

УДК 533.6

© 2001 г. А.Н. Кусюмов

**О ГОЛОНОМНЫХ СВЯЗЯХ
И НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ
УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО
ТЕЧЕНИЯ ГАЗА**

Рассматривается квазилинейная однородная система уравнений первого порядка с двумя зависимыми и двумя независимыми переменными. Системами данного класса моделируются различные одномерные нестационарные течения газа. Симметрии рассматриваемой системы используются для построения голономных связей между зависимыми (и независимыми) переменными. Голономные связи между переменными используются для понижения размерности системы и построения ее точных решений.

Известно, что знание симметрий (групп непрерывных преобразований) систем уравнений в частных производных (УЧП) позволяет упростить задачу их интегрирования. Различные возможности применения симметрий для интегрирования систем УЧП рассмотрены, например, в работах Л.В. Овсянникова [1] и Олвера [2].

Известно также, что знание симметрий системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) позволяет находить ее первые интегралы. Первый интеграл можно рассматривать как некоторое голономное уравнение связи между зависимыми переменными системы. Знание такой связи для системы уравнений позволяет понизить ее размерность на единицу. Возможности подобного подхода к использованию симметрий рассматривались ранее (см., например, работу [3]).

Понятие первого интеграла применялось в различных целях и для систем УЧП. В частности, уравнение Бернулли установившегося движения идеального газа получается как первый интеграл (вдоль линий тока) уравнений движения газа [4]. Понятие первого интеграла для систем УЧП применялось при решении некоторых вариационных задач [5].

Вместо понятия "первый интеграл" будем использовать термин "голономная связь" (ГС) между переменными системы. В эту связь в общем случае входят кроме зависимых также и независимые переменные системы. Использование такой связи для систем УЧП в отличие от систем ОДУ приводит к ограничениям в постановке граничных условий для системы. Отсюда вытекают ограничения на вид решений (интегральных многообразий системы).

В настоящей работе понятие ГС используется для понижения размерности и построения точных решений квазилинейной однородной системы УЧП первого порядка с двумя независимыми и двумя зависимыми переменными. Системами такого вида описываются некоторые процессы течения газа и жидкости, например одномерное нестационарное изэнтропическое течение газа и течение жидкости в трубопроводе с упругими стенками.

Отметим также, что ГС можно рассматривать как частный вид связей более общего вида, в которые включаются и производные зависимых переменных. Такие связи строятся с помощью метода дифференциальных связей, изложение которого можно найти в [6]. Присоединение дифференциальной связи или ГС между зависимыми переменными делает исходную систему переопределенной. Поэтому основой "технологии" метода дифференциальных связей является исследование переопределенной системы на совместность с помощью метода внешних форм Картана или метода Жана – Спенсера – Кураниши.

В настоящей работе для построения ГС используются некоторые "априорные сведения", исходя из предварительного анализа свойств исходной системы. А именно, для построения ГС рассматриваемой системы уравнений будем использовать симметрии системы.

1. Исходная система уравнений и определение голономной связи. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \alpha_{11}u^1 \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \alpha_{12}u^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \alpha_{21}u^2 \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \alpha_{22}u^1 \frac{\partial u^2}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь x^1, x^2 – независимые переменные, u^1, u^2 – зависимые переменные, коэффициенты $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ являются константами.

Отметим, что для систем уравнений, описывающих процессы одномерного нестационарного течения жидкости, x^1 определяет время, а x^2 – пространственную координату. Переменная u^1 обычно определяет продольную скорость течения, а физический смысл переменной u^2 зависит от рассматриваемой задачи. Для одномерного нестационарного изоэнтропического течения газа u^2 определяет скорость звука течения [7]. Для течения жидкости в упругом трубопроводе u^2 определяет площадь поперечного сечения трубопровода [8]. Матрица коэффициентов системы также определяется конкретным видом задачи.

Обозначим через $E \subset R^4$ подпространство, образованное зависимыми и независимыми переменными системы. При геометрическом подходе систему (1.1) можно рассматривать как некоторую поверхность Σ в пространстве J^1 , состоящем из переменных системы и производных зависимых переменных (пространство 1-струй) [9]. Пространство интегральных многообразий системы Σ будем обозначать U_Σ .

Рассмотрим некоторую функцию $\phi(u, x)$ и некоторое подпространство $U_s \subset U_\Sigma$.

Определение 1. Будем называть выражение

$$\phi(u, x)|_{U_s} = c \quad (c = \text{const}) \quad (1.2)$$

голономной связью (ГС) между зависимыми (а в общем случае и независимыми) переменными системы уравнений (1.1) на подпространстве интегральных многообразий U_s . (Для простоты будем также использовать сокращенное название ГС.)

Согласно данному определению, не требуется, чтобы функция $\phi(u, x)$ определяла ГС (1.2) на всем пространстве U_Σ (как это имело место для систем ОДУ). Это означает, что при отыскании ГС необходимо определить кроме самой функции $\phi(u, x)$ еще и подпространство U_s , для которого выполняется соотношение (1.2).

Использование ГС позволяет уменьшить размерность системы, но налагает ограничения на пространство интегральных многообразий системы (1.1). Поэтому ниже дадим определение двух "разновидностей" ГС.

Определение 2. Будем называть соотношение (1.2) полной ГС системы (1.1), если подпространство U_s определяется решениями некоторого УЧП с двумя независимыми переменными.

Определение 3. Будем называть соотношение (1.2) частной ГС системы (1.1), если подпространство U_s определяется решениями ОДУ (или системы ОДУ) и определено с точностью до некоторого набора постоянных.

ГС данного типа названы частными, поскольку они могут быть определены сразу, если известно какое-нибудь аналитическое решение системы (1.1). Такие ГС не будут представлять здесь интереса. Однако ГС данного типа будут рассматриваться, если они будут появляться при решении задачи об отыскании функции $\phi(u, x)$ вследствие ограничений на пространство U_Σ , при которых данная конкретная функция $\phi(u, x)$ существует.

2. Условия существования голономной связи. Как отмечалось выше, при решении задачи о нахождении первого интеграла для системы ОДУ в некоторых работах используется теоретико-групповой подход.

Будем использовать ниже терминологию работы [9]: векторное поле Ли $\bar{X}$ называется инфинитезимальной симметрией системы (1.1), если оно касается поверхности Σ .

Отметим, что это условие эквивалентно [1] условию инвариантности системы (1.1) относительно действия продолженного оператора $\bar{X}$ непрерывной группы преобразований.

По терминологии работы [9], при отыскании первого интеграла в [3] используется функция, которая получается из условия касания векторным полем $\bar{X}$ некоторой поверхности. В данной работе также будем определять ГС для системы УЧП, используя теоретико-групповой подход.

Пусть векторное поле $\bar{X}$ является инфинитезимальной симметрией системы (1.1). Обозначим через X проекцию векторного поля $\bar{X}$ на пространство E . Определим функцию $\phi(u, x)$ (или семейство функций) из условия

$$\bar{X}(\phi(u, x)) = X(\phi(u, x)) = 0 \quad (2.1)$$

Используем далее функцию $\phi(u, x)$, удовлетворяющую условию (2.1), для нахождения ГС. Для этого определим семейство "инвариантных" поверхностей S_c в пространстве E из условия касания этих поверхностей векторным полем X . Это семейство поверхностей можно определить выражением

$$\phi(u, x) = c \quad (c = \text{const}) \quad (2.2)$$

Если соотношение (2.2) будет иметь место для некоторой функции, удовлетворяющей условию (2.1), и некоторого подпространства U , интегральных многообразий системы (1.1), то, согласно определениям 1–3, функция $\phi(u, x)$ определяет ГС.

Можно дать также следующую интерпретацию использования векторного поля $\bar{X}$. Из сказанного выше следует, что векторное поле $\bar{X}$ касается поверхностей S_c и Σ . Дифференцируя выражение (2.2) по независимым переменным, получим в J^1 некоторую поверхность S_c^1 , которая является "образом" поверхности S_c . Для существования ГС (той или иной "степени полноты") необходимо, чтобы поверхности S_c^1 и Σ пересекались.

Таким образом, необходимо определить конкретный вид функции $\phi(u, x)$ и подпространство U , для этой функции.

Пусть выражение (2.2) разрешимо относительно одной из переменных u^l , т.е. можно записать

$$u^l = \phi_l^{-1}(u^{\bar{l}}, x^1, x^2) \quad (2.3)$$

где $\phi_l^{-1}(u^{\bar{l}}, x^1, x^2)$ – "обратная" функция, получающаяся при разрешении (2.2) относительно u^l . Здесь $\bar{l} = 1$, если $l = 2$, и $\bar{l} = 2$, если $l = 1$.

Подставим выражение для переменной u^l из (2.3) в систему (1.1). В общем случае получим переопределенную систему УЧП Σ_ϕ , содержащую два уравнения относительно переменной $u^{\bar{l}}$. Будем считать систему Σ_ϕ совместной, если существует хотя бы одна (не тождественно постоянная) функция $u^{\bar{l}}(x^1, x^2)$, которая является решением системы Σ_ϕ .

Для системы уравнений рассматриваемого вида возможны два случая. Пусть одно из уравнений системы Σ_ϕ линейно зависит от другого уравнения. Тогда из сопоставления этих уравнений не следует никаких ограничений (связей) для переменной, входящей в $\phi_l^{-1}(u, x)$, и можно рассматривать Σ_ϕ как уравнение с одной зависимой переменной $u^{\bar{l}}$. Краевые условия для этого УЧП можно задать с "функциональным" произволом, и, следовательно, функция $\phi(u, x)$ определяет полную ГС.

Если же при подстановке $\phi_l^{-1}(u, x)$ в (1.1) уравнения системы Σ_ϕ являются линейно независимыми, то система Σ_ϕ переопределена и при ее совместности получим частную ГС.

В соответствии со сказанным выше сформулируем утверждение.

Утверждение. Если при подстановке $\phi_l^{-1}(u, x)$ в (1.1) уравнения системы Σ_ϕ линейно зависимы, то ГС (2.2) существует и является полной. Если же уравнения системы Σ_ϕ не являются линейно зависимыми, то при совместности Σ_ϕ имеем частную ГС.

Отметим, что для рассматриваемой системы, имеющей только две независимые переменные, можем иметь ГС, соответствующие только двум "крайним" случаям (т.е. определению 2 или определению 3). Для систем уравнений иного класса возможны и другие ГС ("промежуточного" типа).

Построим теперь ГС системы (1.1), используя данные выше определения и методику.

3. Голономные связи и решения системы. Определяющие уравнения для инфинитезимальных симметрий системы (1.1) были получены ранее [10]. Из решения этих уравнений следует, что инфинитезимальные симметрии системы (1.1) определяются векторными полями X вида

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad X_3 = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$$

$$X_4 = u^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + u^2 \frac{\partial}{\partial u^2} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad X_5 = \frac{\partial}{\partial u^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}$$

Построим ГС для некоторых векторных полей.

Векторное поле X_1 . Векторное поле X_1 касается семейства поверхностей

$$\phi(u^1, u^2, x^2) = \text{const}$$

где ϕ – произвольная гладкая функция. Так как функция ϕ произвольна, будем искать ГС вида

$$u^2 = \psi(x^2, u^1) \quad (3.1)$$

где $\psi(x^2, u^1)$ – произвольная функция ($\psi(x^2, u^1) = \phi_2^{-1}(u^1, u^2, x^2)$).

Подстановка выражения (3.1) в систему (1.1) дает систему Σ_2

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \alpha_{11} u^1 \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \alpha_{12} \psi \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \alpha_{12} \psi \frac{\partial \psi}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \alpha_{22} u^1 \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \alpha_{22} u^1 \frac{\partial \psi}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \alpha_{21} \psi \frac{\partial u^1}{\partial x^2} = 0$$

Будем искать функцию $\psi(x^2, u^1)$ таким образом, чтобы ГС была полной (по определению 2). Для этого считаем, что функция ψ зависит только от u^1 . После подстановки можем заключить, что система Σ_2 состоит из линейно зависимых уравнений при $\psi = k_1 u^1 + k_2$, где

$$k_1 = [(\alpha_{22} + \alpha_{21} - \alpha_{11}) / \alpha_{12}]^{1/2}$$

Постоянная $k_2 = 0$ при $\alpha_{11} \neq \alpha_{22}$, k_2 – произвольная постоянная при $\alpha_{11} = \alpha_{22}$. Для $\psi = k_1 u^1 + k_2$ из системы Σ_2 получается система Σ_ψ , которая в данном случае состоит из одного уравнения

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \left(\alpha_{22} u^1 + \alpha_{21} u^1 + \alpha_{21} \frac{k_2}{k_1} \right) \frac{\partial u^1}{\partial x^2} = 0 \quad (3.2)$$

Таким образом, полная ГС для системы (1.1), построенная с помощью векторного поля X_1 , имеет вид поверхности

$$u^2 - k_1 u^1 = k_2 \quad (3.3)$$

При этом подпространство U , интегральных многообразий системы (1.1) определяется решениями уравнения (3.2) и формулой (3.3).

Отметим, что ГС вида $u^2 = \psi(u^1)$ определяет бегущую волну первого рода (простую волну). Простые волны для одномерных уравнений газовой динамики были открыты Риманом, а для систем многомерных квазилинейных УЧП – Н.Н. Яненко [11].

Частные решения уравнения (3.2) можно получить, используя выражение

$$x^2 = (\alpha_{22} u^1 + \alpha_{21} u^1 + \alpha_{21} k_2 / k_1) x^1 + f(u^1)$$

где $f(u^1)$ – произвольная гладкая функция. Задавая вид этой функции, получим различные решения исходной системы.

Аналогичную ГС можно получить, используя векторное поле X_3 .

Векторное поле X_2 . Векторное поле X_2 , как и X_1 , позволяет получить ГС (3.3). Построим, однако, с помощью данного векторного поля частную ГС для случая, когда $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1$. Отметим, что системой такого вида можно описать одномерное нестационарное изоэнтропическое течение газа [7].

Векторное поле X_2 касается семейства поверхностей

$$\phi(u^1, u^2, x^1) = \text{const}$$

где ϕ – произвольная гладкая функция. Поскольку функция ϕ произвольна, положим

$$u^2 = \psi(x^1, u^1) \quad (3.4)$$

где $\psi(x^1, u^1)$ – произвольная функция ($\psi(x^1, u^1) = \phi_2^{-1}(u^1, u^2, x^1)$).

Подстановка выражения (3.4) в (1.1) дает систему Σ_2

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \left(u^1 + \alpha_{12} \psi \frac{\partial \psi}{\partial u^1} \right) \frac{\partial u^1}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \frac{\partial \psi}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \left(u^1 \frac{\partial \psi}{\partial u^1} + \alpha_{21} \psi \right) \frac{\partial u^1}{\partial x^2} = 0$$

Из условия совместности этой системы следует выражение

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^1} = \psi \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \left(\alpha_{12} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u^1} \right)^2 - \alpha_{21} \right) \quad (3.5)$$

Будем искать функцию $\psi(x^1, u^1)$ таким образом, чтобы ГС соответствовала определению 3. Для этого можно положить

$$\psi = (u^1 + \gamma)^n f(x^1) \quad (\gamma = \text{const}, n = \text{const}) \quad (3.6)$$

где $f(x^1)$ – произвольная функция. Наиболее просто ГС находится при $n = 1$. В этом случае из (3.5) при учете равенства (3.6) получим выражение

$$u^1 = \frac{x^2}{\alpha_{12} f^3 - \alpha_{21} f} \frac{df}{dx^1} + S \quad (3.7)$$

где $S(x^1)$ – произвольная гладкая функция. Подстановка выражений (3.6) и (3.7) в систему Σ_2 дает систему ОДУ Σ_ϕ для функций $f(x^1)$ и $S(x^1)$

$$\frac{d^2 f}{(dx^1)^2} (\alpha_{12} f^3 - \alpha_{21} f) + \left(\frac{df}{dx^1} \right)^2 (1 + \alpha_{21} - 2\alpha_{12} f^2) = 0$$

$$\frac{dS}{dx^1} (\alpha_{12} f^3 - \alpha_{21} f) + \frac{df}{dx^1} (S + \alpha_{12} S f^2 + \alpha_{12} \gamma f^2) = 0$$

(символьные вычисления производились на ЭВМ с помощью программы MAPLE V). Решение этой системы (вместе с (3.4), (3.6)–(3.7)) определяет U_s .

Таким образом, ГС для системы (1.1), построенная при помощи векторного поля X_2 , имеет вид поверхности

$$u^2 - (u^1 + \gamma)f = 0 \quad (3.8)$$

При этом подпространство U_s интегральных многообразий системы (1.1), для которого данная ГС существует, определяется решениями системы Σ_ϕ и формулой (3.7).

Отметим, что векторное поле X_4 также позволяет определить ГС вида (3.8) при $\gamma = 0$, поскольку

$$X_4(u^2 - u^1 f) \Big|_{u^2 = u^1 f} = 0$$

Векторное поле X_5 . Векторное поле X_5 касается семейства поверхностей

$$\phi(u^1 - x^2/x^1, u^2, x^1) = \text{const}$$

где ϕ – произвольная гладкая функция. Поскольку функция ϕ произвольна, положим

$$u^1 = x^2/x^1 + \psi(x^1, u^2) \quad (3.9)$$

где $\psi(x^1, u^2)$ – произвольная функция.

Условие совместности системы Σ_1 (при $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1$) имеет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \frac{\psi}{x^1} + \alpha_{12} u^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2} = \alpha_{21} \frac{u^2}{x^1} \frac{\partial \psi}{\partial u^2} + \alpha_{21} u^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial u^2} \right)^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \quad (3.10)$$

Этому условию можно удовлетворить, полагая

$$\psi = (u^2)^n f(x^1) \quad (n = \text{const}) \quad (3.11)$$

где $f(x^1)$ – произвольная функция. Наиболее просто ГС находится при $n = 1$. В этом случае из условия (3.10) при учете выражения (3.11) имеем

$$u^2 = \frac{(\alpha_{21} - 1)fx^2}{x^1(\alpha_{12} - \alpha_{21}f^2)} - \frac{df}{dx^1} \frac{x^2}{(\alpha_{12} - \alpha_{21}f^2)} + S \quad (3.12)$$

где $S(x^1)$ – произвольная гладкая функция. Для функций $f(x^1)$ и $S(x^1)$ имеем систему ОДУ Σ_ϕ

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 f}{(dx^1)^2} (\alpha_{21} f^2 - \alpha_{12}) x^1 + \frac{df}{dx^1} \left(x^1 f \frac{df}{dx^1} + 2f^2 - \alpha_{21} x^1 f \frac{df}{dx^1} - 2\alpha_{12} \right) + \\ & + f(1 - \alpha_{21})(f^2 - \alpha_{21}\alpha_{12}) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{dS}{dx^1} (\alpha_{21} f^2 - \alpha_{12}) x^1 + S \left(\alpha_{21} f x^1 \frac{df}{dx^1} + f x^1 \frac{df}{dx^1} + f^2 - \alpha_{21}\alpha_{12} \right) = 0$$

Решение этих уравнений определяет подпространство интегральных многообразий U_s системы (1.1) для ГС

$$u^1 - x^2/x^1 - u^2 f(x^1) = 0$$

причем u^2 определяется выражением (3.12).

Таким образом, симметрии системы УЧП можно использовать для построения ГС между зависимыми (и независимыми переменными системы). Использование таких связей позволяет уменьшить размерность системы и строить ее частные точные решения.

Автор благодарит К.Г. Гараева и В.Г. Павлова за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
2. Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations. N.Y., etc.: Springer, 1986. = Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 637 с.
3. Яковенко Г.Н. Групповой подход к управляемости и инвариантности динамических систем // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наук. думка, 1978. № 39. С. 26–39.
4. Аржанников Н.С., Мальцев В.Н. Аэродинамика. М.: Оборонгиз, 1952. 480 с.
5. Гараев К.Г. Об одном следствии из теоремы Нетер для двумерной вариационной задачи типа Майера // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 448–453.
6. Сидоров А.Ф., Шанеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.
7. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
8. Pedley T.D. The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels. Cambridge: Univ. Press, 1980. = Педли Т.Дж. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 446 с.
9. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Под ред. А.М. Виноградова, И.С. Красильщика. М.: "Факториал", 1997. 461 с.
10. Кусюмов А.Н. Определяющие уравнения для инфинитезимальных симметрий одного класса систем внешних дифференциальных уравнений // Вестн. КГТУ им. А.Н. Туполева. 1999. № 1. С. 27–30.
11. Яненко Н.Н. Бегущие волны системы квазилинейных уравнений // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109. № 1. С. 44–47.

Казань
e-mail:kusyumov@agd.kstu-kai.ru

Поступила в редакцию
28.II.2000