

УДК 533.06.11

© 2001 г.

В.Р. Кудашев, Б.И. Сулейманов

ВЛИЯНИЕ МАЛОЙ ДИССИПАЦИИ НА ПРОЦЕССЫ ЗАРОЖДЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

Продemonстрировано, что зарождение ударных волн "общего положения" при одномерном движении изоэнтропического газа с малой вязкостью описывается специальным решением А.М. Ильина уравнения Бюргерса. Указано, что оно же описывает зарождение ударных волн в одномерных моделях Фойхта и Хохлова – Заболоцкой – Кузнецова.

1. Введение. Анализ процессов спонтанного образования ударных волн (УВ), вывод о возможном существовании которых был сделан Риманом в результате исследования решений уравнений одномерного движения изоэнтропического газа ($h\alpha(h) \geq 0$ – квадрат скорости звука в газе)

$$h_T + (hv)_X = 0, \quad v_T + vv_X + \alpha(h)h_X = 0 \quad (1.1)$$

по-прежнему остается одной из актуальных задач гидродинамики.

УВ в рамках системы (1.1) описываются разрывными решениями. При учете же диссипации вместо разрывов возникают узкие переходные области, в которых скорость v и плотность h газа меняются гладко. В частности, анализ такой переходной области проводился [1–3] и для решений уравнений одномерного движения изоэнтропического газа с малой вязкостью

$$h_T + (hv)_X = 0, \quad v_T + vv_X + \alpha(h)h_X = \varepsilon^4 v_{XX}/h \quad (\varepsilon \ll 1) \quad (1.2)$$

Однако полная картина развития УВ для решений (1.2) до сих пор не получена. Отсутствует анализ процессов их зарождения. То же относится и к ряду других моделей с малой диссипацией [3, 4].

Особняком на этом фоне стоит результат А.М. Ильина ([5, гл. 6]) об асимптотике при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений модельного уравнения

$$v_T + g(v)v_X = \varepsilon^4 v_{XX}$$

А.М. Ильин показал, что для этого уравнения зарождение УВ "общего положения" в главном по ε порядке задается специальным решением уравнения Бюргерса (τ, ξ – растянутые переменные)

$$\Gamma_\tau + \Gamma\Gamma_\xi = \Gamma_{\xi\xi} \quad (1.3)$$

представляющим собой логарифмическую производную

$$\Gamma(\tau, \xi) = -2[\ln \Lambda(\tau, \xi)]'_\xi \quad (1.4)$$

модификации известного интеграла Пирси

$$\Lambda(\tau, \xi) = \int_R \exp(-(4\lambda\xi - 2\tau\lambda^2 + \lambda^4)/8) d\lambda \quad (1.5)$$

В разд. 3 настоящей работы показано, в частности, что в случае системы (1.2) зарождение УВ "общего положения" по-прежнему описывается этим решением урав-

нения (1.3) (ранее [6] этот вывод был анонсирован.) Здесь же указано, что оно также описывает зарождение УВ для одномерной модели Фойхта и для одного из пространственно-одномерных вариантов модели Хохлова – Заболоцкой – Кузнецова.

Далее, в разд. 4 описаны результаты численного моделирования этого универсального специального решения уравнения (1.3). Отметим, что используемая при этом процедура численного счета существенно опирается на особую для Γ роль прямой $\xi = 0$, образующей так называемый страт Максвелла M ([7, с. 306]) катастрофы сборки, описываемой уравнением

$$\xi - \tau f(\tau, \xi) + f(\tau, \xi)^3 = 0 \quad (1.6)$$

(Корень уравнения (1.6) является главным членом асимптотики Γ при $\xi^2 + \tau^2 \rightarrow \infty$ всюду вне луча ($\xi = 0, \tau > 0$) ([5, гл. 6]).)

Начнем с анализа поведения решений системы (1.1) в окрестностях их точек градиентных катастроф (ГК), что необходимо как предварительный этап для проводимых в разд. 3 рассуждений. Но этот анализ имеет и самостоятельную ценность.

2. Локальный анализ в окрестностях точек градиентных катастроф. Рассматриваются решения системы (1.1) с не равной тождественно нулю величиной $I = h_T v_X - v_T h_X$. (При $I \equiv 0$ скорость является функцией плотности ([8, с. 141])). Для таких v и h уравнения (1.1) преобразование годографа локально сводятся к линейным: рассмотрение T и X в качестве координат, а h и v в качестве независимых переменных дает систему

$$X_h = v T_h - \alpha(h) T_v, \quad X_v = v T_v - h T_h \quad (2.1)$$

Известно, что точкам обращения в бесконечность производных решений системы (1.1) "общего положения" отвечают нули якобиана

$$J = X_h T_v - X_v T_h = h(T_h)^2 - \alpha(h)(T_v)^2 \quad (2.2)$$

гладкого отображения $(h, v) \rightarrow (X, T)$. Но, по-видимому, ранее этот факт для анализа особенностей решений системы (1.1) в окрестностях их точек ГК не привлекался. Между тем как раз его учет в духе подхода, применявшегося ранее [9] в близкой ситуации, позволяет ниже получить в этих точках полные асимптотические разложения v и h .

Точнее говоря, для анализа сингулярностей решений системы (1.1) в окрестности точки ГК (T_*, X_*) (соответствующей точке (h_*, v_*) обращения якобиана J в нуль) будут использованы разложения Тейлора в точке (h_*, v_*) решений линейного уравнения

$$h B_{hh} + 2 B_h = \alpha(h) B_{vv} \quad (2.3)$$

к которому система (2.1) сводится при помощи соотношений

$$T = B_v, \quad X = -B - h B_h + v B_v \quad (2.4)$$

Замечание 1. Коэффициенты

$$b_{ij}(v_*, h_*) = \left. \frac{\partial^{i+j} B(v, h)}{i! j! \partial v^i \partial h^j} \right|_{v=v_*, h=h_*}$$

рядов Тейлора всевозможных гладких в точках $(v = v_*, h = h_*)$ решений (2.3) (для которых якобиан (2.2) в этих точках необязательно обращается в нуль) являются функциями v_* и h_* . Поэтому помимо ограничений на $b_{ij}(v_*, h_*)$, следующих из справедливости уравнения (2.3), за счет параметров v_* и h_* возможно наложение на них еще двух (а при анализе решений системы (1.1) "общего положения" не более двух) ограничений, выражаемых при помощи равенств. Два таких ограничения фактически и используются ниже для обращения в нуль якобиана (2.2) и постоянной g_{02} в соотношении (2.17).

Помня это замечание о возможности наложения двух (и не более) ограничений в виде равенств относительно b_{ij} , которые не следуют из уравнения (2.3), в дальнейшем

без ограничения общности (общий случай сводится к рассматриваемому с помощью тривиальных замен) будем считать, что $X_* = T_* = v_* = 0$ и что коэффициент $\alpha(h)$ системы (1.1) разлагается в точке $h = h_*$ в ряд по степеням $\rho = h - h_*$

$$\alpha(h) = 4 + \alpha_1 \rho + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k \rho^k \quad (2.5)$$

В данной работе рассматривается случай $h_* > 0$ и газ "общего положения", для которого $\alpha_1 + 12/h_* \neq 0$.

Подстановка в (2.3) ряда Тейлора

$$B = \sum_{j,j=0}^{\infty} b_{ij} v^i \rho^j + \dots \quad (2.6)$$

и учет соотношений (2.4), (2.5) дают следующие связи между его коэффициентами:

$$b_{00} = -h_* b_{01}, \quad b_{10} = 0, \quad 4b_{20} = b_{01} + h_* b_{02} \quad (2.7)$$

$$4b_{21} + \alpha_1 b_{20} = 3(b_{02} + h_* b_{03}), \quad 12b_{30} = b_{11} + h_* b_{12}, \dots$$

Обращение же при $v = 0$, $\rho = 0$ якобиана (2.2) в нуль означает, что b_{11} и b_{20} выражаются при этом друг через друга по одной из двух формул

$$4b_{20} = \pm h_*^{1/2} b_{11} \quad (2.8)$$

Из (2.5) – (2.8) следует, что отображение (2.4) разлагается в ряд

$$T = b_{11}(\rho \pm h_*^{1/2} v / 2) + (b_{11} + h_* b_{12}) v^2 / 4 + 2b_{21} v \rho + b_{12} \rho^2 + \dots \quad (2.9)$$

$$X = Tv - b_{11}(h_* v \pm 2h_*^{1/2} \rho) - (b_{21} h_* \pm h_*^{1/2} b_{11} / 4) v^2 - \\ - 2(b_{11} + h_* b_{12}) v \rho - 3(b_{02} + h_* b_{03}) \rho^2 + \dots$$

Для дальнейшего анализа удобно перейти к переменным

$$Y = X - 2h_*^{1/2} T, \quad Z = X + 2h_*^{1/2} T \quad (2.10)$$

и неизвестным

$$R = v + 2h_*^{-1/2} \rho, \quad L = v - 2h_*^{-1/2} \rho \quad (2.11)$$

в главном порядке совпадающим с отклонениями инвариантов Римана ([10, с. 171])

$$r = v + \int_{h_*}^h \left(\frac{\alpha(z)}{z} \right)^{1/2} dz, \quad l = v - \int_{h_*}^h \left(\frac{\alpha(z)}{z} \right)^{1/2} dz, \quad (2.12)$$

от их общего нулевого значения в точке ГК

$$r = R + \frac{1}{128} \left(\alpha_1 - \frac{4}{h_*} \right) h_*^{1/2} (R - L)^2 + O(|R|^3 + |L|^3) \quad (2.13)$$

$$l = L - \frac{1}{128} \left(\alpha_1 - \frac{4}{h_*} \right) h_*^{1/2} (R - L)^2 + O(|R|^3 + |L|^3)$$

(Прямые $Y = 0$ и $Z = 0$ в точке $(T = 0, X = 0)$ касаются характеристики C_+ , вдоль которой постоянен инвариант r , и, соответственно, характеристики C_- , вдоль которой постоянен инвариант l .)

В новых обозначениях соотношения (2.9) выглядят так:

$$Z - Y = h_* b_{11} (R - L \pm (R + L)) + \frac{1}{4} h_*^{1/2} (b_{11} + h_* b_{12}) (R + L)^2 + \\ + \frac{1}{4} h_*^{3/2} b_{12} (R - L)^2 + h_* b_{21} (R^2 - L^2) + \dots \quad (2.14)$$

$$Z + Y = \frac{1}{4} h_*^{-1/2} (Z - Y) (R + L) - h_* b_{11} (R + L \pm (R - L)) - \\ - \frac{1}{2} (h_* b_{21} \pm \frac{1}{4} h_*^{1/2} b_{11}) (R + L)^2 - \frac{1}{2} h_*^{1/2} (b_{11} + h_* b_{12}) (R^2 - L^2) - \\ - \frac{3}{8} h_* (b_{02} + h_* b_{03}) (R - L)^2 + \dots \quad (2.15)$$

Рассмотрим подробно случай знака минус. При таком знаке сложение равенств (2.14) и (2.15) дает уравнение (a_{ij} – постоянные)

$$Z = F(R, L) = -2h_* b_{11} L - \frac{1}{16} h_*^{1/2} b_{11} \left(1 - \frac{1}{4} \alpha_1 h_*\right) R^2 + \\ + \frac{1}{8} h_*^{1/2} b_{11} \left(1 - \frac{1}{4} \alpha_1 h_*\right) RL + a_{02} L^2 + \sum_{i+j=3}^{\infty} a_{ij} R^i L^j$$

в котором в ситуации "общего положения" $b_{11} \neq 0$.

При $b_{11} = 0$ и $\rho = 0$ из (2.7) – (2.9) следовали бы соотношения

$$T = \frac{1}{4} h_* b_{12} \nu^2 (1 + o(1)), \quad X = -h_* b_{21} \nu^2 (1 + o(1))$$

которые из-за отличия от нуля (см. замечание 1) постоянных b_{12} и b_{21} означали бы, что при $\rho = 0$ и достаточно малых X и T функция ν не определена на двух взаимно ортогональных кривых. А последнее в рассматриваемой ситуации невозможно, так как ν и ρ , имея на фронте УВ разрыв первого рода, непрерывны по каждую его сторону ([10, с. 35]).

Так как $F_L(0, 0) = -2h_* b_{11} \neq 0$, то L из уравнения $Z = F(R, L)$ выражается через Z и R в виде ряда

$$L = -\frac{Z}{2h_* b_{11}} + \frac{1}{128} h_*^{1/2} \left(\alpha_1 - \frac{4}{h_*}\right) \left(R^2 + \frac{ZR}{h_* b_{11}}\right) + c_{20} Z^2 + \sum_{i+j=3}^{\infty} c_{ij} Z^i R^j \quad (2.16)$$

где c_{ij} – некоторые постоянные, однозначно определяемые через b_{ij} и h_* .

Подстановка ряда (2.16) в равенство (2.14) дает уравнение относительно R

$$Y = \frac{1}{64} h_*^{1/2} \left(\alpha_1 + \frac{12}{h_*}\right) ZR + g_{20} Z^2 + g_{02} R^2 + \sum_{i+j=3}^{\infty} g_{ij} Z^i R^j \quad (2.17)$$

постоянные g_{ij} из правой части которого также задаются через b_{ij} и h_* . Это уравнение при $T = 0$ кратко записывается в виде соотношения

$$X = g_{02} R^2 (1 + o(1))$$

из которого немедленного следует вывод о том, что $g_{02} = 0$. (Иначе при малых X и $T = 0$ решения (1.1) были бы определены лишь по одну сторону прямой $X = 0$.) При этом, согласно замечанию 1, в ситуации "общего положения" $g_{03} \neq 0$ и, следовательно, преобразование

$$R = C_0(Z)Z + R_0 + \sum_{j=2}^{\infty} C_j(Z)R_0^j \quad (2.18)$$

коэффициенты $C_j(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} C_{ij} Z^i$ которого однозначно определяются ([11, с. 45, 46,

52]), сводит (2.17) к кубическому уравнению

$$\delta(Y, Z) + \sigma(Z)R_0 + kR_0^3 = 0 \quad (2.19)$$

где

$$\delta(Y, Z) = Y + \sum_{i+j=2}^{\infty} \delta_{ij} Y^i Z^j \quad (2.20)$$

$$\sigma(Z) = \frac{1}{64} h_*^{1/2} \left(\alpha_1 + \frac{12}{h_*} \right) Z + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j Z^j$$

а постоянная $k = -g_{03}$ такова, что $(\alpha_1 + 12/h_*)k > 0$. (Последнее неравенство соответствует тому факту, что до момента ГК r – гладкая функция переменных T и X .)

Уравнение (2.19) не имеет однозначно определенных при всех δ и σ корней. Согласно соотношению (2.18), в рассматриваемой ситуации в качестве $R_0(\delta, \sigma)$ следует брать однозначный вне линии разрыва решений системы (1.1) корень уравнения (2.19), терпящий на этой линии разрыв первого рода. Для так определенной функции $R_0(\delta, \sigma)$ точка $(\delta = 0, \sigma = 0)$ является точкой ГК. Поэтому в начале координат ($Y = 0, Z = 0$) ГК будет иметь место и для функций $R(Y, Z)$ и $L(Y, Z)$, асимптотики которых при $Y^2 + Z^2 \rightarrow 0$ задаются формулами (2.18) – (2.20) и соответственно (2.16).

Замечание 2. Из известных свойств УВ и из соотношения (2.18) следует, что в достаточно малой окрестности начала координат других точек ГК функции R, L и R_0 не имеют. Согласно первому из соотношений (2.13), ГК в точке $(Y = 0, Z = 0)$ будет иметь место и для инварианта Римана $r(Y, Z)$. Однако для второго инварианта Римана это уже не так. Действительно, в силу второго из соотношений (2.13) и ограниченности при малых σ и δ дробей $\sigma/(3kR_0^2(\sigma, \delta) + \sigma)$ и $\delta/(3kR_0^2(\sigma, \delta) + \sigma)$ (в их ограниченности при $\sigma \neq 0$ проще всего убедиться путем перехода к автономной переменной $s = \delta |\sigma|^{-3/2}$ и осуществления замены $R_0(\delta, \sigma) = |\sigma|^{1/2} g(s)$) первые производные l являются ограниченными при $\delta^2 + \sigma^2 \rightarrow 0$ величинами.

Совершенно сходным образом исследуется случай выбора в (2.8) знака плюс, которому также соответствует ГК лишь одного из инвариантов Римана – инварианта l . Ввиду того, что анализ этого случая по сравнению с анализом случая ГК инварианта r не содержит никаких принципиально новых моментов, он здесь не проводится. По аналогичной причине случай ГК инварианта l не рассматривается и в следующем разделе.

3. Влияние малой диссипации. Влияние правой части системы (1.2). В этом разделе на примере случая ГК инварианта r исследуется влияние на процессы зарождения УВ правой части системы (1.2), которая при переходе от (1.2) к (1.1) не учитывается.

Для этого с помощью замен (2.11) запишем систему (1.2) в виде уравнений

$$R_T - L_T + \frac{1}{2}(4h_*^{1/2} + R - L)(R_X + L_X) + \frac{1}{2}(R + L)(R_X - L_X) = 0$$

$$R_T + L_T + \frac{1}{2}(R + L)(R_X + L_X) +$$

$$+ \frac{1}{2}h_*^{1/2} \left(4 + \frac{\alpha_1 h_*^{1/2}}{4}(R - L) + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k h_*^{k/2} \left(\frac{R - L}{4} \right)^k \right) (R_X - L_X) =$$

$$= \frac{\varepsilon^4}{h_*} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n h_*^{-n/2} \left(\frac{R - L}{4} \right)^n \right) (R_{XX} + L_{XX})$$

Их сложение и затем вычитание сводят эти уравнения к системе

$$\begin{aligned}
& R_T + 2h_*^{1/2}R_X + \frac{1}{16}(12 + \alpha_1 h_*)R \left(1 + \sum_{i+j=1}^{\infty} p_{ij} R^i L^j \right) R_X + \\
& + \frac{1}{16}(4 - \alpha_1 h_*) \left[L(1 + \sum_{i+j=1}^{\infty} f_{ij} R^i L^j) R_X + \right. \\
& \left. + R \left(1 + \sum_{i+j=1}^{\infty} h_{ij} R^i L^j \right) L_X - L \left(1 + \sum_{i+j=1}^{\infty} \gamma_{ij} R^i L^j \right) L_X \right] = \\
& = \frac{\varepsilon^4}{2h_*} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n h_*^{-n/2} \left(\frac{R-L}{4} \right)^n \right) (R_{XX} + L_{XX})
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
& L_T - 2h_*^{1/2}L_X + \frac{1}{16}(12 + \alpha_1 h_*)L \left(1 + \sum_{i+j=1}^{\infty} q_{ij} R^i L^j \right) L_X + \\
& + \frac{1}{16}(4 - \alpha_1 h_*) \left[R(-1 + \sum_{i+j=1}^{\infty} \delta_{ij} R^i L^j) R_X + \right. \\
& \left. + L \left(1 + \sum_{i+j=1}^{\infty} f_{ij} R^i L^j \right) R_X + R \left(1 + \sum_{i+j=1}^{\infty} h_{ij} R^i L^j \right) L_X \right] = \\
& = \frac{\varepsilon^4}{2h_*} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n h_*^{-n/2} \left(\frac{R-L}{4} \right)^n \right) (R_{XX} + L_{XX})
\end{aligned}$$

в которой $\gamma_{ij}, \delta_{ij}, f_{ij}, h_{ij}, p_{ij}$ и q_{ij} определяются через b_{ij} и h_* .

Из соотношений (2.11), (2.16) и (2.18) – (2.20) следует, что главные члены асимптотик v и $h - h_*$ пропорциональны R . С учетом этого замечания использование стандартных для метода сращиваемых асимптотических разложений [5] рассуждений показывает, что для правильного описания поведения решений системы (3.1) в малой окрестности точки $(T = 0, X = 0)$ нужно осуществить масштабные преобразования

$$Y = \varepsilon^3 \zeta, \quad Z = \varepsilon^2 \theta, \quad R = \varepsilon A, \quad L = \varepsilon^2 C \tag{3.2}$$

Их вид диктуется требованиями сбалансированности всех слагаемых в (2.19) и учета в (3.1) как нелинейности, так и вязкости.

Непосредственная проверка показывает, что переход в (3.1) к переменным (2.10) и последующие растяжения (3.2) в главном по ε порядке дают следующую систему:

$$\begin{aligned}
A_\theta + \frac{1}{64} h_*^{1/2} \left(\alpha_1 + \frac{12}{h_*} \right) A A_\zeta &= \frac{1}{8} h_*^{-3/2} A_{\zeta\zeta} \\
C_\zeta &= \frac{1}{64} h_*^{1/2} \left(\alpha_1 - \frac{4}{h_*} \right) A A_\zeta - \frac{1}{8} h_*^{-3/2} A_{\zeta\zeta}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

которая дополняется условием сращивания с (2.16), (2.18): при $\theta^2 + \zeta^2 \rightarrow \infty$ вне некоторого направленного в сторону положительных T луча (касательного в точке $(T = 0, X = 0)$ к линии разрыва решений (1.1)) решение первого из уравнений (3.3) в качестве главного члена асимптотики $A_0(\theta, \zeta)$ имеет корень кубического уравнения

$$\zeta - h_*^{1/2} (\alpha_1 + 12/h_*) \theta A_0 / 64 + k A_0^3 = 0$$

а главный член асимптотики C выражается через решение этого уравнения формулой

$$C_0(\theta, \zeta) = -\theta / (2h_* b_{11}) + h_*^{1/2} (\alpha_1 - 4 / h_*) A(\theta, \zeta)_0^2 / 128$$

Замены

$$\zeta = d\xi, \quad \theta = 8d^2 h_*^{3/2} \tau, \quad A(\theta, \zeta) = 8[dh_*^2 (\alpha_1 + 12 / h_*)]^{-1} \Gamma(\tau, \xi)$$

где $d = (2^9 h_*^{-6} (\alpha_1 + 12 / h_*)^{-3} k)^{1/4}$, сводят $A(\theta, \zeta)$ к функции (1.4), (1.5) – $\Gamma(\tau, \xi)$ удовлетворяет как уравнению Бюргерса (1.3), в которое данные замены переводят первое из уравнений системы (3.3), так и условию, в которое при этом переходит выписанное выше условие на главный член асимптотики $A(\theta, \zeta)$: главным членом асимптотики функции (1.4), (1.5) при $\xi^2 + \tau^2 \rightarrow \infty$ всюду вне луча ($\xi = 0, \tau > 0$) является однозначно определенное решение кубического уравнения (1.6) [5].

Универсальность специального решения А.М. Ильина. Применимость специального решения А.М. Ильина при описании процессов зарождения УВ не ограничивается обобщенным уравнением Бюргерса и системой уравнений движения одномерного изоэнтропического газа. Это решение представляет собой специальную функцию, которая подобно функции Пирси в линейных задачах с малой дисперсией [12] должна, как полагают авторы, описывать окрестность точки зарождения УВ для широкого круга нелинейных задач с малой диссипацией.

В качестве одного из подтверждающих это высказывание примеров укажем на систему уравнений ([3, с. 248])

$$u_T - v_X = 0, \quad v_T - uu_X + \varepsilon^4 u_{XX} = 0$$

которая эквивалентна одному из пространственно-одномерных случаев уравнения Хохлова – Заболоцкой – Кузнецова [13]. Рассуждения, показывающие справедливость того, что и в этом случае процессы зарождения УВ в главном порядке описываются функцией (1.4), (1.5), по сути ничем не отличаются от приведенных выше.

Эта же функция в главном по ε порядке описывает возникновение УВ "общего положения" и в одномерной модели Фойхта [2], соответствующей уравнению

$$u_{TT} - \varphi(u_X)_X + \varepsilon^4 \psi(u_X)_{XT} = 0,$$

в котором $\varphi'(u_X) > 0, \psi'(u_X) > 0$. (Это уравнение, описывающее движение нелинейного вязкоупругого тела, возникает также при рассмотрении предельного перехода в кристаллической решетке, когда сила взаимодействия между соседними частицами зависит не только от расстояния между ними, но и от скорости его изменения ([2, с. 7]). Система (1.2) после перехода к лагранжевой, а затем к массовой координатам сводится к частному случаю этого уравнения ([2, с. 5]).)

Волновые катастрофы и симметрии интегрируемых уравнений. Функция (1.4), (1.5) является представителем целого класса функций [9, 14–21], которые, будучи специальными решениями интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных (УЧП), имеют в нелинейных задачах значение, подобное значению специальных функций волновых катастроф (СФВК) ([22, с. 535], [23]) для линейных задач. Эти нелинейные аналоги СФВК возникают в широком классе сингулярно-возмущенных задач при изучении влияния первоначально отбрасываемых членов на волновые катастрофы, происходящие в приближениях, возникающих в результате игнорирования этих членов. (Им соответствуют типичные особенности гладких отображений, описываемых теорией катастроф [7, 11].)

Относительно таких нелинейных аналогов СФВК была сформулирована [16, 17] общая гипотеза, которая в настоящий момент находит все новые подтверждения. Одно из ее следствий есть положение о том, что в случае интегрируемости УЧП, которым после их вывода (подобного выводу уравнения (1.3) из системы (1.2)) удовлетворяют нелинейные аналоги СФВК, они одновременно должны быть решениями

однозначно выписываемых обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), независимыми переменными которых являются независимые переменные этих УЧП.

Более того, из полученных ранее результатов [16, 18] напрашивается вывод о том, что в этом случае нелинейные аналоги СФВК, вероятно, будут и решениями ОДУ, независимыми переменными которых служат остальные управляющие параметры [11] соответствующей волновой катастрофы.

В частности, и используемый в разд. 4 факт удовлетворения решением А.М. Ильина ОДУ

$$\xi - \tau\Gamma + 4\Gamma_{\xi\xi} - 6\Gamma\Gamma_{\xi} + \Gamma^3 = 0 \quad (3.4)$$

в справедливости которого можно убедиться непосредственно из соотношений (1.3) – (1.5), мог бы быть выведен как следствие из этого общего положения, справедливого и для не имеющих явных представлений аналогов СФВК, которые удовлетворяют интегрируемым УЧП, не допускающим линеаризации. (Таким, например, как уравнение Кортевега – де Вриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Кадомцева – Петвиашвили. Специальные решения этих уравнений, являющиеся нелинейными аналогами СФВК, рассматривались ранее [9, 14–21].)

Было установлено [17], что соответствующие ОДУ являются стационарными частями симметрий интегрируемых УЧП ([24, с. 368]) (были сформулированы правила [17], позволяющие выводить эти ОДУ из вида известных симметрий интегрируемых УЧП и из соответствующей особенности списка теории катастроф). При этом, за исключением случая простейшей катастрофы складки, нелинейные аналоги СФВК не являются автомодельными решениями возникающих УЧП, так как ОДУ, которым они одновременно удовлетворяют, не будут стационарными частями симметрий классического типа – соответствующие симметрии являются высшими (или, как иногда говорят, обобщенными) ([24, с. 368]).

Отметим, что по крайней мере, для случая катастрофы сборки упомянутая выше универсальность нелинейных аналогов СФВК имеет место для решений интегрируемых уравнений (Наряду со специальным решением А.М. Ильина уравнения Бюргерса универсальность имеет место, например, для его "дисперсионного" аналога – известного специального решения Гуревича – Питаевского уравнения Кортевега – де Вриза [19]. Еще два примера дают [9, 15] специальные решения нелинейного уравнения Шредингера, также являющиеся аналогами интеграла Пирси.)

Универсальность этих нелинейных специальных функций раскрывает важность относительно малоизвестной роли интегрируемых УЧП, которую они играют в задачах математической физики, описываемых при помощи неинтегрируемых уравнений с малыми параметрами при старших производных. Замечательным образом при этом проявляются высшие симметрии, характерные лишь для интегрируемых уравнений ([24, с. 368]).

Вариант правил выбора симметрий. Уравнение (3.4) впервые в явном виде было выписано [20] в качестве иллюстрации предлагавшегося варианта (альтернативного к сформулированному ранее [17]) правил выбора симметрий интегрируемых уравнений, точными решениями стационарных частей которых являются соответствующие аналоги СФВК. Эти правила таковы:

1) в стационарной части выбираемой симметрии, а также в самом УЧП нужно (иногда, как например в [9], после предварительных преобразований) перейти к "бездиссипативному" ("бездисперсионному") пределу, отбросив старшие производные;

2) получившимся уравнениям должен удовлетворять главный член асимптотики исследуемой нелинейной специальной функции.

Например, из вида известных симметрий уравнения (1.3) ([24, с. 380]) и требования, чтобы корень уравнения сборки (1.6) $f(\tau, \xi)$ являлся точным решением "бездиссипативного" предела стационарной части симметрии уравнения (1.3), следует, что эта стационарная часть необходимо является суммой стационарной части классической сим-

метрии Галилея

$$1 - \tau \Gamma_{\xi} = 0$$

и не зависящей от ξ и τ стационарной части симметрии третьего порядка

$$4\Gamma_{\xi\xi\xi} - 6\Gamma\Gamma_{\xi\xi} - 6\Gamma_{\xi}\Gamma_{\xi} + 3\Gamma^2\Gamma_{\xi} = 0$$

Получающееся в результате ОДУ и является продифференцированным по ξ уравнением (3.4).

Сравнение изложенного здесь и исходного [17] вариантов правил выбора симметрий показывает, что оба они имеют свои достоинства и недостатки. Целесообразность применения того или иного из них зависит от специфики возникающих задач.

4. Численное моделирование поведения специального решения А.М. Ильина. ОДУ (3.4) и систему ОДУ по переменной τ

$$4\Gamma_{\tau} = 2\Gamma\Gamma_{\xi} - \xi + \tau\Gamma - \Gamma^3 \quad (4.1)$$

$$\Gamma_{\xi\tau} = 2\Gamma_{\xi}^2 - 1 + \tau\Gamma_{\xi} - \frac{1}{2}(\xi\Gamma - \tau\Gamma^2 + \Gamma^4) \quad \cdot$$

на Γ и Γ_{ξ} , которая есть следствие одновременной справедливости уравнений (1.3) и (3.4), оказалось удобно использовать для численного моделирования поведения специального решения А.М. Ильина (РИ).

К системе (3.4), (4.1) была применена обычная схема Рунге – Кутта (РК). При этом, правда, пришлось учитывать нюансы, связанные с устойчивостью задачи восстановления решений по их степенной асимптотике на одной из бесконечностей. Скажем, применение метода РК с начальными данными, определяемыми из асимптотики Γ вне прямой $\xi = 0$, приводит к тому, что не выполняется условие $\Gamma(0, \tau) = 0$.

Именно поэтому сначала численное моделирование Γ было проведено на страте Максвелла $M = (\tau \in (-\infty, \infty), \xi = 0)$. В силу нечетности Γ по ξ система (4.1) на M существенно упрощается и сводится к ОДУ первого порядка

$$4\Gamma_{1\tau} = 2\Gamma_1^2 - 1 + \tau\Gamma_1 \quad (\Gamma_1(\tau) = \Gamma_{\xi}(\tau, 0)) \quad (4.2)$$

Начальное условие при численном решении уравнения (4.2) методом РК определялось при этом из справедливости для функции Γ_1 следующей асимптотики при $\tau \rightarrow -\infty$:

$$\Gamma_1 \approx \tau^{-1} - 6\tau^{-3} + 96\tau^{-5} + \dots \quad (4.3)$$

(Вид главного члена и степенной характер ряда из правой части (4.3) следует из формулы (VI.4.24) книги [5], а конкретные значения постоянных при разных степенях τ проще всего вычисляются непосредственной подстановкой этого ряда в уравнение (4.2).)

И уже после численного решения задачи (4.2), (4.3) методом РК решалась задача Коши, определяемая ОДУ (3.5) и граничными условиями

$$\Gamma|_{\xi=0} = 0, \quad \Gamma_{\xi}|_{\xi=0} = \Gamma_1(\tau)$$

При численном счете, результаты которого частично представлены на фигуре в виде зависимости Γ от ξ в разные моменты времени τ (поскольку $\Gamma(\tau, \xi) = -\Gamma(\tau, -\xi)$, показана только область $\xi > 0$), асимптотика (4.3) заменялась на начальные данные

$$\Gamma_1|_{\tau=\tau_*} = \tau_*^{-1} - 6\tau_*^{-3} + 96\tau_*^{-5}$$

При $\tau_* \leq -15$ результаты счета не зависят от выбора конкретных значений τ_* и дают одну и ту же картину. Счет устойчив также по отношению к числу учитываемых членов асимптотики (4.3) и по отношению к длине шага сетки. Отметим, что наблюдаемая на фигуре монотонность убывания РИ по ξ соответствует монотонности поведения уже сформировавшихся УВ ([2, с. 204–207]).

Замечание 3. Принципиальная необходимость для аппроксимации поведения производной РИ при $\xi = 0$ использования счета "снизу вверх" (соответствующего возрастанию τ от $-\infty$ до ∞), а не наоборот, связана с неустойчивостью задачи восстановления решения уравнения (4.2) по степенной асимптотике при $\tau \rightarrow \infty$

$$\Gamma_1 \approx -\tau/2 + \dots, \quad (4.4)$$

справедливость которой для функций (1.4), (1.5) следует из формулы (VI.6.5) книги [5]. В самом деле, наряду с производной РИ $\Gamma_\xi(\tau, \xi = 0)$ уравнение (4.2) обладает и решением в виде ряда теорий возмущений по степеням малого параметра μ

$$\Gamma_\xi(\tau, \xi = 0) + \mu R_1(\tau) + \mu^2 R_2(\tau) + \dots$$

все члены которого находятся из решений рекуррентной последовательности ОДУ первого порядка. Согласно же соотношениям (4.3), (4.4), все нетривиальные решения первого уравнения из этой последовательности

$$4R_{1\tau} = (4\Gamma_\xi(\tau, \xi = 0) - \tau)R_1$$

экспоненциально убывают при $\tau \rightarrow \infty$ и экспоненциально растут при $\tau \rightarrow -\infty$. А это означает, что при счете "сверху вниз", при котором по схеме РК аппроксимируются решения уравнения (4.2) с начальными данными, определяемыми из асимптотики (4.4), вместо поведения производной РИ фактически моделируется поведение решений уравнения (4.2), сильно от этого решения отличающихся. Счет "снизу вверх" лишен этого недостатка.

Замечание 4. Упрощение на страте Максвелла описания специальной функции катастрофы сборки возможно не только в случае РИ. Например, комментарий ([12, с. 176]) о том, что функция Пирси

$$\int_R \exp(-2i(\xi p + 2\tau p^2 + \beta p^4)) dp$$

не выражается через известные классические специальные функции, следует уточнить: на страте Максвелла $\xi = 0$ эта СФВК очевидным образом выражается через функции Вебера – Эрмита. Это свойство функции Пирси "наследуется" ее обобщением [15] – было замечено [21], что ОДУ четвертого порядка относительно τ , которому наряду с нелинейным уравнением Шредингера

$$-iq_\tau = q_{\xi\xi} + 2\delta|q|^2 q$$

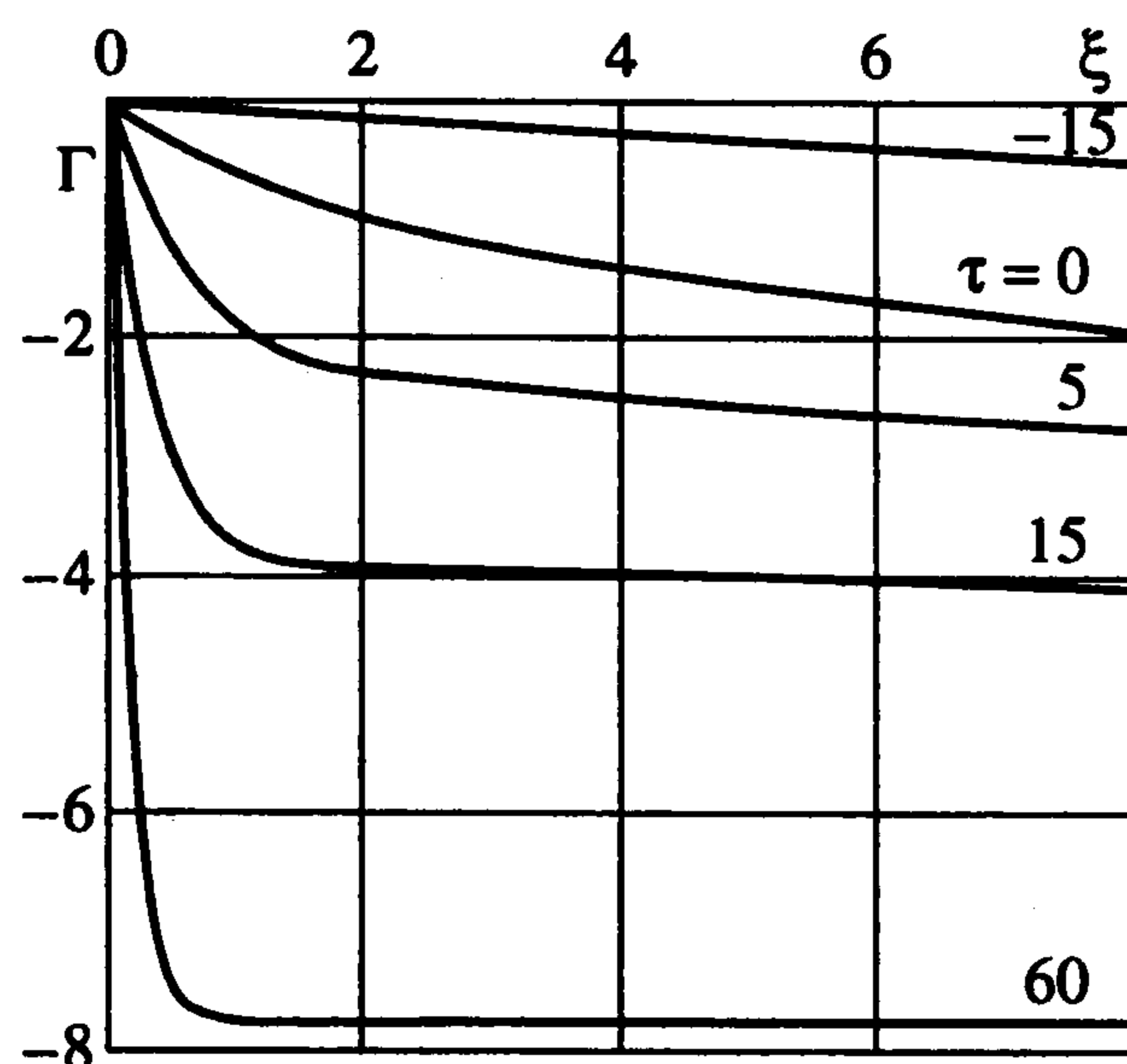
удовлетворяет это обобщение функции Пирси, на страте Максвелла $\xi = 0$ сводится к ОДУ Пенлеве IV, являющегося нелинейным аналогом уравнения Вебера – Эрмита. Возможность упрощенного описания на стратах Максвелла ряда СФВК и их аналогов – дополнительное проявление выделенности точек этих стратов, наблюдаемой [7, 11] при исследовании различных волновых катастроф. Она может оказаться полезной при исследовании асимптотик нелинейных аналогов СФВК и (как в данной статье) при численном моделировании их поведения.

Авторы благодарят В.Э. Адлера, О.М. Киселева и С.Л. Шитлина за помощь в проведении численного счета.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00663) и Фонда ведущих научных школ (00-1596038).

ЛИТЕРАТУРА

1. Маслов В.П., Цупин В. Распространение ударной волны в изэнтропическом газе с малой вязкостью // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 8. М.: ВИНТИ, 1977. С. 273–308.



2. Маслов В.П., Мосолов П.П. Уравнения одномерного баротропного газа. М.: Наука, 1990. 216 с.
3. Богаевский В.Н., Повзнер А.Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М.: Наука, 1987. 255 с.
4. Mises R. Mathematical Theory of Compressible Flow. N.Y.: Acad. press, 1958. = Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во Иностран. лит., 1961. 588 с.
5. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
6. Kudashev V., Suleimanov B. A soft mechanism for generation the dissipationless shock waves // Phys. Letters. Ser. A. 1996. V. 221. № 3, 4. P. 204–208.
7. Poston T., Stewart I. Catastrophe Theory and its Applications. L., etc.: Pitman, 1978. = Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.
8. Сидоров А.Ф., Шанеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.
9. Кудашев В.Р., Сулейманов Б.И. Особенности некоторых типичных процессов самопроизвольного падения интенсивности в неустойчивых средах // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 62. Вып. 4. С. 358–363.
10. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
11. Gilmore R. Catastrophe Theory for Scientists and Engineers. N.Y., etc.: John Wiley & Sons, 1981. = Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Ч. 1. М.: Мир, 1984. 352 с.
12. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976. 296 с.
13. Кузнецов В.П. Уравнения нелинейной акустики // Акуст. журн. 1970. Т. 16. Вып. 4. С. 548–553.
14. Китаев А.В. Точки поворота линейных систем и двойные асимптотики трансцендентов Пенлеве // Зап. ЛОМИ. 1991. Т. 187. С. 53–74.
15. Сулейманов Б.И. Второе уравнение Пенлеве в одной задаче о нелинейных эффектах вблизи каустики // Зап. ЛОМИ. 1991. Т. 187. С. 110–128.
16. Сулейманов Б.И. О "нелинейном" обобщении специальных функций волновых катастроф, описываемых двукратными интегралами // Мат. заметки. 1992. Т. 52. Вып. 5. С. 102–106.
17. Сулейманов Б.И., Хабибуллин И.Т. Симметрии уравнения Кадомцева – Петвиашвили, изомонодромные деформации и "нелинейные" обобщения специальных функций волновых катастроф // Теорет. и мат. физика. 1993. Т. 97. № 2. С. 213–226.
18. Сулейманов Б.И. О влиянии малой нелинейности на высокочастотные асимптотики при перестройках каустик // Теорет. и мат. физика. 1994. Т. 98. № 2. С. 197–206.
19. Сулейманов Б.И. Возникновение бездиссипативных ударных волн и "непертурбативная" квантовая теория гравитации // ЖЭТФ. 1994. Т. 105. Вып. 5. С. 1089–1097.
20. Kudashev V.R. KdV shock-like waves as invariant solutions of KdV equation symmetries // Интегрируемость в динамических системах. Уфа: Ин-т математики с ВЦ, 1994. С. 70–79.
21. Kitaev A.V. Caustics in 1 + 1 integrable systems // J. Math. Phys. 1994. V. 35. № 6. P. 2934–2954.
22. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
23. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: Изд-во МФТИ, 1982. 159 с.
24. Olver P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. N.Y., etc.: Springer, 1986. = Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 637 с.