т.е. растет относительный вклад приближения Барнетта в коэффициент дисперсии.

Для анализа значимости отличий барнеттовых коэффициентов переноса Q_{m0} от единицы при различных Kn , Z , γ в табл. 3 приведены значения

$$\Delta_\alpha = \frac{\alpha}{\alpha_*}, \quad \Delta_\beta = \frac{\beta}{\beta_*}, \quad \alpha_* = \alpha(\gamma, B_0, \Lambda_0, Q_{m0} = 1), \quad \beta_* = \beta(\gamma, B_0, \Lambda_0, Q_{m0} = 1)$$

Здесь α_* , β_* – решения уравнения (2.8) при $Q_{m0} = 1$ (но $B_0 \neq 1$, $\Lambda_0 \neq 1$, $\gamma \neq 5/3$). (Для одноатомного газа подробные данные представлены в [6].)

Отличия величин Δ_α , Δ_β от 1 характеризуют степень влияния изменений барнеттовых коэффициентов Q_{m0} , обусловленного вращением молекул, на решение задачи о распространении звука. Это влияние усиливается с ростом Kn и Z , особенно на коэффициент поглощения α .

3. Структура слабой ударной волны. Уравнения сохранения принимают вид

$$\begin{aligned} \rho u &= C_1, \quad p = C_1 \frac{RT}{u} \\ \rho + \rho u^2 + \tau &= C_2, \quad C_1 \left(u^2 + \frac{2R\gamma}{\gamma-1} T \right) + 2u\tau + 2q = C_3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

C_m ($m = 1, 2, 3$) – постоянные интегрирования. Вводя переменные

$$u_* = \frac{C_1}{C_2} u, \quad T_* = \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^2 RT, \quad \tau_* = \frac{\tau}{C_2}, \quad q_* = \frac{C_1}{C_2^2} q$$

исключая ρ , p при помощи первых двух уравнений (3.1), вычитая уравнение импульса из уравнения энергии, вместо последних двух уравнений (3.1) найдем

$$\begin{aligned} u_*^2 + T_* - u_* + u_* \tau_* &= 0 \\ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} T_* + u_* + u_* \tau_* + 2q_* &= C, \quad C = \frac{C_1 C_3}{C_2^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Таблица 3

№	Kn = 0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$\Delta_\alpha \cdot 10^3$							
1°	996	980	968	957	945	930	912
2°	976	889	830	789	755	727	704
3°	930	739	641	587	553	532	517
4°	774	470	384	350	335	329	329
5°	997	983	972	961	949	933	914
6°	979	901	850	814	785	760	739
7°	937	764	675	625	594	573	560
8°	792	505	420	387	372	367	369
$\Delta_\beta \cdot 10^3$							
1°	1000	1000	1006	1015	1028	1044	1063
2°	996	989	997	1012	1028	1045	1062
3°	987	967	973	985	998	1011	1023
4°	955	908	911	923	936	949	962
5°	1000	1000	1006	1014	1025	1039	1055
6°	996	991	1000	1015	1032	1050	1067
7°	989	973	984	1000	1015	1030	1044
8°	960	927	940	958	976	992	1007
$\alpha_* \cdot 10^3$							
1°	78	186	237	260	271	276	279
2°	90	209	259	279	285	286	284
3°	106	235	281	295	296	292	286
4°	144	283	314	315	308	297	286
5°	79	186	236	258	268	272	275
6°	92	212	261	279	285	286	283
7°	110	240	285	298	298	294	287
8°	151	290	319	319	310	298	287
$\beta_* \cdot 10^3$							
1°	986	908	825	755	699	651	610
2°	982	888	794	717	657	607	565
3°	976	862	754	672	610	560	520
4°	960	795	668	581	518	471	435
5°	986	906	822	753	696	650	610
6°	981	885	789	713	652	603	561
7°	975	856	747	664	602	552	512
8°	956	784	653	565	503	456	420

Используем методику, аналогичную принятой ранее [7] для смеси одноатомных газов, выбирая в качестве малого параметра

$$\varepsilon = u_*^- - u_*^+ = \frac{2\gamma(M^2 - 1)}{(\gamma + 1)(\gamma M^2 + 1)}; \quad u^- = u(x = -\infty), \quad u^+ = u(x = \infty) \quad (3.3)$$

где M – число Маха перед ударной волной ($x = -\infty$). Умножая обе части первого равенства (3.3) на $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$, получаем параметр, эффективность которого была продемонстрирована [8]. Преимущество такого рода параметров по сравнению с параметром [1] $y = M - 1 \ll 1$ состоит в том, что они конечны при увеличении M и ускоряют сходимость рядов по малому параметру. Параметр C выражается через ε формулой

$$C = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Вводим зависимые w , ϑ и независимую ξ переменные формулами

$$u_* = \frac{\gamma}{1+\gamma} + \frac{\varepsilon}{2} w, \quad T_* = \frac{\gamma}{(1+\gamma)^2} + \frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)} \varepsilon \vartheta - \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad x = \frac{\eta_0 \xi}{C_1 \varepsilon} \quad (3.4)$$

$$w(0) = 0, \quad w^- = 1, \quad w^+ = -1, \quad \vartheta^- = -1, \quad \vartheta^+ = 1$$

Величина η_0 определена ниже (см. (3.6)). Теперь можно записать систему уравнений (3.2) в виде

$$\varepsilon(w + \vartheta) + \varepsilon^2 \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} (w^2 - 1) + [2\gamma + (\gamma+1)\varepsilon w] \frac{\tau_*}{\gamma-1} = 0 \quad (3.5)$$

$$\varepsilon^2 (w^2 - 1) + \frac{8}{(1+\gamma)^2} \left[\left(\gamma + \frac{1+\gamma}{2} \varepsilon w \right) \tau_* - (\gamma^2 - 1) q_* \right] = 0$$

Ищем решение системы (3.5) в виде

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \dots, \quad \vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon \vartheta_1 + \dots$$

так что

$$\tau_* \approx \tau_2 \varepsilon^2 + \tau_3 \varepsilon^3, \quad q_* \approx q_2 \varepsilon^2 + q_3 \varepsilon^3$$

В барнеттовом приближении необходимо учесть возмущения навье-стоксовых коэффициентов переноса. При этом (см. (1.4)–(1.6)) аналогично известному подходу [8] имеем

$$\eta B \approx \eta_0 \left[B_0 + (\eta B)_T \frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)} \varepsilon \vartheta_0 \right], \quad (\eta B)_T = \frac{1}{\eta} \frac{\partial(\eta B)}{\partial T_*} \Big|_{T_* = T_{*0}} \quad (3.6)$$

$$\eta_0 = \eta(T_0), \quad T_0 = \frac{C_2^2}{RC_1^2} T_{*0} = T^- \left[\frac{\gamma M}{\gamma+1} \left(1 + \frac{1}{\gamma M^2} \right) \right]^2, \quad T_{*0} = \frac{\gamma}{(1+\gamma)^2}$$

и аналогично для $\eta\Lambda$. Здесь T^- – температура газа перед ударной волной.

Учитывая соотношения (3.4) и (3.6), получим (штрих означает производную по ξ)

$$\tau_2 = -\frac{2}{3} B_0 w'_0, \quad q_2 = -\frac{15}{4} \Lambda_0 \frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)} \vartheta'_0 \quad (3.7)$$

Используя соотношения (3.7), в навье-стоксовом приближении из системы (3.5) найдем

$$\vartheta_0 = -w_0, \quad w_0^2 - 1 = b w'_0, \quad b = \frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2} \left[\frac{4}{3} B_0 + \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma} \frac{15}{4} \Lambda_0 \right] \quad (3.8)$$

и, следовательно,

$$w_0 = -\text{th}(\xi/b) \quad (3.9)$$

Учитывая соотношения (1.4), (1.5), (3.2), (3.4), (3.6), (3.8), имеем

$$\tau_3 = -\frac{2}{3} B_0 w'_1 + w''_0 \left[(\eta B)_T \frac{(\gamma-1)b}{6(\gamma+1)} + \frac{2}{3} \gamma Q_{20} - (\gamma-1) Q_{30} \right] \quad (3.10)$$

$$q_3 = -\frac{1}{2(\gamma+1)} \left\{ \frac{15}{4} \Lambda_0 (\gamma-1) \vartheta'_1 + \frac{1}{4} w''_0 \left[\frac{15}{4} (\eta \Lambda)_T \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma+1} b + 7\gamma Q_{10} \right] \right\}$$

В следующем приближении

$$\vartheta_1 = -w_1 + bdw'_0, \quad d = \frac{2}{b(\gamma+1)} \left[\frac{2}{3} \gamma B_0 - (\gamma-1) \frac{15}{4} \Lambda_0 \right] \quad (3.11)$$

$$2w_0w_1 + \frac{8}{(\gamma+1)^2} \left[\gamma\tau_3 - (\gamma^2-1)q_3 + \frac{\gamma+1}{2} w_0\tau_2 \right] = 0 \quad (3.12)$$

Используя соотношения (3.7), (3.10), (3.11), приводим уравнение (3.12) к виду

$$w'_1b - 2w_0w_1 = \frac{G}{9(\gamma+1)^3} w''_0 \quad (3.13)$$

Решение уравнения (3.13) при учете выражения (3.9) запишем в виде

$$w_1 = FG \frac{\ln \operatorname{ch} X}{\operatorname{ch}^2 X}; \quad F = \frac{2}{9(\gamma+1)^3 b^2}, \quad X = \frac{\xi}{b} \quad (3.14)$$

и при помощи соотношений (3.9), (3.11), (3.14) находим

$$\vartheta_1 = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 X} (d + FG \ln \operatorname{ch} X) \quad (3.15)$$

В формулах (3.13)–(3.15)

$$G = G_1 + G_2 + G_3$$

$$G_1 = -8 \left\{ B_0^2 [8\gamma - (\gamma-1)^3] + (\gamma-1)^3 \left(\frac{45}{4} \Lambda_0 - B_0 \right)^2 \right\} \quad (3.16)$$

$$G_2 = 12\gamma(\gamma-1)b \left[(\eta B)_T + \frac{45}{16\gamma} (\gamma-1)^2 (\eta \Lambda)_T \right]$$

$$G_3 = 3\gamma(\gamma+1)[16\gamma Q_{20} + 3(\gamma-1)(7Q_{10} + 8Q_{30})]$$

Величина G_1 определяется приближением Навье–Стокса с невозмущенными значениями коэффициентов переноса, G_2 – вкладом возмущений этих коэффициентов, G_3 – приближением Барнетта.

Используя полученные решения (3.8), (3.9), (3.14)–(3.16), найдем параметры асимметрии профилей плотности Q_ρ и температуры Q_T в ударной волне. По определению

$$Q_\rho = \int_{-\infty}^{X_\rho} W_\rho dX \left[\int_{X_\rho}^{\infty} (1 - W_\rho) dX \right]^{-1}, \quad W_\rho = \frac{\rho(X) - \rho^-}{\rho^+ - \rho^-}$$

где центр профиля плотности X_ρ – корень уравнения $W_\rho(X) = 1/2$. Формулы для параметра асимметрии Q_T получаются отсюда заменой ρ на T . Аналогично известному подходу [7] получаем

$$X_\rho = \varepsilon \frac{\gamma+1}{2\gamma} + O(\varepsilon^2), \quad X_T = \varepsilon d + O(\varepsilon^2) \quad (3.17)$$

после чего находим

$$Q_\rho = Q_T = 1 - \varepsilon FG(1/\ln 2 - 1) + O(\varepsilon^2) \quad (3.18)$$

Коэффициенты d , F , G определены формулами (3.11), (3.14), (3.16).

Обратим внимание, что формулы [7], аналогичные (3.6), (3.13), (3.14), (3.16), (3.17), нуждаются в уточнении.

Для анализа значений G_1 , G_2 , G_3 рассмотрим линейную зависимость коэффициентов переноса от температуры, когда $(\eta B)_T = B_0$ и $(\eta \Lambda)_T = \Lambda_0$. Для реальных межмолекулярных потенциалов эти зависимости менее выражены и G_2 будет еще меньше.

Характерные значения указанных величин даны в табл. 1, где

$$\Delta_G = \frac{G(\gamma, B_0, \Lambda_0, Q_{m0})}{G(\gamma, B_0, \Lambda_0, Q_{m0} = 1)}$$

характеризует вклад изменений барнеттовых коэффициентов переноса из-за вращений молекул в величину G (аналогично Δ_α , Δ_β в разд. 2).

Учет барнеттовых слагаемых качественно изменяет решение: в приближении Навье–Стокса имеем $G = G_1 + G_2 < 0$, однако в приближении Барнетта $G = G_1 + G_2 + G_3 > 0$. Это имеет принципиальное значение для параметров асимметрии (3.18). Здесь в отличие от уравнений Навье–Стокса уравнения Барнетта дают правильный результат. Экспериментальные и численные исследования показали, что при $M < 1.8$ параметр Q_p меньше единицы. Из уравнений Навье–Стокса следует, что при любом M имеем $Q_p > 1$ [7, 9].

В связи со сказанным учет влияния вращений на барнеттовы коэффициенты переноса имеет принципиальное значение. Знаменатель в выражении для Δ_G при небольших Z положителен, с ростом Z проходит через нуль и становится отрицательным. Этим объясняется "поведение" Δ_G в табл. 2.

4. Заключение. Влияние вращений молекул на барнеттовы коэффициенты переноса значительно больше влияния на навье-стоксовы коэффициенты переноса. Оно растет с температурой и определяется усилением значимости объемной вязкости. Роль изменений барнеттовых коэффициентов переноса, обусловленных вращениями молекул, в задаче о распространении звука увеличивается при увеличении числа Кнудсена и температуры, причем она значительно больше для коэффициента поглощения, чем для коэффициента дисперсии. Зависимость барнеттовых коэффициентов переноса от многоатомности значительно изменяет параметры асимметрии профилей плотности и температуры в ударной волне (неучет этой зависимости приводит к качественно неверным результатам).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00409) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (00-15-96069).

ЛИТЕРАТУРА

1. McCoy B.J., Dahler J.S. Second-order constitutive relations for polyatomic fluids // Phys. Fluids. 1969. V. 12. № 7. P. 1392–1403.
2. Ferziger J.H., Kaper H.G. Mathematical Theory of Transport Processes in Gases. Amsterdam; London: North-Holland, 1972. = Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
3. Жданов В.М., Алиевский М.Я. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989. 335 с.
4. Галкин В.С. Уравнения Барнетта для многокомпонентных смесей многоатомных газов // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 590–604.

5. Галкин В.С., Носик В.И. О модификации уравнений Барнетта на примере задачи о распространении звука // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 3. С. 126–133.
6. Greenspan M. Transmission of sound waves in gases at very low pressures // Physical Acoustics. V. 2. Pt A. Properties of Gases, Liquids and Solutions. N.Y.: Acad. Press, 1965. P. 1–45.
7. Шавалиев М.Ш. Исследование структуры слабой ударной волны и распространения малых возмущений в смесях газов при помощи уравнений Барнетта // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 3. С. 444–456.
8. Grad H. The profile of a steady plane shock wave // Comm. Pure and Appl. Math. 1952. V. 5. № 3. P. 257–300.
9. Галкин В.С., Шавалиев М.Ш. Газодинамические уравнения высших приближений метода Чепмена–Энскога. (Обзор.) // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 4. С. 3–28.

Жуковский

Поступила в редакцию
4.X.2000