

УДК 531.38

© 2001 г. Г.В. Горр, Е.М. Миронова

СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ

Исследуется существование инвариантных соотношений (ИС) обобщенных уравнений Эйлера–Пуассона динамики твердого тела с неподвижной точкой, для которых существуют интегралы энергии, момента количества движения и геометрический интеграл. Рассматриваются разные постановки, когда известны потенциалы приложенных сил и когда они определяются по виду ИС из выражений первых интегралов. Полученные ранее результаты [1] обобщены на случай одного ИС произвольной структуры и рассмотрены условия существования ИС нулевого слоя по терминологии П.В. Харламова [2].

Метод ИС [3, 4], развитый до алгоритма П.В. Харламовым [2], позволяет исследовать ИС с помощью двух подходов: первый подход предполагает использование только дифференциальных уравнений движения, второй основан на привлечении интегралов. На базе второго подхода были найдены [1] условия существования у дифференциальных уравнений Гриоли – М.П. Харламова [5, 6] (ГХ) трех линейных ИС.

В данной статье указан пример, показывающий, что при заданных силовой и гироскопической функциях условия существования трех линейных ИС уравнений ГХ могут не совпадать с условиями [1]. Рассмотрено одно ИС и получено дополнительное ограничение, при наличии которого результаты [1] могут быть обобщены. Установлены новые классы силовой и гироскопической функций уравнений ГХ, обеспечивающие существование одного линейного ИС нулевого слоя.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении твердого тела в поле потенциальных и гироскопических сил в предположении, что дифференциальные уравнения движения допускают, как и в классическом случае, три первых интеграла. Тогда в векторном виде имеем уравнения [5]

$$\dot{x} = x \times ax + \mu(v, ax)(v \times ax) + \frac{\partial L}{\partial v} \times ax + \frac{\partial U}{\partial v} \times v \quad (1.1)$$

$$\dot{v} = v \times ax \quad (1.2)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial v} = \left(\frac{\partial L}{\partial v_1}, \frac{\partial L}{\partial v_2}, \frac{\partial L}{\partial v_3} \right), \frac{\partial U}{\partial v} = \left(\frac{\partial U}{\partial v_1}, \frac{\partial U}{\partial v_2}, \frac{\partial U}{\partial v_3} \right) \right)$$

где x – вектор момента количества движения тела; v – единичный вектор оси симметрии силового поля; $L(v_1, v_2, v_3)$, $U(v_1, v_2, v_3)$ – скалярные функции компонент вектора v ; $\mu(v, ax)$ – скалярная функция компонент векторов v и $\omega = ax$, причем $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ и

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, & \omega_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \omega_3 &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \quad (1.3)$$

x_1, x_2, x_3 – компоненты вектора x , a_{ij} – компоненты тензора a .

В классических задачах $\mu \equiv 0$, а $L(v_1, v_2, v_3)$ и $U(v_1, v_2, v_3)$ – многочлены по v_i до второго порядка. Если предполагать, что функция μ зависит только от v_i ($i = 1, 2, 3$), то получим уравнение М.П. Харламова [6]. Этот случай и рассматривается ниже.

Уравнения (1.1), (1.2) имеют три первых интеграла

$$ax \cdot x - 2U(v_1, v_2, v_3) = 2E, \quad x \cdot v + L(v_1, v_2, v_3) = k, \quad v \cdot v = 1 \quad (1.4)$$

где E и k – произвольные постоянные.

Пусть для уравнений (1.1), (1.2) поставлена задача об условиях существования ИС

$$f(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) = 0 \quad (1.5)$$

В первом подходе использования метода ИС [2] вычисляются производные от функции в левой части (1.5) в силу уравнений (1.1), (1.2). Если многообразие, определяемое (1.5) и равенствами нулю вычисленных производных не пусто, то оно называется инвариантным многообразием системы (1.1), (1.2), а соотношение (1.5) называется ИС [2]. Случай Пуанкаре [4] и Леви–Чивиты [5] получим, когда производная от функции в левой части (1.5) в силу (1.1), (1.2) равна нулю на соотношении (1.5). В общем случае, чтобы установить, что (1.5) является ИС, необходимо исследовать функциональную зависимость (1.5) и вычисленных производных. Если последовательность, состоящая из (1.5) и производных содержит l функционально независимых членов, то (1.5) называется ИС $(l-1)$ -слоя [2].

Особенности применения метода ИС показывает следующий пример. Пусть задана система трех дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = x^2 + z^2 - b^2, \quad \dot{z} = -(2x^2 + z^2 - b^2)z^{-1}$$

где b – постоянный параметр. Для этой системы соотношение $x = 0$ в силу $\dot{x} = x = 0$ является ИС нулевого слоя, а соотношение $y = 0$ в силу равенств

$$\dot{y} = x^2 + z^2 - b^2 = 0, \quad \ddot{y} = x^2 + z^2 - b^2 = 0$$

является ИС первого слоя. В первом случае производная от ИС тождественно равна нулю на заданном ИС, во втором случае вторая производная от ИС равна нулю на данном ИС и множестве, определяемом первой производной.

Второй подход П.В. Харламова [2] основан на использовании первых интегралов дифференциальных уравнений движения и состоит в том, что к соотношению (1.5) и равенствам нулю производных от функции в левой части (1.5) в силу уравнений (1.1), (1.2) присоединяются интегралы (1.4). Исследуя функциональную зависимость членов построенной таким путем последовательности, приходим к условиям существования ИС (1.5). Определение слоя ИС при таком подходе не изменяется [2].

Таким образом, при исследовании ИС необходимо всегда указывать слой ИС, либо определять свойства ИС по отношению к системе (1.1)–(1.4).

2. Три ИС. Результаты Л.Н. Орешкиной [1]. Были рассмотрены [1] три ИС уравнений (1.1), (1.2) при $\mu = \mu(v_1, v_2, v_3)$

$$x_i = g_i(v_1, v_2, v_3), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

С помощью интегралов (1.4) на основании равенств (1.3) были определены функции $L = L(v_1, v_2, v_3)$, $U = U(v_1, v_2, v_3)$. После подстановки их в уравнения (1.1), (1.2) были получены три соотношения

$$(\omega_3 v_2 - \omega_2 v_3) \left[\mu(v_1, v_2, v_3) - \frac{\partial g_1}{\partial v_1} - \frac{\partial g_2}{\partial v_2} - \frac{\partial g_3}{\partial v_3} \right] = 0 \quad (123) \quad (2.2)$$

Символ (123) означает, что невыписанные уравнения получим из (2.2) циклической перестановкой чисел 1, 2, 3. Поскольку равенства $\omega_3 v_2 - \omega_2 v_3 = 0$ (123) в силу (1.2)

приводят к стационарным решениям уравнений (1.1), (1.2), то из (2.2) вытекает [1]

$$\mu(v_1, v_2, v_3) = \frac{\partial g_1}{\partial v_1} + \frac{\partial g_2}{\partial v_2} + \frac{\partial g_3}{\partial v_3} \quad (2.3)$$

Так как рассмотрены только первые производные (2.2), то это означает, что в [1] определены функции $L = L(v_1, v_2, v_3)$, $U = U(v_1, v_2, v_3)$, $\mu = \mu(v_1, v_2, v_3)$, для которых уравнения (1.1), (1.2) допускают три ИС (2.1) нулевого слоя. Из данного способа следует, что соотношение (2.3) должно выполняться для всех значений (v_1, v_2, v_3) из пространства R^3 .

Рассмотрим следующий пример, который показывает, что при заданных функциях $L = L(v_1, v_2, v_3)$, $U = U(v_1, v_2, v_3)$ описанный ранее подход [1] оказывается неприемлемым.

Пусть компоненты гирационного тензора a_{ij} имеют значения: $a_{ij} = 0$ ($i \neq j$), $a_{ii} = a_i$, а $L(v_1, v_2, v_3)$, $U(v_1, v_2, v_3)$ – квадратичные формы следующего вида:

$$L(v_1, v_2, v_3) = \frac{b_2}{a_1}(a_1 v_2^2 - \alpha_0 a_2 v_1^2), \quad U(v_1, v_2, v_3) = \frac{a_2 b_2^2}{2a_1}(a_1 v_2^2 + \alpha_0^2 a_2 v_1^2) \quad (2.4)$$

где b_2 и α_0 – некоторые параметры.

Зададим три ИС уравнений (1.1), (1.2)

$$x_1 = a_2 b_2 (e_1 v_1^2 + e_0) v_1 D^{-1}, \quad x_2 = b_2 (f_1 v_1^2 + f_0) v_2 D^{-1} \quad (2.5)$$

$$x_3 = 2a_2 b_2 (g_1' v_1^2 + g_0) v_3 D^{-1}$$

где

$$\begin{aligned} v_2^2(v_1) &= \alpha_0 v_1^2 + \beta_0, \quad v_3^2(v_1) = 1 - \beta_0 - (1 + \alpha_0) v_1^2 \\ \dot{v}_1 &= -a_2 b_2 \sqrt{v_2^2(v_1) v_3^2(v_1)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

В формулах (2.5), (2.6) обозначено

$$\begin{aligned} D &= d_1 v_1^2 + d_0, \quad d_1 = \alpha_0 a_1 (a_2 - a_3) + a_2 (a_1 - a_3), \quad d_0 = a_1 [(a_2 - a_3) \beta_0 - a_2] \\ e_1 &= \alpha_0 [\alpha_0 a_1 (a_3 - a_2) + 2a_1 a_3 - a_2 (a_1 + a_3)] \\ e_0 &= a_1 [2a_3 \beta_0 + \alpha_0 a_2 + \alpha_0 \beta_0 (a_3 - a_2)] \\ f_1 &= \alpha_0 (a_1 a_3 + a_1 a_2 - 2a_2 a_3) - a_2 (a_3 - a_1), \quad f_0 = a_1 [(a_2 + a_3) \beta_0 - a_2] \\ g_1' &= \alpha_0 (a_1 - a_2), \quad g_0 = a_1 \beta_0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь β_0 – произвольный параметр.

Можно убедиться, что соотношения (2.4)–(2.7) задают решение уравнений (1.1), (1.2), характеризующееся тремя ИС (2.5), в случае, когда функция $\mu(v_1, v_2, v_3) = \mu(v_1, v_2(v_1), v_3(v_1)) = \mu^*(v_1)$ принимает значение (штрихом обозначена производная по v_1)

$$\mu^*(v_1) = a_2 b_2 a_1^{-1} [(e_1 v_1^2 + e_0) v_1 D^{-1}]' + F(v_1) \quad (2.8)$$

$$F(v_1) = 2b_2 (a_3 - a_2) (f_1 v_1^2 + f_0) (g_1' v_1^2 + g_0) D^{-2} + 4b_2 a_3 (g_1' v_1^2 + g_0) D^{-1} + b_2$$

Если использовать метод Л.Н. Орешкиной [1], то из (2.3), (2.5), (2.7) имеем значение функции (2.3) на решении (2.6), отличающееся от (2.8) тем, что теперь

$$F(v_1) = b_2 [(f_1 + 2a_2 g_1) v_1 + (f_0 + 2a_2 g_0)] D^{-1}$$

Как будет выяснено ниже, причина этого отличия состоит в том, что ИС (2.1) и ИС (2.5) относятся к разным слоям ИС, в то время как в принятом ранее подходе [1] слой ИС не оговаривается.

3. Исследование одного ИС с использованием интегралов. Пусть задано одно ИС

$$x_1 = g_1(v_1, v_2, v_3) \quad (3.1)$$

Предположим, что $L = L(v_1, v_2, v_3)$, $U = U(v_1, v_2, v_3)$ – заданные дифференцируемые функции переменных v_1, v_2, v_3 . Будем считать, что (3.1) – ИС нулевого слоя по терминологии П.В. Харламова [2]. Для исследования ИС (3.1) привлечем первые интегралы (1.4). Внесем выражение (3.1) в (1.4), а систему координат выберем так, что $a_{23} = 0$. Получим следующие соотношения:

$$a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2(a_{12}x_2 + a_{13}x_3)g_1(v_1, v_2, v_3) = \varphi_1(v_1, v_2, v_3) \quad (3.2)$$

$$x_2v_2 + x_3v_3 = \varphi_2(v_1, v_2, v_3) \quad (3.3)$$

где

$$\varphi_1(v_1, v_2, v_3) = 2E - a_{11}g_1^2(v_1, v_2, v_3) + 2U(v_1, v_2, v_3) \quad (3.4)$$

$$\varphi_2(v_1, v_2, v_3) = K - v_1g_1(v_1, v_2, v_3) - L(v_1, v_2, v_3)$$

Из (3.2), (3.3) определим

$$x_2 = g_2(v_1, v_2, v_3) = \Delta_1^{-1}(a_{33}v_2\varphi_2 + g_1v_3\Delta_2 + v_3\sqrt{\Delta}) \quad (3.5)$$

$$x_3 = g_3(v_1, v_2, v_3) = \Delta_1^{-1}(a_{22}v_3\varphi_2 - g_1v_2\Delta_2 - v_2\sqrt{\Delta})$$

Здесь

$$\Delta_1 = a_{22}v_3^2 + a_{33}v_2^2, \quad \Delta_2 = a_{13}v_2 - a_{12}v_3 \quad (3.6)$$

$$\Delta = g_1^2\Delta_2^2 - 2g_1(a_{12}a_{33}v_2 + a_{22}a_{13}v_3)\varphi_2 - a_{22}a_{33}\varphi_2^2 + \Delta_1\varphi_1$$

а φ_1 и φ_2 выражаются формулами (3.4). Поскольку (3.1) – ИС нулевого слоя, то выполняется уравнение $\dot{x}_1 - \dot{g}_1(v_1, v_2, v_3) = 0$, или на основании соотношений (1.1)–(1.3)

$$\begin{aligned} \omega_3 \left(x_2 + \mu(v_1, v_2, v_3)v_2 + \frac{\partial L}{\partial v_2} \right) - \omega_2 \left(x_3 + \mu(v_1, v_2, v_3)v_3 + \frac{\partial L}{\partial v_3} \right) + v_3 \frac{\partial U}{\partial v_2} - \\ - v_2 \frac{\partial U}{\partial v_3} - (\omega_3v_2 - \omega_2v_3) \frac{\partial g_1}{\partial v_1} - (\omega_1v_3 - \omega_3v_1) \frac{\partial g_1}{\partial v_2} - (\omega_2v_1 - \omega_1v_2) \frac{\partial g_1}{\partial v_3} = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

причем ω_i выражаются соотношениями (1.3), в которых необходимо положить $a_{23} = 0$ и $x_1 = g_1(v_1, v_2, v_3)$.

Внесем выражения (1.3) и (3.5) в уравнение (3.7)

$$\begin{aligned} \Delta_1^2 \left[\left(\frac{\partial g_1}{\partial v_1} - \mu(v_1, v_2, v_3) \right) \sqrt{\Delta} + \left(a_{13} \frac{\partial L}{\partial v_2} - a_{12} \frac{\partial L}{\partial v_3} \right) g_1 + \Delta_3 g_1 \frac{\partial g_1}{\partial v_2} + \right. \\ \left. + \Delta_4 g_1 \frac{\partial g_1}{\partial v_3} + v_3 \frac{\partial U}{\partial v_2} - v_2 \frac{\partial U}{\partial v_3} \right] + (a_{33} - a_{22})u_2u_3 + \\ + \Delta_1 \left[u_2 \left(a_{13}g_1 - a_{12}v_3 \frac{\partial g_1}{\partial v_2} - \Delta_5 \frac{\partial g_1}{\partial v_3} - a_{22} \frac{\partial L}{\partial v_3} \right) - \right. \\ \left. - u_3 \left(a_{12}g_1 + \Delta_6 \frac{\partial g_1}{\partial v_2} - a_{13}v_2 \frac{\partial g_1}{\partial v_3} - a_{33} \frac{\partial L}{\partial v_2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$\Delta_3 = a_{13}v_1 - a_{11}v_3, \quad \Delta_4 = a_{11}v_2 - a_{12}v_1, \quad \Delta_5 = a_{22}v_1 - a_{12}v_2, \quad \Delta_6 = a_{13}v_3 - a_{33}v_1$$

$$u_2 = a_{33}v_2\varphi_2 + g_1v_3\Delta_2 + v_3\sqrt{\Delta}, \quad u_3 = a_{22}v_3\varphi_2 - g_1v_2\Delta_2 - v_2\sqrt{\Delta}$$

Можно убедиться, что если $g_1(v_1, v_2, v_3)$ удовлетворяет уравнению $\Delta = 0$, то равенство (3.8) выполняется. Для этого достаточно уравнение (3.8) при условии $\Delta = 0$ представить в виде

$$\frac{1}{\theta(v_1, v_2, v_3)} \frac{d\Delta}{dt} \Big|_{\Delta=0} = 0$$

Здесь

$$\theta(v_1, v_2, v_3) = \Delta_1^{-1} \{ g_1[(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)v_2^2 + 2a_{12}a_{13}v_2v_3 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)v_3^2 -$$

$$-(a_{12}a_{33}v_2 + a_{13}a_{22}v_3)v_1] - \varphi_2(a_{22}a_{33}v_1 - a_{12}a_{33}v_2 - a_{13}a_{22}v_3) \} \neq 0$$

в силу того, что v_1, v_2, v_3 не могут быть одновременно постоянными.

Вид уравнения (3.8) показывает, что при заданных функциях $L = L(v_1, v_2, v_3)$ $U = U(v_1, v_2, v_3)$ функция $\mu(v_1, v_2, v_3)$ при условии $\Delta \neq 0$ выражается через $g_1(v_1, v_2, v_3)$, $L(v_1, v_2, v_3)$, $U(v_1, v_2, v_3)$ и их производные. Это обстоятельство отличает рассматриваемый случай одного ИС от случая трех ИС [1], для которого функция $\mu(v_1, v_2, v_3)$ определена соотношением (2.3).

Однако и в случае исследования одного ИС имеет место скрытое при использовании (3.8) свойство (2.3). Если предположим, что $\Delta \neq 0$, то на основании равенств (3.5), (3.6) из уравнения (3.8) найдем соотношение (2.3). Из сказанного следует, что при исследовании одного ИС нулевого слоя необходимым условием его существования у уравнений (1.1), (1.2) является равенство

$$\left(\mu(v_1, v_2, v_3) - \frac{\partial g_1}{\partial v_1} - \frac{\partial g_2}{\partial v_2} - \frac{\partial g_3}{\partial v_3} \right) \Delta(v_1, v_2, v_3) = 0 \quad (3.9)$$

причем g_2, g_3 определяются равенствами (3.5). Итак, (2.3) – необходимое условие существования одного ИС (3.1), но только при $\Delta \neq 0$. При этом изучение ИС проведено с помощью первых интегралов.

Особый случай $\Delta = 0$, как уже отмечено, не дает условия, которые накладываются на функцию $\mu(v_1, v_2, v_3)$.

В рамках этого варианта можно показать, что уравнения для $\dot{x}_2, \dot{x}_3$ из (1.1) нельзя заменять интегралами (3.2), (3.3), и поэтому при $\Delta = 0$ необходимы дополнительные исследования. Однако, если формально следовать методу ИС [2], использующему первые интегралы, то нужно в качестве необходимого условия рассматривать равенство (3.9). В этом и состоит уточнение результатов Л.Н. Орешкиной [1] применительно к рассмотрению только одного ИС. Очевидно, что (2.3) – достаточное условие существования как и при изучении трех ИС [1], так и при исследовании одного ИС.

Замечание. Роль условия (2.3) при рассмотрении прямой и обратной задач для уравнений (1.1), (1.2) различна. Если заданы три ИС, то следуя предложенному ранее подходу [1], можно получить полное решение задачи (хотя и достаточно тривиальное). Когда исследуется одно ИС, а функции $L(v_1, v_2, v_3)$, $U(v_1, v_2, v_3)$ заданы, то для определения $\mu(v_1, v_2, v_3)$ или $g(v_1, v_2, v_3)$ при $\Delta \neq 0$ необходимо использовать уравнение (3.8), а уравнение (2.3) – лишь компактная запись уравнения (3.8) при наличии равенств (3.5). Однако и в этом случае условие (2.3) отражает свойство дифференциальных уравнений (1.1), (1.2), допускающих ИС (3.1) и его следствия – ИС (3.5).

Особый интерес представляет случай, для которого уравнения (1.1), (1.2) описывают классические задачи, т.е. случай $\mu \equiv 0$. Тогда условие (2.3) принимает вид

$$\frac{\partial g_1}{\partial v_1} + \frac{\partial g_2}{\partial v_2} + \frac{\partial g_3}{\partial v_3} = 0 \quad (3.10)$$

и может рассматриваться как условие существования у системы (1.1), (1.2) одного ИС нулевого слоя при использовании первых интегралов. При этом условие (3.10) выполняется для всех v_1, v_2, v_3 из R^3 и при его применении в интегралах энергии и площадей из (1.4) нельзя использовать соотношение $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$.

Чтобы это показать, рассмотрим уравнения (1.1), (1.2) при наличии условий

$$\mu(v_1, v_2, v_3) \equiv 0, \quad L(v_1, v_2, v_3) \equiv 0, \quad U(v_1, v_2, v_3) = \Gamma(e \cdot v), \quad \Gamma = \text{const}$$

$$e = (1, 0, 0), \quad a_{11} = a, \quad a_{22} = a_{33} = a_1, \quad a_{12} = b_1, \quad a_{13} = a_{23} = 0$$

Тогда уравнения движения таковы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -b_1 x_1 x_3, \quad \dot{x}_2 = (a - a_1) x_1 x_3 + b_1 x_2 x_3 - \Gamma v_3 \\ \dot{x}_3 &= -(a - a_1) x_1 x_2 + b_1 (x_1^2 - x_2^2) + \Gamma v_2 \\ \dot{v}_1 &= a_1 x_3 v_2 - (a_1 x_2 + b_1 x_1) v_3, \quad \dot{v}_2 = (a x_1 + b_1 x_2) v_3 - a_1 x_3 v_1 \\ \dot{v}_3 &= (a_1 x_2 + b_1 x_1) v_1 - (a x_1 + b_1 x_2) v_2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Выпишем интегралы уравнений (3.11)

$$\begin{aligned} v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 &= 1 \\ a x_1^2 + a_1 (x_2^2 + x_3^2) + 2b_1 x_1 x_2 - 2\Gamma v_1 &= 2E, \quad x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = k \end{aligned} \quad (3.12)$$

Уравнения (3.11) допускают известное ИС Гесса $x_1 = 0$ нулевого слоя.

Найдем x_2, x_3 из (3.12), полагая $x_1 = 0$

$$\begin{aligned} x_2 &= N_1^{-1} (k \sqrt{a_1} v_2 + v_3 \sqrt{N}), \quad x_3 = N_1^{-1} (k \sqrt{a_1} v_3 - v_2 \sqrt{N}) \\ N_1 &= \sqrt{a_1} (v_2^2 + v_3^2), \quad N = 2(v_2^2 + v_3^2)(\Gamma v_1 + E) - k^2 a_1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

На основании равенства $x_1 = 0$, и равенств (3.13) легко проверить справедливость равенства (3.10). Однако, если в соотношениях (3.13) положить $v_2^2 + v_3^2 = 1 - v_1^2$ и подставить это в (3.10), то получим выражение, отличное от нуля.

4. Исследование одного ИС без использования интегралов. Пусть (3.1) – ИС нулевого слоя без использования интегралов. Функции $L = L(v_1, v_2, v_3)$, $U = U(v_1, v_2, v_3)$ подлежат определению. Так как задано одно ИС, то эти функции нельзя определить из интегралов (1.4). Подставим выражение (3.1) в соотношения (1.3) и найденные ω_i и (3.1) внесем в уравнение (3.7). Требование выполнения полученного равенства для любых x_2 и x_3 приводит к условиям

$$a_{22} = a_{33}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{23} = 0 \quad (4.1)$$

$$a_{22} \left(v_3 \mu(v_1, v_2, v_3) + \frac{\partial L}{\partial v_3} \right) = a_{13} g_1 + a_{22} \left(v_3 \frac{\partial g_1}{\partial v_1} - v_1 \frac{\partial g_1}{\partial v_3} \right) \quad (4.2)$$

$$a_{22} \left(v_2 \mu(v_1, v_2, v_3) + \frac{\partial L}{\partial v_2} \right) = a_{13} \left(v_3 \frac{\partial g_1}{\partial v_2} - v_2 \frac{\partial g_1}{\partial v_3} \right) + a_{22} \left(v_2 \frac{\partial g_1}{\partial v_1} - v_1 \frac{\partial g_1}{\partial v_2} \right) \quad (4.3)$$

$$a_{22} \left(v_3 \frac{\partial U}{\partial v_2} - v_2 \frac{\partial U}{\partial v_3} \right) + (a_{11} a_{22} - a_{13}^2) \left(v_2 \frac{\partial g_1}{\partial v_3} - v_3 \frac{\partial g_1}{\partial v_2} \right) g_1 = 0 \quad (4.4)$$

Исключив из равенств (4.2), (4.3) функцию $\mu(v_1, v_2, v_3)$, имеем

$$a_{22} \left(v_3 \frac{\partial L}{\partial v_2} - v_2 \frac{\partial L}{\partial v_3} \right) + a_{13} v_2 g_1 + (a_{22} v_1 - a_{13} v_3) \left(v_3 \frac{\partial g_1}{\partial v_2} - v_2 \frac{\partial g_1}{\partial v_3} \right) = 0 \quad (4.5)$$

Для решения дифференциальных уравнений (4.4), (4.5) введем новые функции

$$\psi_1(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2}(a_{11}a_{22} - a_{13}^2)g_1^2(v_1, v_2, v_3) - a_{22}U(v_1, v_2, v_3) \quad (4.6)$$

$$\psi_2(v_1, v_2, v_3) = a_{22}L(v_1, v_2, v_3) + (a_{22}v_1 - a_{13}v_3)g_1(v_1, v_2, v_3)$$

Применяя общую теорию интегрирования уравнений в частных производных, из (4.4), (4.6), (4.2) имеем

$$U(v_1, v_2, v_3) = a_{22}^{-1} \left[\frac{1}{2}(a_{11}a_{22} - a_{13}^2)g_1^2(v_1, v_2, v_3) + \varphi(v_1, v_2^2 + v_3^2) \right] \quad (4.7)$$

$$L(v_1, v_2, v_3) = a_{22}^{-1} \left[(a_{13}v_3 - a_{22}v_1)g_1(v_1, v_2, v_3) - \Phi(v_1, v_2^2 + v_3^2) \right] \quad (4.8)$$

$$\mu(v_1, v_2, v_3) = a_{22}^{-1} \left(-2 \frac{\partial \Phi}{\partial (v_1^2 + v_2^2)} + a_{22} \frac{\partial g_1}{\partial v_1} - a_{13} \frac{\partial g_1}{\partial v_3} \right) \quad (4.9)$$

Здесь φ и Φ – произвольные функции, зависящие от v_1 и $v_2^2 + v_3^2$.

Условия (4.1) являются условиями Гесса для случая, когда центр масс тела лежит на первой координатной оси Ox_1 (O – неподвижная точка). В рассматриваемом случае в силу равенства $x_1 = g_1(v_1, v_2, v_3)$ эта координатная ось характеризуется тем свойством, что проекция вектора момента количества движения тела на эту ось – заданная функция компонент v_1, v_2, v_3 . Интересно проверить условие (2.3). Поскольку функции (4.7), (4.8) позволяют из (3.5) определить $x_2 = g_2(v_1, v_2, v_3)$ и $x_3 = g_3(v_1, v_2, v_3)$, то путем тождественных преобразований из (4.9) на основе (3.5) можно получить соотношение (2.3). Таким образом, это примечательное свойство имеет место и для ИС (3.1) нулевого слоя без использования интегралов.

Следует заметить, что полученный результат не тривиален, так как в динамике твердого тела известны случаи, когда ИС с различными свойствами (с различными слоями) дают совершенно разные результаты [7]. Например, в данном случае в отличие от результатов разд. 3 не возникает особый вариант $\Delta = 0$.

Соотношения (4.7), (4.8) представляют интерес потому, что они дают возможность получить решение задачи исследования одного ИС и построить функции (4.7), (4.8) совершенно по другому принципу, чем аналогичные функции по предложенному ранее методу [1]. Механическая реализация этих соотношений может быть установлена в классе полиномов по переменным v_1, v_2, v_3 .

5. Одно ИС общего вида. Обобщим результаты, полученные в разд. 3, на случай произвольного ИС (1.5), для которого выполняется условие

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \neq 0$$

Без ограничения общности из ИС (1.5) можно определить

$$x_1 = \psi(x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) \quad (5.1)$$

При подстановке выражения (5.1) в интегралы (1.4) получим два уравнения для определения x_2, x_3 в зависимости от переменных v_1, v_2, v_3 . Будем считать, что (5.1) – ИС нулевого слоя по терминологии П.В. Харламова [2], т.е. производная от функции $x_1 = \psi(x_2, x_3, v_1, v_2, v_3)$ в силу уравнений (1.1), (1.2) равна нулю на соотношении (5.1) в силу найденных из интегралов значений

$$x_2 = \theta_2(v_1, v_2, v_3), \quad x_3 = \theta_3(v_1, v_2, v_3)$$

Внесем x_2 и x_3 в ИС (5.1):

$$x_1 = \psi(\theta_2(v_1, v_2, v_3), \theta_3(v_1, v_2, v_3), v_1, v_2, v_3) = \theta_1(v_1, v_2, v_3) \quad (5.2)$$

Применяя изложенный выше подход, необходимое условие существования ИС (5.1) для уравнений (1.1), (1.2) получим в виде равенства

$$\left[(\bar{\omega}_3 v_2 - \bar{\omega}_2 v_3) - (\bar{\omega}_1 v_3 - \bar{\omega}_3 v_1) \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - (\bar{\omega}_2 v_1 - \bar{\omega}_1 v_2) \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right] \times \\ \times \left[\mu(v_1, v_2, v_3) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial v_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial v_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial v_1} + \frac{\partial \theta_2}{\partial v_2} + \frac{\partial \theta_3}{\partial v_3} \right) \right] = 0 \quad (5.3)$$

где в силу того, что $a_{ij} = a_{ji}$ ($i \neq j$),

$$\bar{\omega}_i = a_{i1}\theta_1(v_1, v_2, v_3) + a_{i2}\theta_2(v_1, v_2, v_3) + a_{i3}\theta_3(v_1, v_2, v_3), \quad i = 1, 2, 3$$

Исключая из рассмотрения особый случай, когда выражение в первых квадратных скобках в (5.3) равно нулю (аналог случая $\Delta = 0$, рассмотренного в разд. 3), из равенства (5.3) в силу (5.2) имеем

$$\mu(v_1, v_2, v_3) = \frac{\partial \theta_1}{\partial v_1} + \frac{\partial \theta_2}{\partial v_2} + \frac{\partial \theta_3}{\partial v_3} \quad (5.4)$$

Таким образом, при выполнении равенства (5.4) уравнения (1.1), (1.2) допускают ИС (5.1) нулевого слоя с использованием первых интегралов. Естественно на практике равенство (5.4) преобразовать к виду, в котором содержались бы явным образом функция (5.1), ее производные, а также заданные функции $L(v_1, v_2, v_3)$ и $U(v_1, v_2, v_3)$.

6. Заключение. Установленные выше результаты получены для ИС нулевого слоя. Невозможность прямого перенесения этих результатов на случай ИС других слоев рассмотрим на примере изучения ИС первого слоя без использования первых интегралов на этапе вычисления произвольных от ИС. Пусть в уравнениях (1.1), (1.2)

$$\mu(v_1, v_2, v_3) \equiv 0, \quad L = \lambda \cdot v - \frac{1}{2}(Bv \cdot v), \quad U = s \cdot v - \frac{1}{2}(Cv \cdot v)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $s = (s_1, s_2, s_3)$ – векторы с постоянными компонентами, B и C – постоянные симметричные матрицы третьего порядка. Зададим ИС этих уравнений в виде [8]

$$f = x_1 - b_1 v_1 - b_3 v_3 = 0 \quad (6.1)$$

(b_1, b_2 – постоянные). Параметры (1.1), (1.2) подчиним условиям

$$a_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad a_{ii} = a_i, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad B_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$s_1 = a_1 \lambda_3 b_3, \quad s_2 = a_2 \lambda_3 c_3, \quad s_3 = -a_1 b_1 \lambda_3$$

$$B_{11} = (a_2 a_3 - a_1 a_2 - a_1 a_3) b_1 a_2^{-1} a_3^{-1}, \quad B_{22} = (a_1 a_3 - a_1 a_2 - a_2 a_3) b_1 a_2^{-1} a_3^{-1}$$

$$B_{33} = (a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_2 a_3) b_1 a_2^{-1} a_3^{-1}$$

$$C_{12} = -a_1 a_2 b_3 c_3 a_3^{-1}, \quad C_{13} = (a_1 - a_3) a_1 b_1 b_3 a_3^{-1}$$

$$C_{23} = (a_2 - a_3) a_1 b_1 c_3 a_3^{-1}$$

$$C_{11} = C_{33} + a_2 c_3^2 + a_1 (a_3 - a_1) (b_3^2 - b_1^2) a_3^{-1}$$

$$C_{22} = C_{33} + a_1 b_3^2 + (a_3 - a_2) (a_2^2 c_3^2 - a_1^2 b_1^2) a_2^{-1} a_3^{-1}$$

где c_3 – произвольная постоянная. Вычислим производные от функции в левой части (6.1) в силу уравнений (1.1), (1.2) при указанных выше условиях, наложенных на правые части, и подставим в найденные уравнения значение x_1 из (6.1). Получим

$$\frac{df}{dt} = \varphi(x_2, v_2, v_3)\sigma(x_3, v_1, v_2, v_3), \quad \frac{d^2f}{dt^2} = \varphi(x_2, v_2, v_3)\frac{d\sigma}{dt}(x_3, v_1, v_2, v_3) \quad (6.2)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(x_2, v_2, v_3) &= x_2 - \frac{a_1 b_1}{a_2} v_2 - c_3 v_3 \\ \sigma(x_3, v_1, v_2, v_3) &= (a_3 - a_2)x_3 - a_2 \lambda_3 - \frac{a_1 a_2 b_3}{a_3} v_1 + \frac{a_3 - a_2}{a_3} (a_2 c_3 v_2 - a_1 b_3 v_3) \end{aligned}$$

Выражения (6.2) обращаются в нуль при выполнении условия

$$\varphi(x_2, v_2, v_3) = 0 \quad (6.3)$$

Уравнения (1.1), (1.2) на ИС (6.1) и (6.3) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} a_3 \dot{x}_3 &= (a_2 c_3 v_1 - a_1 b_3 v_2)[a_1 b_1 v_3 - a_3 \lambda_3 - (a_1 b_3 v_1 + a_2 c_3 v_2)] \\ \dot{v}_1 &= a_3 x_3 v_2 - (a_1 b_1 v_2 + a_3 c_3 v_3) v_3 \\ \dot{v}_2 &= -a_3 x_3 v_1 + a_1 (b_1 v_1 + b_3 v_3) v_3 \\ \dot{v}_3 &= (a_2 c_3 v_1 - a_1 b_3 v_2) v_3 \end{aligned} \quad (6.4)$$

и имеют первые интегралы

$$\begin{aligned} v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 &= 1 \\ x_3 &= \frac{1}{a_3} (l_0 v_3^{-1} + d_0 v_3) \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$(a_1 b_3 v_1 + a_2 c_3 v_2) v_3 + a_3 \lambda_3 v_3 + (d_0 - a_1 b_1) v_3^2 = l_0$$

где l_0, d_0 – произвольные постоянные. Поэтому задача интегрирования уравнений (6.4) сводится к квадратурам. Из соотношений (6.1), (6.3), (6.5) находим зависимости x_1, x_2, x_3 от v_1, v_2, v_3

$$x_1 = b_1 v_1 + b_3 v_3, \quad x_2 = \frac{1}{2} (a_1 b_1 v_2 + a_2 c_3 v_3), \quad x_3 = \frac{1}{a_3} (l_0 v_3^{-1} + d_0 v_3)$$

для которых условия (3.10) не выполняется.

Соотношение (6.1) – ИС первого слоя по терминологии П.В. Харламова [2], но не нулевого, как в разд. 2–5 настоящей работы. Таким образом, для ИС первого слоя при $\mu \equiv 0$ необходимы дополнительные исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орешкина Л.Н. Об уравнениях М.П. Харламова // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1987. Вып. 19. С. 30–33.
2. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1974. Вып. 6. С. 15–24.
3. Levi-Civita T., Amaldi U. Lezioni di Méccanica Razionale. Bkigba: Zanichelli, 1927. = Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. Т. 2. Ч. 2. 555 с.

4. *Poincaré H.* Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste. Paris: Ganthier-Villars, 1892. = *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
5. *Grioli G.* Questioni di dinamica del corpo rigido // Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. fis. e natur. 1963. 35. № 1–2. Р. 35–39.
6. *Харламов М.П.* Симметрия в системах с гироскопическими силами // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1983. Вып. 15. С. 87–93.
7. *Горр Г., Узбек Е.К.* К постановке задачи о решении уравнений Д. Гриоли – М.П. Харламова в специальной форме // Механика твердого тела. Киев: Ин-т прикл. мат. и мех. НАН Украина, 1997. Вып. 29. С. 133–139.
8. *Харламов П.В.* О решениях уравнений динамики твердого тела // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 567–572.

Донецк

Поступила в редакцию
25.X.1999