

УДК 531.36

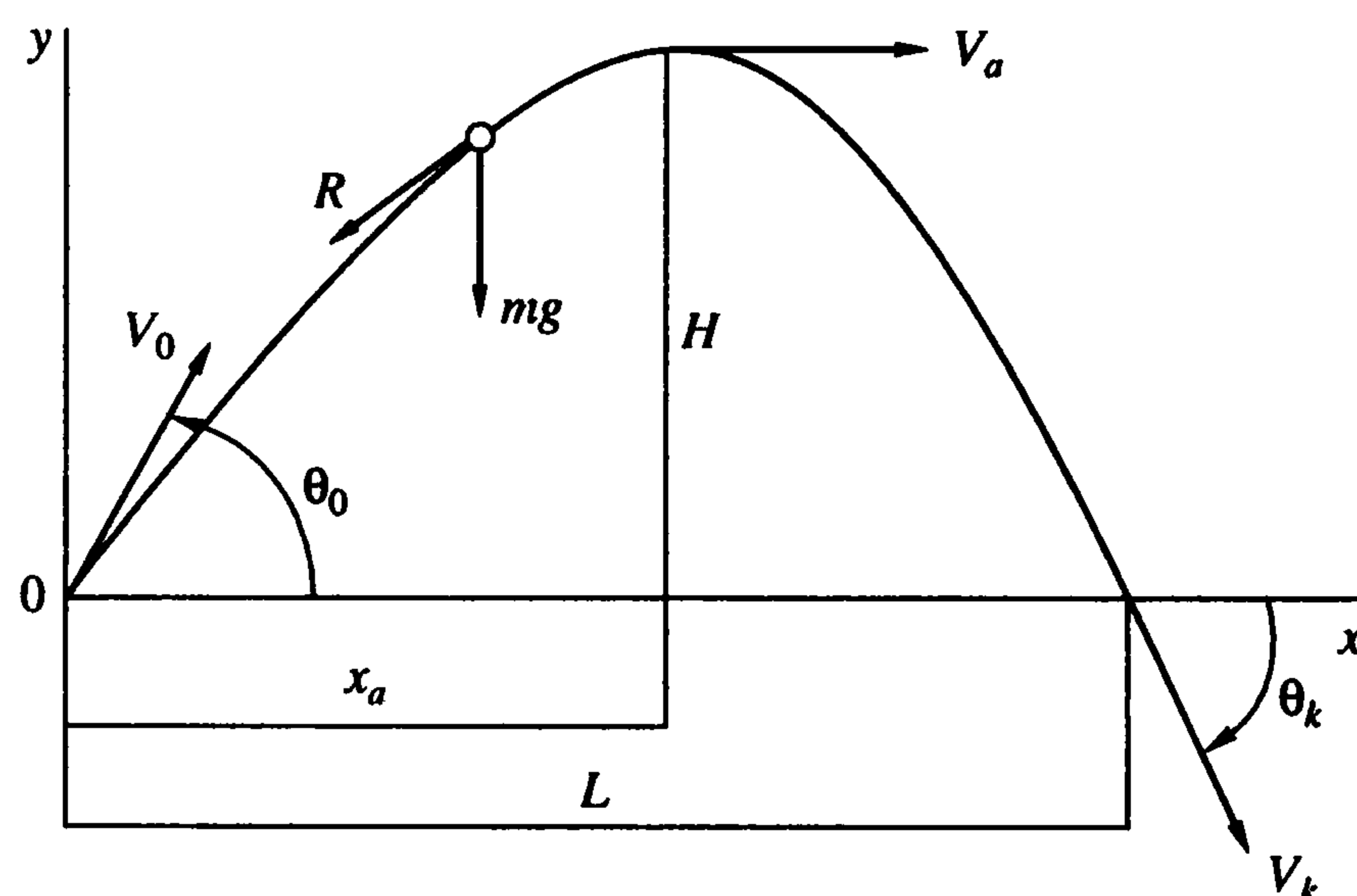
© 2001 г. П.С. Чудинов

О ДВИЖЕНИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В СРЕДЕ С КВАДРАТИЧНЫМ ЗАКОНОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Построено локальное аналитическое решение задачи о движении материальной точки в среде с квадратичным законом сопротивления, и получены простые аналитические формулы для основных параметров траектории точки. Показано, что траектория может быть рассчитана с высокой точностью с помощью простого и экономичного алгоритма. Приводятся примеры расчета.

Задача о движении материальной точки в среде с сопротивлением (основная задача внешней баллистики) рассматривалась многими авторами [1–9], начиная с Эйлера [1], который разработал метод исследования, впоследствии получивший название метода Эйлера. Этим методом им была решена задача точного интегрирования уравнения годографа скорости при квадратичной зависимости сопротивления среды от скорости точки. В дальнейшем задача неоднократно решалась разными методами (малого параметра, вариации постоянных, возмущений, методом Чаплыгина), однако точного аналитического решения найдено не было. Были получены различные формы приближенных решений [2–8], однако не очень удобные для применения, поскольку описываются весьма громоздкими формулами; к тому же они зачастую получены в предположении о малости силы сопротивления по сравнению с силой тяжести [4, 7]. Между тем при движении некоторых объектов, например бейсбольного мяча или мяча для гольфа, это предположение не выполняется, в связи с чем были разработаны различные численные схемы для интегрирования уравнений движения. Между тем подход Эйлера позволяет получить простые аналитические выражения для времени и координат точки в виде функций известной скорости точки, с помощью которых можно с высокой точностью построить траекторию точки и найти основные параметры движения. Аналитическое решение, предлагаемое ниже, отличается от других решений простотой формул, удобством применения, высокой точностью и отсутствием ограничений, накладываемых на величину силы сопротивления.

1. Уравнения движения и построение траектории. Задача о движении материальной точки в среде с квадратичным законом сопротивления $R = mgkV^2$ при ряде обычных



Фиг. 1

допущений сводится к решению известной системы дифференциальных уравнений [2]:

$$\dot{V} = -g \sin \theta - gkV^2, \quad \dot{\theta} = -g \cos \theta / V \quad (1.1)$$

$$\dot{x} = V \cos \theta, \quad \dot{y} = V \sin \theta$$

Здесь V – скорость точки, m – масса, θ – угол наклона траектории к горизонтали, g – ускорение свободного падения, x, y – декартовы координаты точки, k – коэффициент пропорциональности (фиг. 1).

Известное решение [2] уравнений (1.1), полученное методом Эйлера, состоит из явной аналитической зависимости скорости от угла наклона траектории и трех квадратур

$$V(\theta) = \frac{V_0 \cos \theta_0}{\cos \theta \sqrt{1 + kV_0^2 \cos^2 \theta_0 (f(\theta_0) - f(\theta))}} \quad (1.2)$$

$$f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$t = t_0 - \frac{1}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{V}{\cos \theta} d\theta, \quad x = x_0 - \frac{1}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} V^2 d\theta \quad (1.3)$$

$$y = y_0 - \frac{1}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} V^2 \operatorname{tg} \theta d\theta$$

Здесь V_0, θ_0 – начальные значения соответственно скорости и угла наклона траектории, t_0 – начальное значение времени, x_0, y_0 – начальные значения координат точки (в общем случае не равные нулю).

Интегралы в правых частях соотношений (1.3) в конечном виде не берутся. Поэтому для определения переменных t, x, y приходится либо численно интегрировать систему (1.1), либо вычислять определенные интегралы (1.3).

Оказывается [9], что с помощью специальным образом организованного интегрирования квадратур (1.3) по частям на достаточно малом промежутке $[\theta_0, \theta]$ переменные t, x, y записываются в виде

$$t = t_0 + \frac{2(V_0 \sin \theta_0 - V \sin \theta)}{g(2 + \varepsilon)} \quad (1.4)$$

$$x = x_0 + \frac{V_0^2 \sin 2\theta_0 - V^2 \sin 2\theta}{2g(1 + \varepsilon)}, \quad y = y_0 + \frac{V_0^2 \sin^2 \theta_0 - V^2 \sin^2 \theta}{g(2 + \varepsilon)}$$

$$\varepsilon = k(V_0^2 \sin \theta_0 + V^2 \sin \theta) \quad (1.5)$$

Получим первую из формул (1.4). Методика вычисления квадратур основана на использовании связи между вспомогательной переменной $u = V \cos \theta$ и независимой переменной θ . Эта связь в дифференциальной форме имеет вид [2]

$$\frac{du}{u^3} = k \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \quad (1.6)$$

Рассмотрим первую из квадратур (1.3) и перепишем ее, используя соотношение $u = V \cos \theta$, в виде

$$t = t_0 - \frac{1}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{V}{\cos \theta} d\theta = t_0 - \frac{1}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} u \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \quad (1.7)$$

Интеграл (1.7) берем по частям

$$t = t_0 - \frac{u \operatorname{tg} \theta}{g} \Big|_{\theta_0}^{\theta} + \frac{1}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} \operatorname{tg} \theta du = t_0 - \frac{V \sin \theta}{g} \Big|_{\theta_0}^{\theta} + \frac{1}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} \operatorname{tg} \theta du$$

С помощью соотношения (1.6) преобразуем последнее слагаемое

$$\frac{1}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} \operatorname{tg} \theta du = \frac{k}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} V^3 \operatorname{tg} \theta d\theta = -k \int_{\theta_0}^{\theta} V^2 \sin \theta dt$$

Таким образом,

$$t = t_0 - \frac{V \sin \theta}{g} \Big|_{\theta_0}^{\theta} - ktV^2 \sin \theta \Big|_{\theta_0}^{\theta} + k \int_{\theta_0}^{\theta} t d(V^2 \sin \theta) \quad (1.8)$$

Пусть промежуток интегрирования $\theta - \theta_0 = \Delta\theta$ достаточно мал. Тогда интеграл в (1.8) вычислим как площадь трапеции с основаниями t_0 , t и высотой $h = V^2 \sin \theta - V_0^2 \sin \theta_0$. Имеем

$$k \int_{\theta_0}^{\theta} t d(V^2 \sin \theta) \approx \frac{k(t_0 + t)}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} d(V^2 \sin \theta) = \frac{1}{2} k(t_0 + t)(V^2 \sin \theta - V_0^2 \sin \theta_0)$$

В результате формула (1.8) принимает вид

$$t \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) = t_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{V_0 \sin \theta_0 - V \sin \theta}{g}$$

(переменная ε определена соотношением (1.5)). Окончательно

$$t = t_0 + \frac{2(V_0 \sin \theta_0 - V \sin \theta)}{g(2 + \varepsilon)}$$

Аналогично выводятся две другие формулы (1.4).

Таким образом, на малом промежутке $[\theta_0, \theta]$ траектория точки аппроксимируется уравнениями (1.4). Эти формулы имеют локальный характер. Всю траекторию можно рассчитать с высокой точностью по шагам, вычислив по формулам (1.2), (1.4) значения $V(\theta)$, $t(\theta)$, $x(\theta)$, $y(\theta)$ на правом конце промежутка $[\theta_0, \theta]$ и принимая их за начальные для следующего шага:

$$V_0 = V(\theta), \quad t_0 = t(\theta), \quad x_0 = x(\theta), \quad y_0 = y(\theta)$$

Эта циклическая процедура заменяет как численное интегрирование системы (1.1), так и вычисление определенных интегралов (1.3). Чем меньше величина k , тем больше интервал $[\theta_0, \theta]$ применимости полученных формул. При $k = 0$, т.е. при отсутствии силы сопротивления, формулы (1.4) переходят в известные точные формулы теории параболического движения материальной точки и становятся справедливыми при любых значениях θ_0 и θ . Вместе с тем формулы (1.4) являются точными на тех конечных промежутках $[\theta_0, \theta]$, где переменные t , x , y линейно зависят от вспомогательной переменной $z = V^2 \sin \theta$.

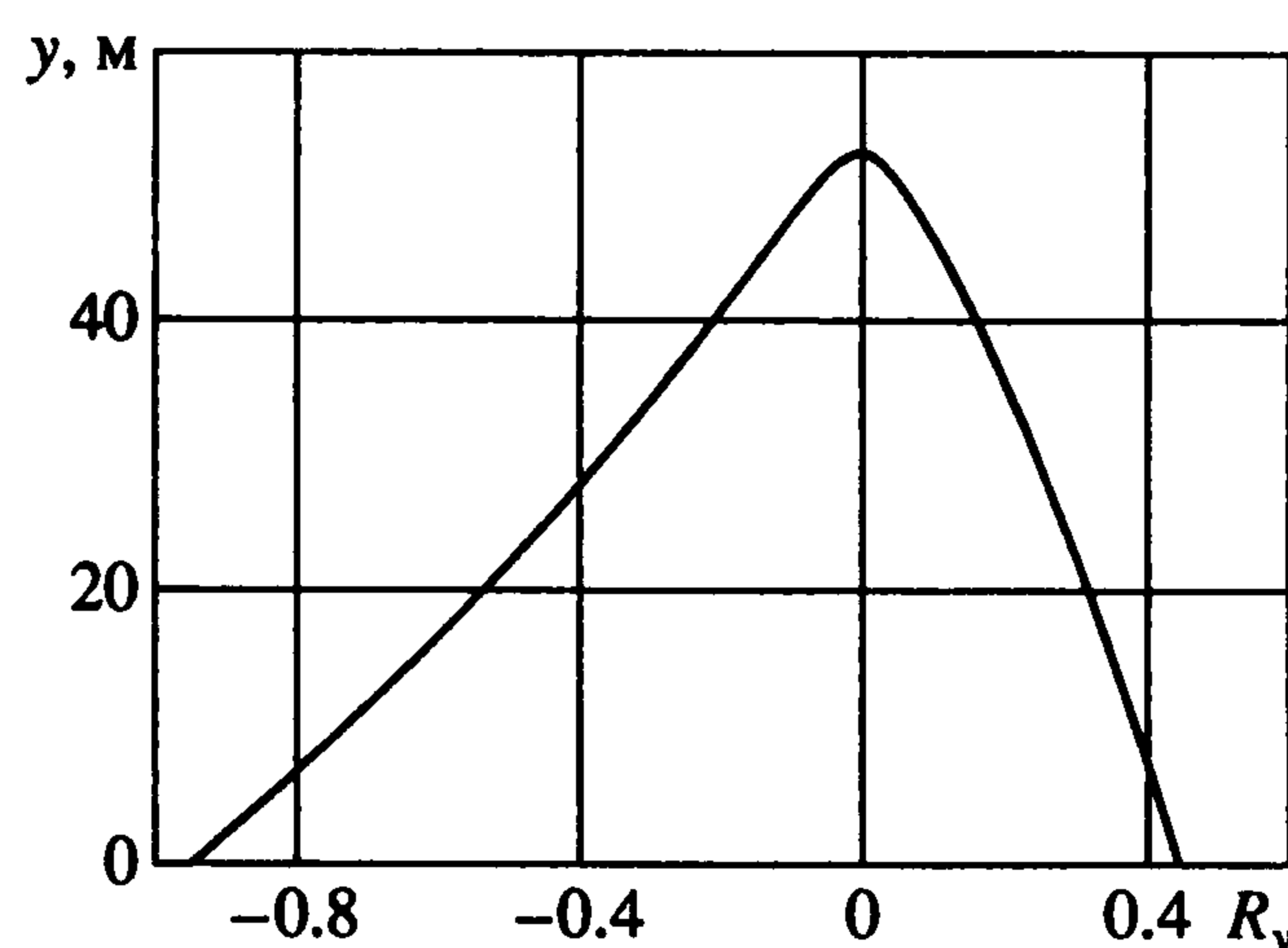
Как показывают расчеты, траектория, полученная путем интегрирования системы уравнений (1.1), и траектория, построенная по формулам (1.2), (1.4), тождественно совпадают. При этом для построения траектории достаточно использовать шаг $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ порядка 0.1° . Ниже приведен пример расчета по формулам (1.2), (1.4) траектории бейсбольного мяча при следующих начальных значениях V_0 , θ_0 и значении коэффициента k [3]:

$$V_0 = 44.69 \text{ м/с}, \quad \theta_0 = 60^\circ, \quad k = 0.000548 \text{ с}^2/\text{м}^2, \quad g = 9.81 \text{ м/с}^2 \quad (1.9)$$

θ , град	60	30	0	-30	-60	-70.11
V , м/с	44.69	18.36	14.71	15.88	23.50	29.35
t , с	0	2.153	3.052	3.889	5.391	6.533
x , м	0	39.77	53.49	65.40	84.62	97.04
y , м	0	48.48	52.55	49.18	27.57	$3 \cdot 10^{-4}$

Отметим, что в данном примере на начальном этапе движения мяча сила сопротивления больше силы тяжести, а в процессе движения величина ее изменяется на порядок.

2. Аналитические формулы для определения основных параметров движения точки. Уравнения (1.4) позволяют получить простые аналитические формулы для основных параметров движения точки. На фиг. 2 для значений (1.9) построена зависимость координаты y от вспомогательной



Фиг. 2

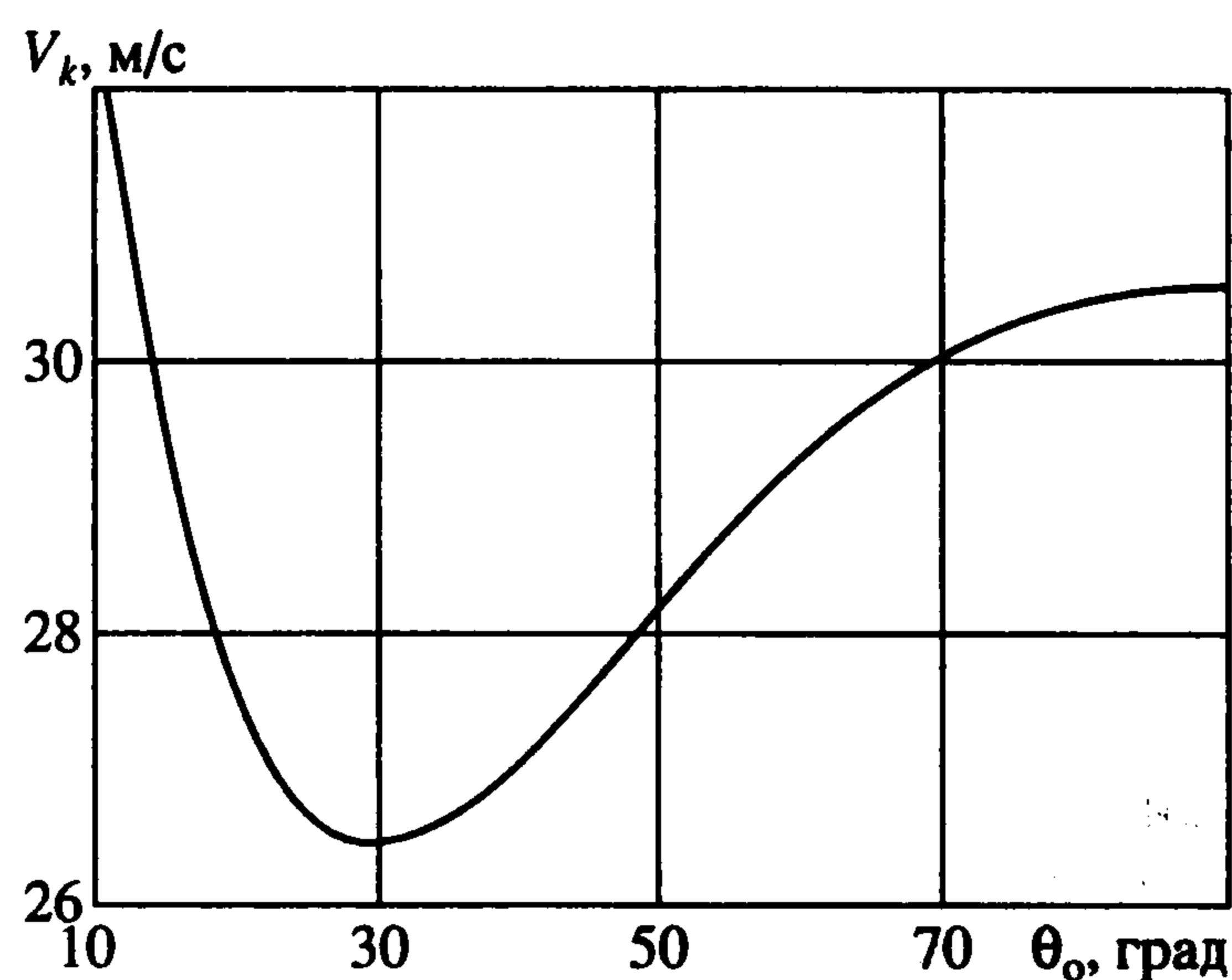
безразмерной переменной $R_y = -kV^2 \sin \theta$, где R_y – проекция нормированной силы сопротивления среды на ось y . Переменная R_y аналогична выше упомянутой переменной z . Видно, что как на этапе подъема (левая часть графика), так и на этапе спуска точки (правая часть) эта зависимость близка к линейной. Отсюда следует, что максимальную высоту подъема точки H можно приближенно получить, применяя формулу (1.4) для y на конечном промежутке $[\theta_0, 0]$, т.е. полагая в этой формуле $\theta = 0$.

На основе соотношения для максимальной высоты подъема H выведены сравнительно простые приближенные аналитические формулы для других параметров движения точки. Приведем полную сводку формул для максимальной высоты подъема точки H , скорости в вершине траектории V_a , времени подъема t_a , дальности L , времени движения T , абсциссы вершины траектории x_a , конечной скорости V_k и угла падения θ_k :

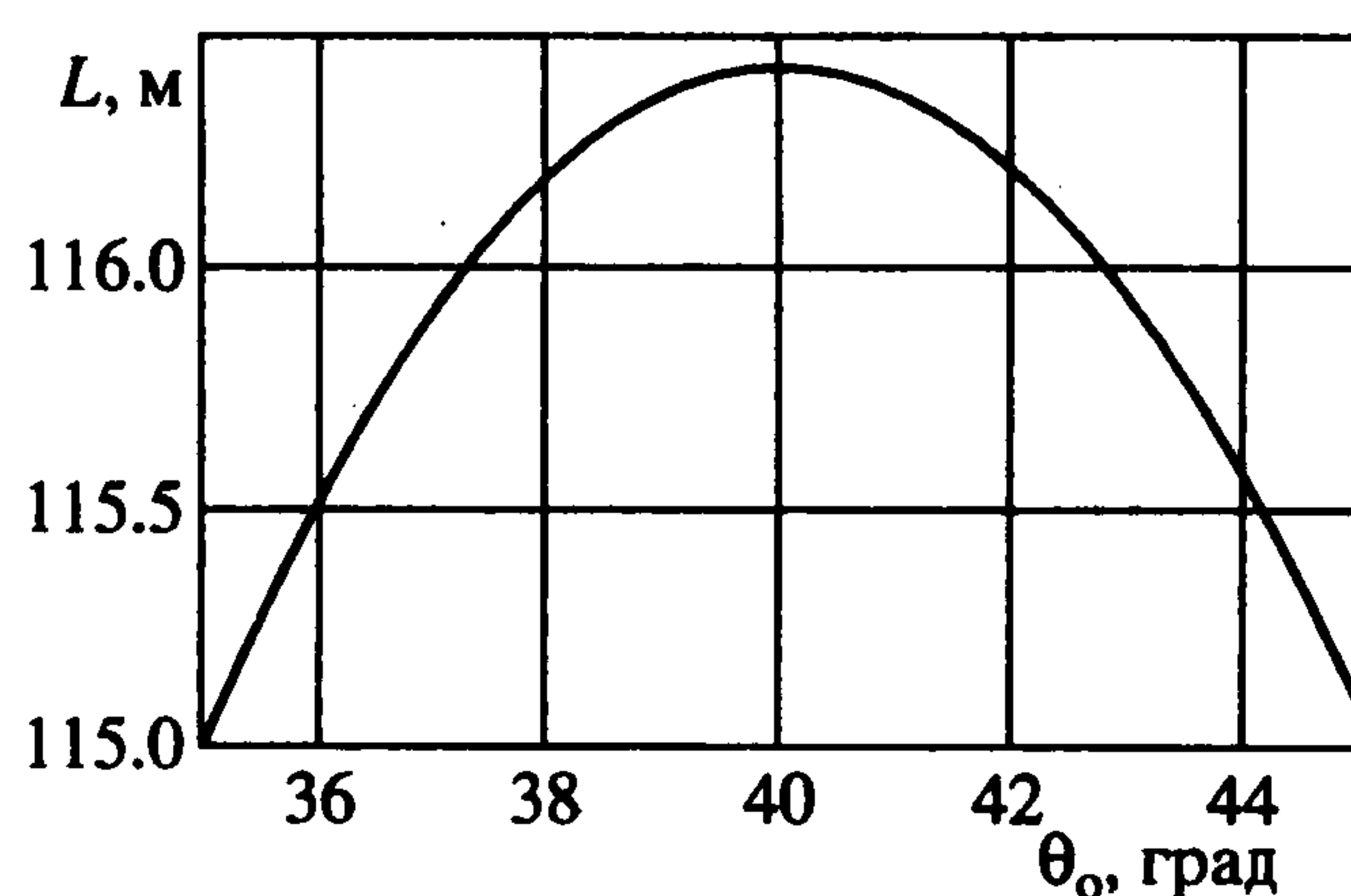
$$\begin{aligned}
 H &= \frac{V_0^2 \sin^2 \theta_0}{g(2 + kV_0^2 \sin \theta_0)} \\
 V_a &= \frac{V_0 \cos \theta_0}{\sqrt{1 + kV_0^2 (\sin \theta_0 + \cos^2 \theta_0 \ln \operatorname{tg}(\theta_0 / 2 + \pi / 4))}} \\
 t_a &= \sqrt{\frac{2H}{g} + \left(\frac{kHV_a}{2}\right)^2} - \frac{kHV_a}{2}, \quad L = 2V_a \sqrt{\frac{2H}{g}} \\
 T &= t_a + \frac{2H}{gt_a}, \quad x_a = \frac{L(T - t_a)}{\sqrt{2Tt_a}} \\
 V_k &= \frac{\sqrt{a^2(1 - c^2) + d^2(1 - b^2) + 2abcd} - (ab + cd)}{1 - b^2 - c^2} \\
 \theta_k &= \arcsin \left[c(1 + b) - \frac{d}{V_k} \right] \\
 \left(a = \frac{L - x_a}{T - t_a}, \quad b = \frac{kg(L - x_a)}{2}, \quad c = \frac{kgH}{2}, \quad d = \frac{gT}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

При $k = 0$ формулы (2.1) переходят в соответствующие формулы теории параболического движения точки.

3. Результаты и выводы. Формулы (2.1) позволяют вычислить основные параметры движения точки непосредственно по начальным условиям V_0, θ_0 , как в теории параболического движения. В качестве примера использования формул (2.1)



Фиг. 3



Фиг. 4

было рассчитано движение бейсбольного мяча с начальными условиями

$$V_0 = 39.62 \text{ м/с}, \theta_0 = 60^\circ$$

Получены следующие результаты (в скобках указана величина отклонения от точного значения параметра, полученного при использовании формул (1.2), (1.4) с шагом $\Delta\theta = 0.1^\circ$):

$$\begin{aligned} H &= 43.72 \text{ м} (-0.6\%), & V_a &= 13.91 \text{ м/с} (0.0\%) \\ t_a &= 2.823 \text{ с} (0.0\%), & L &= 83.06 \text{ м} (-0.9\%) \\ T &= 5.980 \text{ с} (0.0\%), & x_a &= 45.12 \text{ м} (-1.0\%) \\ V_k &= 27.66 \text{ м/с} (-0.1\%), & \theta_k &= -68.61^\circ (-0.3\%) \end{aligned}$$

Аналитические формулы (2.1) позволяют проводить параметрический анализ задачи и оптимизацию. На фиг. 3,4 построены зависимости $V_k(\theta_0)$ и $L(\theta_0)$ для $V_0 = 44.69 \text{ м/с}$. Видно, что минимум конечной скорости достигается при $\theta_0 = 30^\circ$, а максимум дальности L – при $\theta_0 = 40^\circ$, тогда как при $k = 0$ значение $L_{\max} = L(\theta_0 = 45^\circ)$.

Таким образом, полученные на основе метода Эйлера простые и удобные для расчета аналитические формулы позволяют построить решение, не уступающее по точности численному решению уравнений движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйлер Л. Исследование истинной кривой, описываемой брошенными телами в воздухе или в какой-либо другой среде // Эйлер Л. Исследования по баллистике. М.: Физматгиз, 1961. С. 455–494.

2. Окунев Б.Н. Основы баллистики. Т. 1. Кн. 2. М.: Воениздат, 1943. 440 с.
3. Tan A., Frick C.H., Castillo O. The fly ball trajectory: an older approach revisited // Amer. J. Phys. 1987. V. 55. № 1. P. 37–40.
4. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
5. Некрасов А.И. Общий случай движения материальной точки в среде с постоянной плотностью под действием силы, постоянной по величине и направлению, и силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости точки // Собр. соч. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 425–437.
6. Воробьев Л.М. Решение основной задачи внешней баллистики // ПММ. 1978. Т. 22. Вып. 3. С. 350–358.
7. Пустовалов В.В., Чудинов П.С. Движение тяжелой материальной точки в среде с сопротивлением // Проблемы механики управляемого движения. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1990. С. 85–93.
8. Чудинов П.С., Чуркина Н.И. Приближенное аналитическое решение основной задачи внешней баллистики // Всероссийская науч.-практ. конф. "Первые Окуневские чтения". Сб. тр. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 1999. Т. 1. С. 175–179.
9. Чудинов П.С., Чуркина Н.И. О движении материальной точки в среде с квадратичным законом сопротивления // Междунар. науч.-практ. конф. "Вторые Окуневские чтения". Материалы докл. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2000. С. 48–49.

Москва

Поступила в редакцию
30.X.2000