

УДК 531.17 : 534.1

© 2001 г. Ю.Н. Санкин, Н.А. Юганова

**ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ
СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ
ПРИ СОУДАРЕНИИ С ЖЕСТКИМ ПРЕПЯТСТВИЕМ**

Предлагается частотный метод решения задачи о продольных колебаниях упругих стержней ступенчато-переменного сечения при учете или без учета рассеяния энергии при соударении с жестким препятствием. Уравнение продольных колебаний стержня преобразуется по Лапласу при наличии ненулевых начальных условий. Для полученного неоднородного дифференциального уравнения решается краевая задача, заключающаяся в нахождении преобразованных по Лапласу краевых продольных сил как функций краевых перемещений. Затем составляются уравнения равновесия узлов, которые представляют собой систему уравнений для неизвестных узловых перемещений. Поскольку соответствующие коэффициенты получаются точным интегрированием, длина участков стержня неограничена. Обратное преобразование осуществляется путем использования экстремальных точек амплитудно-фазочастотных характеристик [1] или непосредственным интегрированием. В качестве тестового примера рассматривается стержень постоянного сечения конечной длины. Дается сопоставление с известным волновым решением [2]. Предлагаемый подход реализован авторами впервые и не накладывает практически никаких ограничений на рассматриваемый класс задач, в то время как известный подход приводит к непреодолимым трудностям уже при наличии нескольких участков стержня.

1. Стержень постоянного сечения. Рассмотрим сплошной упругий стержень длины l , который соударяется с жестким препятствием со скоростью V_0 . Определим смещение точек стержня после удара. Будем считать, что после удара контакт между препятствием и стержнем сохраняется, т.е. нет отскока стержня. Если связь неудерживающая, то задача может рассматриваться как кусочно-линейная. Критерием перехода к другому варианту решения является смена знака скорости в точке контакта.

Уравнение продольных колебаний стержня при учете сил внутреннего сопротивления имеет вид

$$\mu u_{tt} - EFu_{xx} - EF\gamma u_{xxt} = 0 \quad (1.1)$$

где u – перемещение точек стержня, μ – масса единицы длины стержня, E – модуль упругости, F – площадь сечения, γ – коэффициент сопротивления.

Зададим следующие граничные и начальные условия:

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0 \quad (1.2)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = -V_0 \quad (1.3)$$

Преобразуем уравнение (1.1) и граничные условия (1.2) по Лапласу при заданных начальных условиях (1.3). Тогда уравнение (1.1) и граничные условия (1.2) запишутся

следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu p^2 U - EFU_{xx}(1 + \gamma p) &= -\mu V_0, \\ U|_{x=0} &= 0, \quad U_x|_{x=l} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где p – параметр преобразования Лапласа, $U = U(p)$ – преобразованные по Лапласу перемещения точек стержня.

Решение уравнения (1.4) без учета рассеяния энергии (т.е. при $\gamma = 0$) было получено ранее [2], и найден его оригинал. Решение этой задачи может быть получено другими методами [3]. Решение уравнения (1.4) может быть записано в виде (всюду далее суммирование ведется от $n = 1$ до $n = \infty$)

$$U(\alpha) = \sum \left[(T_{n2}^2 + T_{n1}p + 1) \|u_n\|^2 \right]^{-1} \lambda_n u_n(\alpha) \int_V f^T u_n dV \quad (1.5)$$

$$u_n = \sin(\Pi_n x), \quad \omega_n = \Pi_n \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2}, \quad \Pi_n = \frac{2n-1}{2l} \pi$$

$$f^T = -\rho V_0, \quad \lambda_n = \frac{1}{\omega_n^2}, \quad \lambda_n = T_{n2}^2, \quad \rho = \frac{\mu}{F}$$

где u_n – собственные формы колебаний, ω_n – собственные частоты, ρ – плотность стержня.

Применительно к данной задаче имеем

$$T_{n1} = \gamma, \quad \lambda_n = \frac{\rho}{\Pi_n^2 E} = T_{n2}^2$$

$$\int_V f^T u_n dV = -\int_0^l \rho V_0 \sin(\Pi_n x) dx = -\frac{\rho V_0}{\Pi_n}$$

$$\|u_n\|^2 = \int_0^l \rho u_n^2 dx = \rho \int_0^l \sin^2(\Pi_n x) dx = \frac{\rho l}{2}$$

Тогда для оригинала получим

$$u(x, t) = \sum \frac{-8V_0 l \sin(\Pi_n x) \sin((E/\rho)^{1/2} \Pi_n t)}{(E/\rho)^{1/2} \pi^2 (2n-1)^2} \quad (1.6)$$

Решение (1.6) описывает волновые явления в стержне с достаточной точностью при сохранении пяти форм колебаний. Сравнение решения (1.6) и точного решения, полученного ранее [2], производилось вплоть до 50 форм колебаний. При этом точность составляет 0.005%. На фиг. 1 представлены зависимости решения (1.6) от числа членов ряда: 1 – тестовая кривая [2]; 2, 3, 4 – кривые, построенные по формуле (1.6) соответственно при $n = 7, 5, 3$ ($l = 1.595$ м, $\rho = 7820$ кг/м³, $\gamma = 0.01$, $F = 0.025$ м², $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа). Расхождение при $n = 7$ не превышает 2.8%.

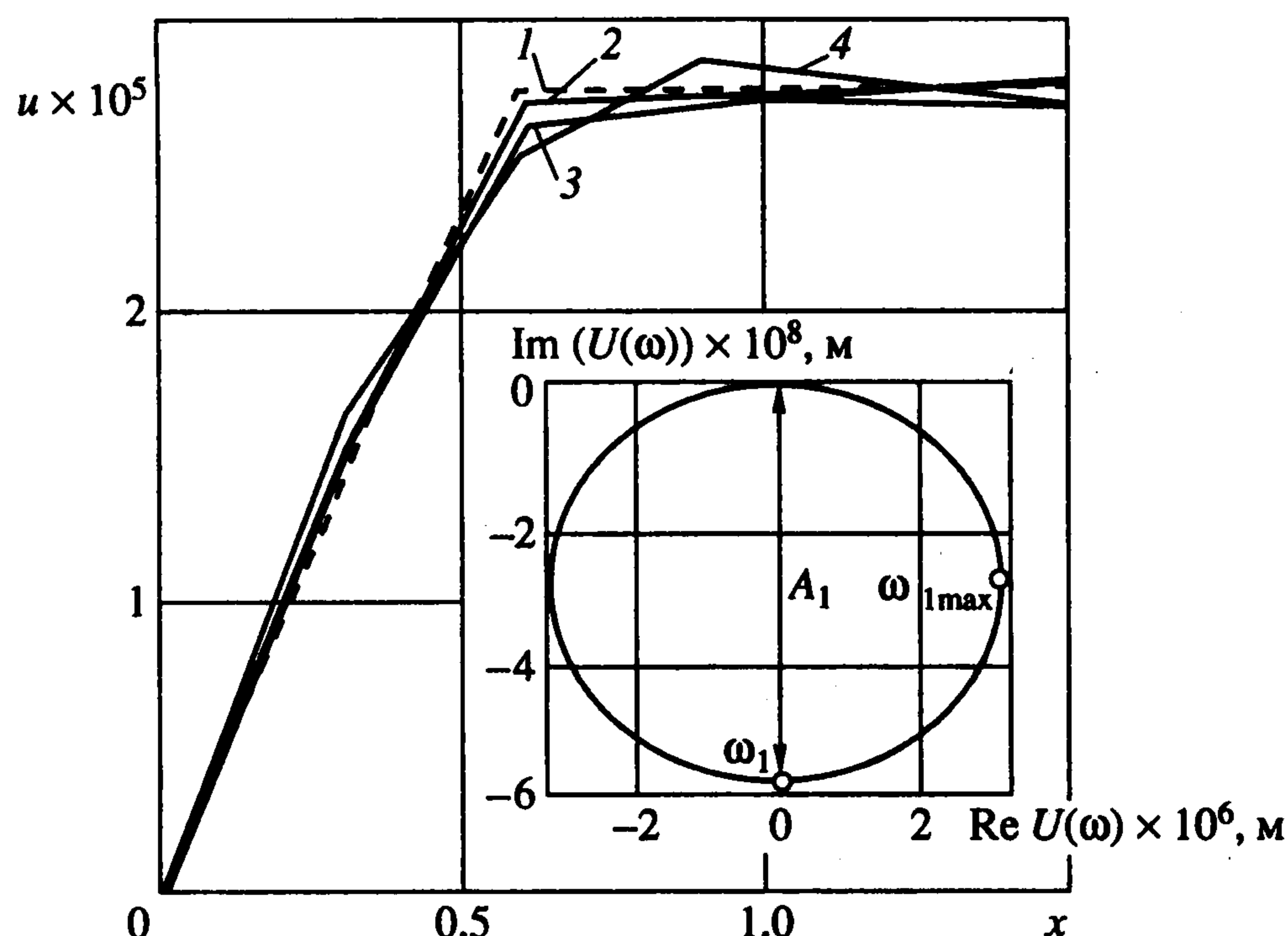
Предлагается частотный метод решения задачи, который будем сравнивать с известным решением в виде ряда по формам колебаний.

Введем безразмерную переменную $\xi = x/l$ и рассмотрим однородное уравнение продольных колебаний стержня с учетом рассеяния энергии

$$U_{\xi\xi} + aU = 0, \quad a = -\frac{\mu}{FE(1 + p\gamma)} p^2 l^2 \quad (1.7)$$

Решение уравнения (1.7) имеет вид

$$U = c_1 \cos \alpha \xi + c_2 \sin \alpha \xi, \quad \alpha = a^{1/2}$$



Фиг. 1

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования. Данному решению соответствует следующая матрица переноса [3]:

$$K = \begin{vmatrix} \cos \alpha \xi & \alpha^{-1} \sin \alpha \xi \\ -\alpha \sin \alpha \xi & \cos \alpha \xi \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

Пользуясь матрицей переноса (1.8), составим соотношения метода начальных параметров для вспомогательной задачи при возмущающем гармоническом воздействии $-\mu V_0 \sin \omega t$

$$V(\xi) = K(\xi)r_0 + l \int_0^l K(\xi - s)r(s)ds \quad (1.9)$$

где $r_0^T = (U_0, N_0)$ – вектор начальных параметров, $r(s) = (0, -\mu V_0)$ – вектор распределенного гармонического воздействия. Воспользовавшись первой строкой матричного соотношения (1.9), решим краевую задачу, заключающуюся в нахождении амплитуд краевых сил N_j и N_k через амплитуды вынужденных гармонических перемещений концов стержня U_j и U_k . Получим

$$N_{jk} = S_{jk}U_j - T_{jk}U_k + T_{jk}[u_k] \quad (1.10)$$

$$N_{kj} = S_{kj}U_k - T_{kj}U_j + T_{kj}[u_j]$$

Здесь

$$S_{jk} = S_{kj} = \frac{E_{kj}F_{kj}(1+i\omega\gamma_{kj})\alpha_{kj}}{l_{kj}} \frac{\cos \alpha_{kj}}{\sin \alpha_{kj}}$$

$$T_{jk} = T_{kj} = \frac{E_{kj}F_{kj}(1+i\omega\gamma_{kj})}{l_{kj}} \frac{\alpha_{kj}}{\sin \alpha_{kj}}$$

$$[u_j] = [u_k] = -\frac{\mu_{kj}V_0 l_{kj}^2}{E_{kj}F_{kj}(1+i\omega\gamma_{kj})\alpha_{kj}} \int_0^1 \sin(\alpha_{kj}s)ds = -\frac{\mu_{kj}V_0 l_{kj}^2}{E_{kj}F_{kj}(1+i\omega\gamma_{kj})} \frac{1 - \cos \alpha_{kj}}{\alpha_{kj}^2}$$

Индексы j и k указывают соответственно начало и конец стержня, $[u_j]$ и $[u_k]$ – величины, учитывающие влияние местной нагрузки и начальных условий.

Из второго уравнения (1.10) найдем выражение для преобразованного по Лапласу перемещения конца стержня при $p = i\omega$

$$U_k(\omega) = - \frac{\mu_{kj} V_0 l_{kj}^2 (1 - \cos \alpha_{kj})}{\alpha_{kj}^2 E_{kj} F_{kj} \cos \alpha_{kj} (1 + i\omega \gamma_{kj})} \quad (1.11)$$

В правой нижней части фиг. 1 представлен график амплитудно-фазочастотной характеристики (АФЧХ) перемещений конца стержня, A_1 – амплитуда витка, ω_1 – частота, соответствующая максимальной мнимой составляющей витка, $\omega_{1\max}$ – частота, соответствующая максимальной действительной составляющей витка. Установлено, что АФЧХ, построенная по формуле (1.5), при $x = l$ полностью совпадает с графиком, полученным по формуле (1.11), что дает выражение для суммы ряда (при $\gamma = 0$)

$$\sum \frac{4V_0 \sin(\Pi_n l_{kj})}{\rho \pi (2n-1)} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_n^2} = \frac{\mu_{kj} V_0 l_{kj}^2 (1 - \cos \alpha_{kj})}{\alpha_{kj}^2 E_{kj} F_{kj} \cos \alpha_{kj}}$$

Следует отметить, что в отличие от решения (1.5) предлагаемый подход не требует знания собственных частот и форм колебаний, что значительно упрощает алгоритм решения. Ранее аналогичным способом была решена задача об ударе сосредоточенной массы по стержню [4]. Принципиальным отличием рассмотренной здесь задачи является то, что в качестве вспомогательной задачи строятся АФЧХ от фиктивной распределенной нагрузки – $\mu V_0 \sin \omega t$, определяемой скоростью соударения стержня с препятствием.

Изображение (1.5) имеет табличный оригинал

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^m \frac{2k_n}{(4T_{n2}^2 - T_{n1}^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{T_{n1}}{2T_{n2}^2}\right) \sin\left(\frac{(4T_{n2}^2 - T_{n1}^2)^{1/2}}{2T_{n2}^2} t\right) \quad (1.12)$$

где $u(x, t)$ – импульсная переходная функция, по которой осуществляется переходный процесс, m – число витков, существенно себя проявляющих на АФЧХ.

Известно, что каждому витку АФЧХ соответствует один член ряда в решении (1.5). Между экстремальными точками АФЧХ и коэффициентами соответствующих членов ряда в решении (1.5) существует однозначная связь, которая используется в настоящей работе для осуществления обратного преобразования Лапласа. Для этого по построенной АФЧХ необходимо определить характерные частоты и амплитуды. При этом [1]

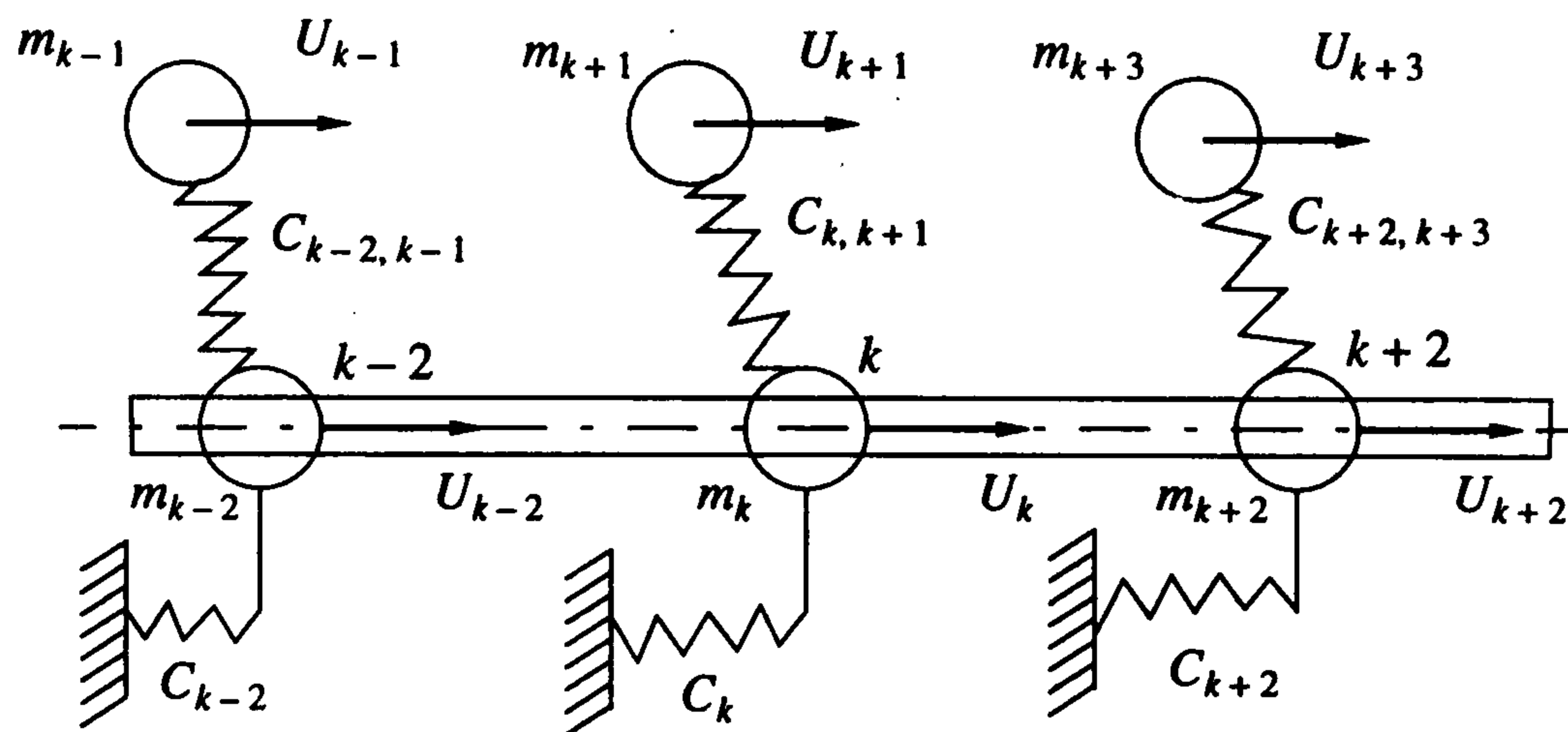
$$k_n = A_n T_{n1} \omega_n, \quad \frac{T_{n1}}{T_{n2}} = 1 - \frac{\omega_{n\max}^2}{\omega_n^2}, \quad T_{n2} = \frac{1}{\omega_n}$$

где A_n – амплитуда n -го витка, ω_n – частота, соответствующая максимальной мнимой составляющей n -го витка, $\omega_{n\max}$ – частота, соответствующая максимальной действительной составляющей n -го витка, k_n – коэффициент усиления.

Тот же результат можно получить, осуществив численное интегрирование при $t = 0, 1, \dots$,

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}(U(\omega) e^{i\omega t}) d\omega$$

2. Стержень ступенчато-переменного сечения. Разбивая стержень на участки, на которых постоянны физические и геометрические параметры, составим уравнения



Фиг. 2

динамического равновесия узлов, которые представляют собой систему уравнений для неизвестных узловых перемещений [3],

$$\begin{aligned} & -T_{k-2,k}U_{k-2} + (S_{k-2,k} + S_{k,k+2} + C_{k,k+1}(1 + \gamma_{k,k+1}p) + C_k(1 + \gamma_k p) + p^2 m_k)U_k - \\ & - C_{k,k+1}U_{k+1} - T_{k,k+2}U_{k+2} = -T_{k-2,k}[u_{k-2}] - T_{k,k+2}[u_{k+2}] + m_k p \dot{U}_{k,0} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$m_{k+1}p^2 U_{k+1} + C_{k,k+1}(1 + \gamma_{k,k+1}p)(U_{k+1} - U_k) = m_{k+1} \dot{U}_{k+1,0}$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

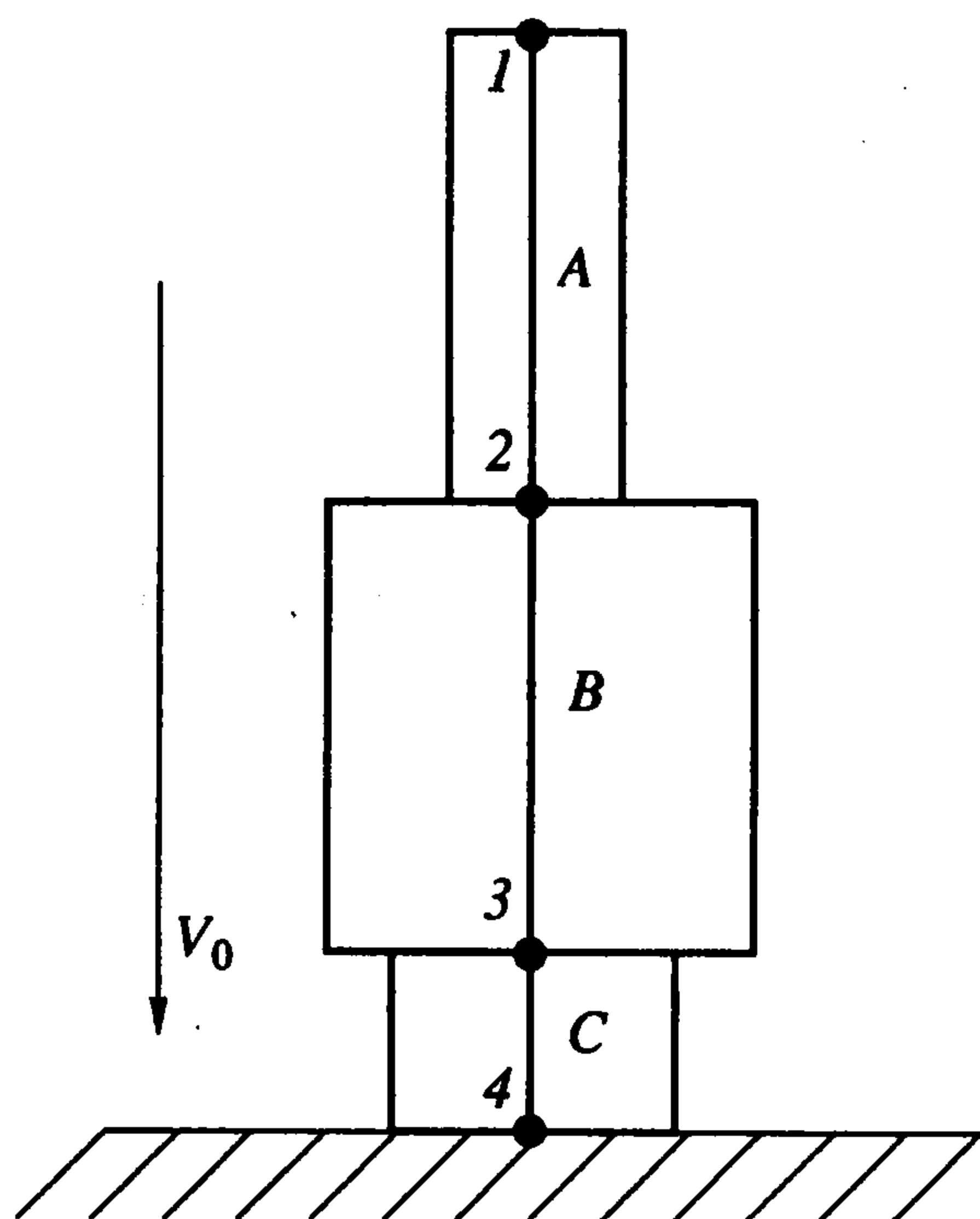
где $U_{k,0}$, $U_{k+1,0}$ – начальные скорости узловых точек k и $k + 1$, C_k – сосредоточенная жесткость, m_k – масса узла.

Расчетная схема стержня показана на фиг. 2.

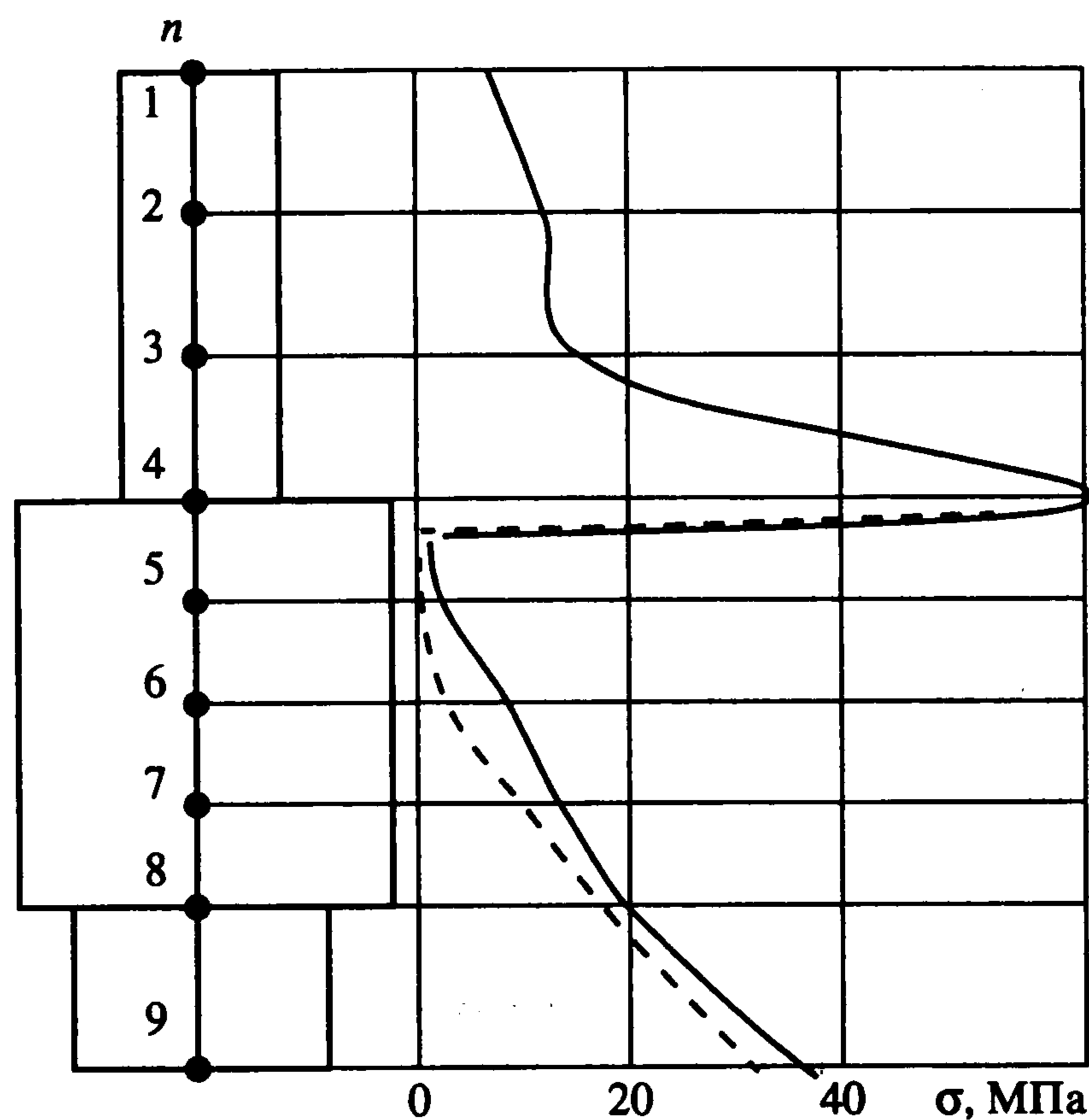
Решив полученную систему при $p = i\omega$, строим АФЧХ для выбранных сечений стержня. Эти АФЧХ можно рассматривать как графический образ одностороннего преобразования Фурье. Поскольку все особые точки соответствующих выражений лежат левее мнимой оси, обратное преобразование можно осуществлять, полагая

$p = i\omega$, т.е. используя построенные АФЧХ. Задача построения АФЧХ, где в качестве силового воздействия фигурирует поле начальных скоростей, умноженное на погонную массу стержня, является вспомогательной. Обычно при построении АФЧХ в качестве входного воздействия берутся возмущающие силы, затем численным интегрированием или каким-либо иным способом осуществляется обратное преобразование Лапласа. Поскольку соответствующие коэффициенты получаются точным интегрированием, длина участков стержня неограничена.

В качестве технического примера рассмотрим динамические явления, возникающие в падающих частях ковочного молота при жестком соударении с нижним бойком. Расчетная схема рассматриваемой системы представлена на фиг. 3 (А – шток, В – баба, С – верхний боек). Этой схеме соответствует следующая система



Фиг. 3



Фиг. 4

разрешающих уравнений:

$$\begin{aligned}
 S_{1,2}U_1 - T_{1,2}U_2 &= -T_{1,2}[u_2] \\
 -T_{1,2}U_1 + (S_{1,2} + S_{2,3})U_2 - T_{2,3}U_3 &= -T_{1,2}[u_1] - T_{2,3}[u_3] \\
 -T_{2,3}U_2 + (S_{2,3} + S_{3,4})U_3 &= -T_{2,3}[u_2] - T_{3,4}[u_4]
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

из которой находятся перемещения в выбранных сечениях.

Для проверки предлагаемого способа разобьем стержень постоянного сечения на три участка длины $l_{1,2}$, $l_{2,3}$ и $l_{3,4}$. Получили, что графики АФЧХ, построенные при одинаковых исходных данных по формуле (1.5) при $x = l_{3,4}$, $x = l_{3,4} + l_{2,3}$ и $x = l$, полностью совпадают с графиками $U_1(\omega)$, $U_2(\omega)$ и $U_3(\omega)$ соответственно, полученными из системы (2.2). Зная перемещения начала и конца участка, по формулам (1.10) рассчитываем продольные усилия $N(\omega)$, оригиналы которых связаны с напряжениями $\sigma(t)$ и деформациями $\varepsilon(t)$ следующими зависимостями:

$$\sigma(t) = N(t) / F, \quad \varepsilon(t) = N(t) / (EF)$$

Итак, разработан метод расчета продольных колебаний стержня ступенчато-переменного сечения при соударении с жестким препятствием. Описанный выше подход позволяет решать задачи динамики стержней ступенчато-переменного сечения при наличии неограниченного количества упруго присоединенных масс, при произвольном силовом воздействии, приложенном на концах и по длине стержня, т.е. в условиях, когда непосредственное обращение соответствующих формул практически невыполнимо.

Для сравнения точности результатов расчета были проведены экспериментальные исследования на ковочном молоте модели М1345 в основном производстве ЗАО "Авиастар" (г. Ульяновск). Исходные данные

$$E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \rho = 7850 \text{ кг/м}^3, \quad V_0 = 0.7 \text{ м/с}$$

Начало участка	1	2	3
Конец участка	2	3	4
$l, \text{ м}$	1.595	0.905	0.3
$F, \text{ м}^2$	0.025	0.39	0.204

Расчет производился в следующей последовательности. Вначале были найдены перемещения и напряжения в сечениях 1, 2, 3. Затем по формуле (1.9) рассчитывались перемещения по длине участка стержня. На ЭВМ был произведен расчет в девяти узлах системы. На фиг. 4 приведены теоретические (сплошная линия) и экспериментальные (штриховая линия) напряжения в выбранных узлах (n – номер узла) в момент времени $t = 0,02 \text{ с}$.

В результате расчета выявлены опасные сечения, где происходят разрушения конструкции: соединение штока с бабой (узел 4) и, в меньшей степени, в верхнем бойке (узел 9), что подтверждается экспериментально. Расхождение между теоретическими и экспериментальными расчетами составило не более 18%. При решении подобной задачи методом конечных элементов система разрешающих уравнений составила бы порядка 100–130 уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Санкин Ю.Н. Смешанные вариационные методы в динамике вязкоупругого тела с распределенными параметрами // Учен. зап. УлГУ. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. 1998. Вып. 1(5). С. 124–132.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
3. Санкин Ю.Н. Динамические характеристики вязкоупругих систем с распределенными параметрами. Изд-во Саратов. ун-та, 1977. 309 с.
4. Катыльмов Ю.В., Санкин Ю.Н. Определение напряжений в сваях при ударном погружении в грунт // Механика и процессы управления. Ульяновск: УлГТУ, 1996. С. 38–43.

Ульяновск
e-mail: yns@ulstu.ru

Поступила в редакцию
21.III.2000