

УДК 62–50

© 2001 г. Ч. Ватанабе, С.А. Решмин, А.М. Тарасьев

**ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ИНВЕСТИЦИЙ
В НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ**

Рассматривается двумерная динамическая модель инновационного процесса, описывающая изменение объема производства и объема накопленных инвестиций. Управлением служит объем текущих инвестиций. В качестве критерия выбрана функция полезности в виде интеграла на полубесконечном интервале от логарифма индекса потребления с дисконтирующим множителем. Для решения задачи используется принцип максимума Понтрягина. Для системы исходных и сопряженных уравнений найден первый интеграл, после чего система сводится к редуцированной системе третьего порядка, имеющей блочную структуру. Найдено положение равновесия редуцированной системы. Доказано, что оно является седлом. Проведено качественное исследование траекторий в окрестности положения равновесия. Построено квазиоптимальное управление в форме синтеза. Предложена численная процедура построения квазиоптимального управления. Получена оценка вычисления максимального значения критерия. Проведено сравнение данных, полученных на основе предложенной модели, с агрегированными данными экономики Японии за 1960–1992 гг.

Рассматриваемая динамическая модель инновационного процесса предложена ранее [1]. Модель учитывает две основные тенденции: с одной стороны, технология (накопленные ежегодные инвестиции) стимулирует рост производства, с другой стороны, текущие инвестиции потребляют часть ресурсов из производственного сектора. Проблема заключается в поиске оптимального уровня инвестиций, который позволяет поддерживать баланс между двумя этими тенденциями, первая из которых обеспечивает эффект экономического роста, а вторая – фактор риска. Эффективность инвестиций характеризуется интегральной функцией полезности, зависящей от основных эконометрических показателей: производства, технологии и текущих инвестиций в развитие технологии.

Рассматриваемая проблема – классическая задача оптимального экономического роста [2–5]. При анализе модели используется теория, разработанная ранее [4]. Была исследована [6] обобщенная модель экономического роста для стран, способных импортировать технологию.

Ниже в отличие от упомянутых моделей исследуется оптимальная динамика роста производства в зависимости от текущих инвестиций в развитие технологии. Отметим, что влияние накопленной технологии на рост производства изучалось ранее [7]. При создании модели использовались также полученные ранее результаты [3, 8, 9].

В данной работе приводится численный алгоритм для нахождения оптимальных траекторий модели с любой заранее заданной точностью.

1. Описание модели. Рассматривается математическая модель роста производства и технологии [1], описываемая системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = f_1 + f_2 \left(\frac{T(t)}{y(t)} \right)^{\gamma} - g \frac{r(t)}{y(t)} \quad (1.1)$$

$$\dot{T}(t) = \frac{r(t - m) - \sigma T(t)}{1 - \sigma} \quad (1.2)$$

Здесь $y(t)$ – суммарное годовое производство (общий объем продукции промыш-

ленности или продукция отдельной отрасли, например обрабатывающей промышленности), $T(t)$ – аккумулярованная в производстве технология (может измеряться в денежных единицах, поскольку технологию можно продавать или покупать), $r(t)$ – текущий (годовой) объем инвестиций в развитие технологии, f_1 – эндогенная скорость роста производства (скорость роста производства без аккумулярования новых технологий), $f_2(T(t)/y(t))^\gamma$ – прирост скорости роста производства за счет аккумулярования новых технологий, $gr(t)/y(t)$ – фактор замедления скорости роста производства за счет оттягивания средств из производственного сектора, m – агрегированное время коммерциализации разработок, σ – коэффициент "устаревания" аккумулярованных технологий.

Дифференциальное уравнение (1.2) является непрерывным аналогом конечно-разностной формулы [10]

$$T(t) = r(t - m) + (1 - \sigma)T(t - 1)$$

При упрощенном анализе параметрами σ и m можно пренебречь и положить их равными нулю. В этом случае можно считать, что

$$\dot{T}(t) = r(t) \quad (1.3)$$

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $g(t)$ могут быть выражены через основные макроэкономические величины [1]. Далее будем полагать, что значения f_1, f_2, g постоянны.

Производство $y(t)$ и технология $T(t)$ – основные переменные модели. Текущие инвестиции $r(t)$ в развитие технологии заранее не фиксированы. Требуется найти оптимальный закон инвестиций $r(t)$ как функцию времени. В качестве критерия оптимальности принимается функция полезности U_{t_0} , представленная в виде интеграла с коэффициентом дисконта ρ [2–4]

$$W_{t_0} = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} \ln D(t) dt \quad (1.4)$$

Здесь $D(t)$ – индекс потребления, t – текущее время, t_0 – начальный момент времени, а бесконечный верхний предел интегрирования означает, что рассматривается долгосрочная перспектива развития.

Индекс потребления зададим в виде [4]

$$D = D(t) = \left(\int_0^n x^\alpha(j) dj \right)^{1/\alpha}, \quad n = n(t) \quad (1.5)$$

где $x(j)$ – количество изобретенного промышленного товара вида j , n – количество имеющихся (изобретенных) видов промышленных товаров, $0 < \alpha < 1$ – постоянный параметр эластичности, $1/(1 - \alpha) > 1$ – постоянная эластичность замещения между двумя различными видами товаров.

Сделаем упрощающее предположение о том, что величины $x(j)$ одинаковы для разных индексов j , т.е.

$$x(j) = y/n, \quad y = y(t), \quad n = n(t) \quad (1.6)$$

а количество изобретенных продуктов n зависит от накопленных инвестиций T и текущего изменения технологии r следующим образом:

$$n = n(t) = be^{\lambda t} T^{\beta_1} r^{\beta_2}, \quad T = T(t), \quad r = r(t) \quad (1.7)$$

Соотношения (1.6), (1.7) показывают, что n зависит от текущей активности инвесторов, характеризуемой значением r , и от величины накопленных в прошлом инвестиций в развитие технологии T . Кроме того, инновационный процесс n имеет тенденцию к затуханию, которая может быть выражена множителем $e^{\lambda t}$.

Комбинируя уравнения (1.4)–(1.7), получим выражение для функции полезности

$$W_{t_0} = U_{t_0} + A \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} (\kappa t + \ln b) dt$$

Здесь

$$U_{t_0} = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} (\ln y(t) + a_1 \ln T(t) + a_2 \ln r(t)) dt \quad (1.8)$$

$$a_1 = A\beta_1, \quad a_2 = A\beta_2, \quad A = 1/\alpha - 1$$

Второе слагаемое в выражении для функции полезности W_{t_0} не зависит от основных переменных модели y, T, r , и, следовательно, далее можно рассматривать функцию полезности U_{t_0} вместо функции полезности W_{t_0} , принимая во внимание, что

$$W_{t_0} = U_{t_0} + A\rho^{-1}[\kappa(t_0 + \rho^{-1}) + \ln b]$$

Структура функции полезности U_{t_0} (1.8) показывает, что инвесторы (правительство, финансовые группы) заинтересованы в росте производства y и в то же время – в росте объема накопленной технологии T и текущего изменения его r (изобретение новых товаров и т.п.).

2. Применение принципа максимума. Задача управления заключается в том, чтобы найти такой уровень роста технологии $r^0 = r^0(t)$ в классе кусочно-непрерывных функций $r(t)$, которому соответствуют оптимальное производство $y^0 = y^0(t)$ и оптимальная накопленная технология $T^0 = T^0(t)$, удовлетворяющие уравнениям (1.1), (1.3) и максимизирующие функцию полезности (1.8).

Рассматриваемая проблема (1.1), (1.3), (1.8) – классическая задача теории оптимального управления. Для ее решения можно использовать принцип максимума Л.С. Понтрягина [11]. Приложения этого принципа оптимальности к проблемам экономического роста были рассмотрены ранее [2–4].

Составим гамильтониан рассматриваемой задачи (1.1), (1.3), (1.8)

$$H(y, T, r, \psi_1, \psi_2) = \ln y + a_1 \ln T + a_2 \ln r + \psi_1 (f_1 y + f_2 T^\gamma y^{1-\gamma} - gr) + \psi_2 r \quad (2.1)$$

Подсчитывая максимум гамильтониана (2.1) по параметру r , получим, что максимальное значение достигается при оптимальной скорости роста технологии

$$r^0 = a_2 (g\psi_1 - \psi_2)^{-1} \quad (2.2)$$

Динамика сопряженных переменных ψ_1, ψ_2 описывается системой уравнений

$$\dot{\psi}_1 = \rho\psi_1 - \frac{\partial H}{\partial y} = \rho\psi_1 - \frac{1}{y} - (1-\gamma)\psi_1 f_2 T^\gamma \frac{1}{y^\gamma} - \psi_1 f_1 \quad (2.3)$$

$$\dot{\psi}_2 = \rho\psi_2 - \frac{\partial H}{\partial T} = \rho\psi_2 - a_1 \frac{1}{T} - \gamma\psi_1 f_2 y^{1-\gamma} \frac{1}{T^{1-\gamma}}$$

Комбинируя уравнения (1.1), (1.3), (2.2), (2.3), получим замкнутую систему

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}}{y} &= f_1 + f_2 \left(\frac{T}{y} \right)^\gamma - \frac{ga_2}{(g\psi_1 - \psi_2)y}, \quad \dot{T} = \frac{a_2}{g\psi_1 - \psi_2} \\ \frac{\dot{\psi}_1}{\psi_1} &= \rho - \frac{1}{\psi_1 y} - (1-\gamma)f_2 \left(\frac{T}{y} \right)^\gamma - f_1 \\ \frac{\dot{\psi}_2}{\psi_2} &= \rho - a_1 \frac{1}{\psi_2 T} - \gamma f_2 \frac{\psi_1 y}{\psi_2 T} \left(\frac{T}{y} \right)^\gamma \end{aligned} \quad (2.4)$$

Требуется найти решение системы (2.4), которое удовлетворяет условию трансверсальности принципа максимума

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} z(t) = 0 \quad (2.5)$$

причем функция z определяется соотношением

$$z = \psi_1 y + \psi_2 T \quad (2.6)$$

В разд. 3 для системы (2.4) найден первый интеграл (3.1), благодаря которому получена эквивалентная редуцированная система с разделяющимися переменными: $x_1 = y/T$, $x_2 = \psi_1 y$ в одном блоке и $x_3 = 1/T$ в другом. Приведены условия, при которых в редуцированной системе существует единственное положение равновесия

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0), \quad x_1^0 > 0, \quad x_2^0 > 0, \quad x_3^0 = 0$$

Затем в разд. 4 произведена оценка собственных значений и собственных векторов линеаризованной системы и показано, что положение x^0 – седло. В этом случае существуют траектории редуцированной системы, которые приводят ее к равновесию. Следовательно, существует решение системы (2.4), удовлетворяющее условию трансверсальности (2.5), (2.6).

В общем случае оптимальное управление u^0 имеет сложную структуру. В разд. 5 предложен квазиоптимальный синтез, который применим в малой окрестности положения x_1^0 , x_3^0 и обеспечивает требуемое (такое же как в оптимальном режиме) поведение системы (1.1), (1.3):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)/T(t) = x_1^0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} 1/T(t) = x_3^0$$

В разд. 6 предложен численный алгоритм для расчета траекторий, которые приводят редуцированную систему (3.5) в окрестность положения равновесия x^0 . В результате получено соответствующее программное управление для исходной системы. Это управление (рассчитанное на конечном отрезке времени) может быть использовано в комбинации с предложенным в разд. 5 квазиоптимальным синтезом, который действует на бесконечном интервале.

В разд. 7 произведена оценка погрешности вычисления максимального значения функционала (1.8), возникающая при использовании предложенного метода управления, и показано, что эта погрешность может быть сделана сколь угодно малой при надлежащем выборе размера окрестности положения равновесия x^0 .

В разд. 8 представлены результаты сопоставления оптимальных кривых, рассчитанных при некоторых параметрах модели, с реальными эконометрическими данными.

3. Существование равновесия и оптимального решения.

Утверждение 3.1. Система (2.4), описывающая оптимальную динамику, имеет первый интеграл

$$z = \psi_1 y + \psi_2 T = p^0 = (a_1 + a_2 + 1)/\rho \quad (3.1)$$

Доказательство. Дифференцируя функцию (2.6) в силу системы (2.4), получим дифференциальное уравнение, общее решение которого задается формулой

$$z(t) = Ce^{\rho t} + p^0 \quad (3.2)$$

Единственное решение типа (3.2), удовлетворяющее условию трансверсальности (2.5), есть постоянная функция $z = p^0$, т.е. когда постоянная C в (3.2) равна нулю и экспоненциальная часть отсутствует.

Сделаем замену переменных

$$x_1 = y/T, x_2 = \psi_1 y, x_3 = 1/T \quad (3.3)$$

и введем обозначение

$$u(x_1, x_2) = \frac{r^0}{y} = \frac{a_2}{(x_1 + g)x_2 - p^0 x_1}, \quad u(x_1, x_2) > 0 \quad (3.4)$$

Принимая во внимание первый интеграл (3.1), сведем исходную систему (2.4) к системе третьего порядка, имеющей блочную структуру,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1 x_1 + f_2 x_1^{1-\gamma} - (x_1 + g)x_1 u = F_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= \rho x_2 + \gamma f_2 x_2 x_1^{-\gamma} - 1 - g x_2 u = F_2(x_1, x_2) \\ \dot{x}_3 &= -x_1 x_3 u = F_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \quad (3.5)$$

При дальнейшем анализе будем полагать, что выполнены неравенства

$$0 \leq \gamma \leq 1, f_1 - \rho = v > 0 \quad (3.6)$$

Первое условие (3.6) означает умеренное влияние накопленной технологии T на скорость роста производства $\dot{y}$. Второе условие (3.6) означает, что эндогенная скорость роста производства f_1 строго больше коэффициента дисконта ρ .

Можно доказать (см. [1]), что только при этих условиях система (3.5) имеет стационарные точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$.

Утверждение 3.2. Пусть выполнены условия (3.6). Тогда система (3.5) имеет стационарные точки x^0 , обладающие следующими свойствами:

$$0 < r_1 < x_1^0 \leq z_1, \quad 0 \leq r_2 < x_2^0 \leq z_2 \quad (3.7)$$

$$(x_1^0 + g)x_2^0 - p^0 x_1^0 > 0, \quad x_3^0 = 0$$

Параметры r_1, z_1 – единственные положительные решения соответствующих уравнений

$$\frac{g}{r_1 + g} = \frac{\rho r_1^\gamma + \gamma f_2}{f_1 r_1^\gamma + f_2}, \quad \frac{p^0 g}{z_1 + g} = \frac{a_2 z_1^\gamma}{f_1 z_1^\gamma + f_2} \quad (3.8)$$

Параметры r_2 и z_2 определяются соотношениями

$$r_2 = p^0 \min \left\{ 1 - \gamma, 1 - \frac{a_1}{f_1 p^0 + 1} \right\}, \quad z_2 = p^0 \quad (3.9)$$

Если параметры модели γ и f_2 достаточно малы, т.е.

$$f_2 \gamma^2 \leq \frac{a_2}{p^0} \min \left\{ 1, \frac{g(a_1 + 1)}{a_2} \right\} \quad (3.10)$$

то точка x^0 единственна.

4. Качественный анализ положения равновесия. Для того чтобы установить свойства оптимального управления r^0 (2.2), исследуем устойчивость положения равновесия x^0 . Подсчитаем матрицу Якоби $DF = \{F_{ij}\}$ ($F_{ij} = \partial F_i / \partial x_j$, $i, j = 1, 2, 3$) правых частей системы (3.5). Для частных производных F_{ij} получим выражения

$$F_{1,1} = f_1 + (1 - \gamma)f_2 x_1^{-\gamma} - x_1 u + a_2^{-1} g x_2 (x_1 + g) u^2$$

$$\begin{aligned}
F_{1,2} &= a_2^{-1}(x_1 + g)^2 x_1 u^2, \quad F_{1,3} = 0 \\
F_{2,1} &= -\gamma^2 f_2 x_2 x_1^{-(1+\gamma)} - a_2^{-1} g x_2 (p^0 - x_2) u^2 \\
F_{2,2} &= \rho + \gamma f_2 x_1^{-\gamma} + a_2^{-1} g p^0 x_1 u^2, \quad F_{2,3} = 0 \\
F_{3,1} &= -a_2^{-1} g x_2 x_3 u^2, \quad F_{3,2} = a_2^{-1} (x_1 + g) x_1 x_3 u^2, \quad F_{3,3} = -x_1 u
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Определим знаки коэффициентов F_{ij} .

Утверждение 4.1. Коэффициенты F_{ij} матрицы Якоби DF в положении равновесия x^0 определяются выражениями ($F_{i,j}^0 = F_{i,j}(x^0)$)

$$\begin{aligned}
F_{1,1}^0 &= -\gamma f_2 x_1^{-\gamma} - \frac{g p^0 x_1 (f_1 x_1^\gamma + f_2)^2}{a_2 x_1^{2\gamma} (x_1 + g)^2} < 0 \\
F_{1,2}^0 &= \frac{x_1 (f_1 x_1^\gamma + f_2)^2}{a_2 x_1^{2\gamma}} > 0, \quad F_{1,3}^0 = 0 \\
F_{2,1}^0 &= -\gamma^2 f_2 x_2 x_1^{-(1+\gamma)} - \frac{g x_2 (p^0 - x_2) (f_1 x_1^\gamma + f_2)^2}{a_2 x_1^{2\gamma} (x_1 + g)^2} < 0 \\
F_{2,2}^0 &= \rho + \gamma f_2 x_1^{-\gamma} + \frac{g p^0 x_1 (f_1 x_1^\gamma + f_2)^2}{a_2 x_1^{2\gamma} (x_1 + g)^2} > 0 \\
F_{2,3}^0 &= F_{3,1}^0 = F_{3,2}^0 = 0 \\
F_{3,3}^0 &= -\frac{x_1^{1-\gamma} (f_1 x_1^\gamma + f_2)}{x_1 + g} < 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь $x_i = x_i^0$ ($i = 1, 2, 3$).

Доказательство. Выразим u из первого уравнения системы (3.5) при $\dot{x}_1 = 0$ и подставим его в выражения для частных производных (4.1). Принимая во внимание первое неравенство (3.7) и второе равенство (3.9), получим соотношения (4.2).

Используя утверждение 4.1, сформулируем следующее утверждение, касающееся собственных значений (СЗ) матрицы Якоби DF .

Утверждение 4.2. Матрица Якоби DF имеет хотя бы одно СЗ с положительной действительной частью, и, следовательно, положение равновесия x^0 неустойчиво.

Доказательство. Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка

$$D = \begin{vmatrix} F_{1,1}^0 & F_{1,2}^0 \\ F_{2,1}^0 & F_{2,2}^0 \end{vmatrix} \tag{4.3}$$

Блочная структура матрицы DF с элементами (4.2) означает, что в положении равновесия x^0 СЗ матрицы D являются СЗ матрицы DF .

В соответствии с соотношениями (4.2) след матрицы D (4.3) положителен. Из соответствующего неравенства следует, что хотя бы одно СЗ матрицы D и, следовательно, матрицы DF имеет положительную действительную часть.

Далее будем полагать, что дискриминант DI матрицы D отрицателен

$$DI = F_{1,1}^0 F_{2,2}^0 - F_{1,2}^0 F_{2,1}^0 < 0 \tag{4.4}$$

Ограничения на параметры рассматриваемой системы, при которых выполнено неравенство (4.4), найдены ранее [1].

Утверждение 4.3. Пусть выполнено неравенство (4.4). Тогда матрица Якоби DF имеет действительные собственные значения: одно положительное и два отрицательных. Следовательно, положение равновесия x^0 – седло.

Доказательство. Так как матрица DF имеет блочную структуру и содержит отрицательный диагональный элемент $F_{3,3}^0$, то по меньшей мере одно ее СЗ

$$\mu_3 = -\frac{x_1^{1-\gamma}(f_1 x_1^\gamma + f_2)}{x_1 + g} \quad (4.5)$$

действительно и отрицательно и соответствующий собственный вектор $h_3 = (0, 0, 1)$ – единичный вектор. Если выполнено неравенство (4.4), то существует одно положительное СЗ μ_1 и одно отрицательное СЗ μ_2 матрицы D .

Утверждение 4.4. Положительное СЗ μ_1 удовлетворяет условию

$$\mu_1 = \frac{\rho}{2} + \left(\frac{\rho^2}{4} + |DI| \right)^{1/2} > \rho \quad (4.6)$$

а отрицательное СЗ μ_2 может быть представлено в виде

$$\mu_2 = -(\mu_1 - \rho) < 0 \quad (4.7)$$

Утверждение 4.5. Собственные векторы h_1, h_2 , соответствующие СЗ μ_1, μ_2 , имеют положительные компоненты

$$h_1 = \frac{1}{n_1}(b, a + \mu_1, 0), \quad n_1 = (b^2 + (a + \mu_1)^2)^{1/2} \quad (4.8)$$

$$h_2 = \frac{1}{n_2}(a + \mu_1, c, 0), \quad n_2 = (c^2 + (a + \mu_1)^2)^{1/2} \quad (4.9)$$

Здесь

$$a = |F_{1,1}|, \quad b = F_{1,2}, \quad c = |F_{2,1}| \quad (4.10)$$

Если дискриминант DI отрицателен, то углы наклона

$$\varphi_i = \arctg \frac{h_i^2}{h_i^1}, \quad i = 1, 2 \quad (4.11)$$

собственных векторов $h_i (i = 1, 2)$ связаны между собой неравенствами

$$0 \leq \varphi_2 < \varphi_1 < \pi/2 \quad (4.12)$$

Доказательство. Подставляя положительное СЗ μ_1 (4.6) в уравнение для нахождения собственных векторов

$$\left\| \begin{array}{cc} \mu + a & -b \\ c & \mu - (\rho + a) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} h^1 \\ h^2 \end{array} \right\| = 0 \quad (4.13)$$

и рассматривая его первую строку с компонентами собственного вектора h_1

$$(\mu_1 + a)h_1^1 - bh_1^2 = 0 \quad (4.14)$$

получим выражение (4.8).

Аналогично, подставляя отрицательное СЗ μ_2 (4.7) в уравнение (4.13) и рассматривая его вторую строку с компонентами собственного вектора h_2

$$ch_2^1 + (\mu_2 - (\rho + a))h_2^2 = ch_2^1 - (\mu_1 + a)h_2^2 = 0 \quad (4.15)$$

получим соотношение (4.9).

Замечая, что дискриминант DI отрицателен:

$$DI = -a(\rho + a) + bc < 0$$

получим цепочку неравенств

$$0 > -a(\rho + a) + bc > -(\rho + a)^2 + bc > -(\mu_1 + a)^2 + bc$$

Последнее неравенство обеспечивает соотношение

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\mu_1 + a}{b} > \frac{c}{\mu_1 + a} = \operatorname{tg} \varphi_2 \quad (4.16)$$

из которого следует искомое соотношение для углов $\varphi_i (i = 1, 2)$ (4.12).

Рассмотрим систему, полученную в результате линеаризации системы (3.5) в окрестности стационарной точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0, 0)$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_{1,1}^0(x_1 - x_1^0) + F_{1,2}^0(x_2 - x_2^0) \\ \dot{x}_2 &= F_{2,1}^0(x_1 - x_1^0) + F_{2,2}^0(x_2 - x_2^0) \\ \dot{x}_3 &= F_{3,3}^0 x_3 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Суммируя свойства матрицы Якоби, отраженные в утверждениях 4.1–4.5, можно получить следующие свойства линейной системы (4.17).

Утверждение 4.6. Пусть выполнены условия (3.6), (3.10), (4.4). Тогда линейная система (4.17) имеет следующие свойства.

1°. Положение равновесия x^0 – единственно и является седлом.

2°. Для любой пары x_1^*, x_3^* существует единственное значение x_2^* , такое что начальная точка $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ лежит в плоскости, порожденной собственными векторами h_2, h_3 , которые соответствуют отрицательным собственным значениям μ_2, μ_3 . Траектория $x^*(\cdot)$ линейной системы (4.17), которая начинается в точке x^* , стремится к точке равновесия x^0 .

3°. Вторая компонента $x_2(\cdot)$ других траекторий $x(\cdot)$, начинающихся в точках $x = (x_1^*, x_2, x_3^*)$, $x_2 \neq x_2^*$, стремится к бесконечности со скоростью экспоненциальной функции с показателем роста $\mu_1 > \rho$

$$x_2(t) \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty \quad (4.18)$$

Доказательство. Свойство 1° вытекает из утверждений 3.2 и 4.3. Свойство 2° следует из того факта, что первая компонента h_2^1 собственного вектора h_2 и третья компонента h_3^3 собственного вектора h_3 строго положительны, и, следовательно, плоскость, порожденная первой и третьей компонентами x_1, x_3 , может быть ортогонально проецирована на плоскость, порожденную собственными векторами h_2, h_3 .

Свойство 3° следует из неустойчивости равновесия x^0 и свойства положительного собственного значения $\mu_1 > \rho$ (4.6).

Далее свойства 1°–3° линейной системы (4.17) используются при изучении свойств оптимальных траекторий нелинейной системы (3.5). Согласно теореме Гробмана – Хартмана [12], нелинейная система (3.5), так же как и линейная система (4.17), допускает траектории, стремящиеся к равновесию x^0 .

Утверждение 4.7. Нелинейная система (3.5) наследует свойства сходимости решения к положению равновесия, присущие линейной системе (4.17), т.е. существуют траектории $x^0(\cdot)$, которые приводят нелинейную систему (3.5) из начального состояния x^* в положение равновесия x^0

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i^0(t) = x_i^0, \quad x_i^0(t_0) = x_i^*, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.19)$$

Только такие траектории удовлетворяют условиям (2.4) принципа максимума и условиям трансверсальности (2.5) и являются оптимальными.

Опишем теперь поведение оптимальной траектории $x^0(\cdot)$ в окрестности положения равновесия x^0 нелинейной системы (3.5). Третья компонента $x_3^0(\cdot) = 1/T^0$ стремится к нулю $x_3^0 = 0$ (3.7) с отрицательной скоростью (3.5), поэтому величина накопленной технологии $T^0 = T^0(t)$ монотонно растет до бесконечности.

Первая компонента $x_1^0(\cdot) = y^0/T^0$ стремится к положительному равновесному значению $x_1^0 > 0$ (3.7). Следовательно, величина производства $y^0 = y^0(t)$ также растет до бесконечности, причем с таким же асимптотическим показателем роста, как и технология T^0 и, кроме того, ее производная (2.4) строго положительна $\dot{y}^0(t) > 0, \quad t \geq t_0$.

Если в начале процесса управления значение $x_1^* = y^0(t_0)/T^0(t_0)$ превосходит равновесное $x_1^0, x_1^0 \leq x_1^*$, то оптимальное отношение $x_1^0(t) = y^0(t)/T^0(t)$ уменьшается от начального значения x_1^* до равновесного x_1^0 . Это значит, что относительная скорость роста накопленной технологии T^0 выше относительной скорости роста производства y^0 .

5. Квазиоптимальный синтез в окрестности точки (x_1^0, x_3^0) . Следует отметить, что проблема поиска оптимальной траектории $x^0(\cdot)$, приводящей систему (3.5) в положение равновесия x^0 , достаточно сложна из-за его неустойчивости. Построим квазиоптимальное управление в форме синтеза, которое приводит новые координаты $x_1(\cdot), x_3(\cdot)$ системы в положение x_1^0, x_3^0 . Для этого рассмотрим линейный закон изменения второй координаты $x_2(\cdot)$ в первом и третьем уравнениях (3.5)

$$x_2 = x_2^0 + \omega(x_1 - x_1^0), \quad \omega \geq 0 \quad (5.1)$$

$$\dot{x}_1 = f_1 x_1 + f_2 x_1^{1-\gamma} - (x_1 + g)x_1 u^*(x_1), \quad \dot{x}_3 = -x_1 x_3 u^*(x_1) \quad (5.2)$$

$$x_1(t_0) = x_1^*, \quad x_3(t_0) = x_3^*$$

Функция

$$u^*(x_1) = a_2(d + k(\omega)(x_1 - x_1^0) + \omega(x_1 - x_1^0)^2)^{-1}$$

получена при подстановке выражения (5.1) в (3.4). Параметры d, k определяются соотношениями

$$d = g x_2^0 - (p^0 - x_2^0)x_1^0, \quad k = k(\omega) = k_1 \omega + k_2 \quad (5.3)$$

$$k_1 = x_1^0 + g, \quad k_2 = -(p^0 - x_2^0)$$

а начальные значения x_1^*, x_3^* должны удовлетворять условиям

$$x_1^0 \leq x_1^* < x_1^0 + \bar{x}_1(\omega), \quad x_3^* > 0 \quad (5.4)$$

причем

$$\bar{x}_1(\omega) = \begin{cases} 2d / (|k(\omega)| + \xi^{1/2}), & \xi \geq 0 \\ +\infty, & \xi < 0 \end{cases}, \quad \xi = k^2(\omega) - 4\omega d \quad (5.5)$$

Используя формулы для новых переменных (3.3), получим соответствующий закон управления по обратной связи $r = r(y, T)$ для исходной системы (1.1), (1.3)

$$r^* = \dot{T} = -x_3^{-2} \dot{x}_3 = x_1 x_3^{-1} u^*(x_1) = y u^*(y/T) \quad (5.6)$$

Сформулируем условия, при которых устойчива система (5.2).

Утверждение 5.1. Допустим, что коэффициент ω в (5.1) удовлетворяет условиям

$$0 \leq \omega \leq \frac{gp^0}{(x_1^0 + g)^2} = \omega_1 \quad (5.7)$$

Тогда квазиоптимальный синтез r^* (5.6) приводит траектории $x^*(\cdot)$ системы (5.2) из начального состояния x_1^*, x_3^* (5.4) в положение равновесия x_1^0, x_3^0 .

Доказательство. Сходимость $x_1^*(\cdot)$ к равновесному значению x_1^0 следует из свойства асимптотической устойчивости – соответствующая полная производная должна иметь отрицательный знак

$$\frac{dF_1(x^0)}{dx_1} < 0 \quad (5.8)$$

Учитывая соотношения (4.2) для частных производных $F_{1,i}^0$ и линейную зависимость (5.1) координат x_i ($i = 1, 2$), получим

$$\frac{dF_1(x^0)}{dx_1} = F_{1,1}^0 + F_{1,2}^0 \omega = -\gamma f_2 x_1^{-\gamma} - \frac{x_1 (f_1 x_1^\gamma + f_2)^2}{a_2 x_1^{2\gamma} (x_1 + g)^2} (gp^0 - (x_1 + g)^2 \omega) \quad (5.9)$$

Очевидно, что при условиях (5.7) $dF_1/dx_1 < 0$, что обеспечивает требуемую асимптотическую устойчивость.

Соотношения

$$F_{3,1}^0 = 0, \quad F_{3,3}^0 < 0 \quad (5.10)$$

представляют собой условия асимптотической устойчивости для третьего уравнения системы (3.5) и гарантируют приведение третьей компоненты $x_3^*(\cdot)$ в нуль.

Рассмотрим естественную ситуацию, когда в качестве параметра ω в законе управления (5.6) выбран тангенс угла наклона ω_0 собственного вектора h_2 (4.9) матрицы Якоби D (4.3), который соответствует отрицательному собственному значению μ_2 (4.7)

$$\omega_0 = \frac{a + \mu_2}{b} = \frac{a + \rho - \mu_1}{b} = \frac{c}{a + \mu_1} \quad (5.11)$$

Утверждение 5.2. Тангенс угла наклона ω_0 (5.11) собственного вектора h_2 (4.9), соответствующего отрицательному собственному значению μ_2 (4.7), удовлетворяет соотношениям

$$0 \leq \omega_0 < \omega_1 \quad (5.12)$$

и, следовательно, квазиоптимальный синтез $r^* = r^*(\omega_0)$ (5.6) с коэффициентом ω_0 приводит траектории $x^*(\cdot)$ из начального состояния x_1^*, x_3^* в равновесие x_1^0, x_3^0 .

Доказательство. Принимая во внимание соотношение (4.6), получим следующую последовательность неравенств:

$$\omega_1 = \frac{a}{b} > \frac{a}{b} - \frac{\mu_1 - \rho}{b} = \frac{a + \rho - \mu_1}{b} = \omega_0 = \frac{c}{a + \mu_1} \geq 0$$

Наконец, отметим некоторые свойства квазиоптимальных траекторий $x^*(\cdot)$, приводящих систему в положение равновесия x^0 . Более полное исследование поведения рассматриваемой системы при использовании квазиоптимального синтеза r^* (5.6) дано в [1].

Замечания. 1°. В квазиоптимальном режиме третья компонента $x_3^*(\cdot) = 1/T^*$ стремится к нулю с отрицательной скоростью (5.10). Отсюда следует, что величина накопленной технологии T^* монотонно возрастает до бесконечности со скоростью экспоненциальной функции с показателем $|\mu_3| > f_1 - \rho > 0$ (4.5).

Первая компонента $x_1^*(\cdot) = y^*/T^*$ стремится к положительному равновесному значению $x_1^0 > 0$. Таким образом, величина производства y^* также стремится к бесконечности с таким же асимптотическим показателем роста, как и технология T^* .

Если в начале процесса управления отношение x_1^* производства y^* к технологии T^* превосходит равновесное значение x_1^0 , т.е.

$$x_1^0 \leq x_1^* < \frac{g x_2^0}{p^0 - x_2^0} \quad (5.13)$$

то квазиоптимальное отношение $x_1^*(\cdot) = y^*/T^*$ уменьшается от начального значения x_1^* до равновесного x_1^0 . Это значит, что в этом случае относительная скорость роста накопленной технологии T^* выше относительной скорости роста производства y^* .

2°. В выражении (5.6) функция $u^*(y/T)$ стремится к положительному постоянному значению при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, величина инвестиций в квазиоптимальном режиме r^* (5.6) также стремится к бесконечности с таким же асимптотическим показателем роста, как и производство y^* и технология T^* .

6. Численный алгоритм для нахождения квазиоптимального управления. Приведем конструктивную численную процедуру для нахождения квазиоптимального управления, которое приближает оптимальное с любой заранее заданной точностью. Соответствующая погрешность при вычислении функционала приведена в разд. 7. Процесс нахождения квазиоптимального управления состоит из двух основных этапов. На первом этапе находится траектория редуцированной системы (3.5), которая попадает в окрестность положения равновесия x^0 (траектория рассчитывается на конечном отрезке времени). Соответствующие управление и траектория для исходной системы определяются согласно (3.3). На втором этапе применяется синтез управления (5.6) (см. разд. 5), который приводит систему (3.5) в положение x_1^0, x_3^0 .

Предположим, что все параметры модели, начальный момент времени t_0 , соответствующие начальные значения производства $y(t_0)$ и технологии $T(t_0)$ зафиксированы и, кроме того, задан достаточно малый параметр ε , определяющий точность алгоритма. Тогда координаты x_1^0, x_2^0 положения равновесия системы (3.5) находятся из системы равенств $F_1(x_1, x_2) = 0, F_2(x_1, x_2) = 0$.

Рассмотрим ε -окрестность точки (x_1^0, x_2^0) в плоскости (x_1, x_2) (фиг. 1). Далее поведение переменных x_1, x_2 будет исследовано отдельно от x_3 , поскольку система (3.5)

имеет блочную структуру. В ε -окрестности зафиксируем некоторую точку (x_1^*, x_2^*) , лежащую на луче, начинающемся в (x_1^0, x_2^0) и имеющем угол наклона, тангенс которого ω удовлетворяет неравенству (5.7). В частности, этот луч может быть параллелен собственному вектору, соответствующему отрицательному собственному значению матрицы Якоби D .

Опишем алгоритм расчета траектории системы (3.5), проходящей в момент времени $t^* > t_0$ через точку $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, где

значения t^* , x_3^* не фиксированы и будут определены позднее. Эта процедура может быть разбита на несколько шагов. Сначала рассматриваем значения $x_1 = x_1^*$, $x_2 = x_2^*$ как конечные и интегрируем систему первых двух уравнений в (3.5) в обратном времени до тех пор, пока не окажется выполненным равенство $x_1(t) = x_1(t_0) = y(t_0)/T(t_0)$; это условие определяет отрезок времени $t_0 \leq t \leq t^*$, на котором производится расчет. В результате находим функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$, ($t_0 \leq t \leq t^*$). Затем подставляем $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в третье уравнение в (3.5) и интегрируем его в прямом времени с начальным условием $x_3(t_0) = 1/T(t_0)$. В результате находим функцию $x_3(t)$ и конечное значение $x_3^* = x_3(t^*)$. В соответствии с (3.3) получим также значения технологии $T(t) = 1/x_3(t)$, производства $y(t) = x_1(t)/x_3(t)$ и инвестиций $r = \dot{T}$. Фиг. 1 иллюстрирует работу алгоритма. Стрелка, направленная вправо, символизирует интегрирование в обратном времени, а направленная влево – интегрирование в прямом времени.

Покажем теперь, что координата x_1 всегда достигает своего начального значения $x_1(t_0)$ при интегрировании в обратном времени, если параметры системы удовлетворяют следующим ограничениям:

$$x_1^0 < x_1(t_0) < \left(\frac{gf_1}{\gamma^2 f_2} \right)^{1/(1-\gamma)}, \quad x_2^0 > \frac{1}{f_1} \quad (6.1)$$

Условия (6.1) являются достаточными для успешной работы приведенного алгоритма.

Согласно уравнениям (3.5), имеем следующие соотношения, которые будут использованы далее:

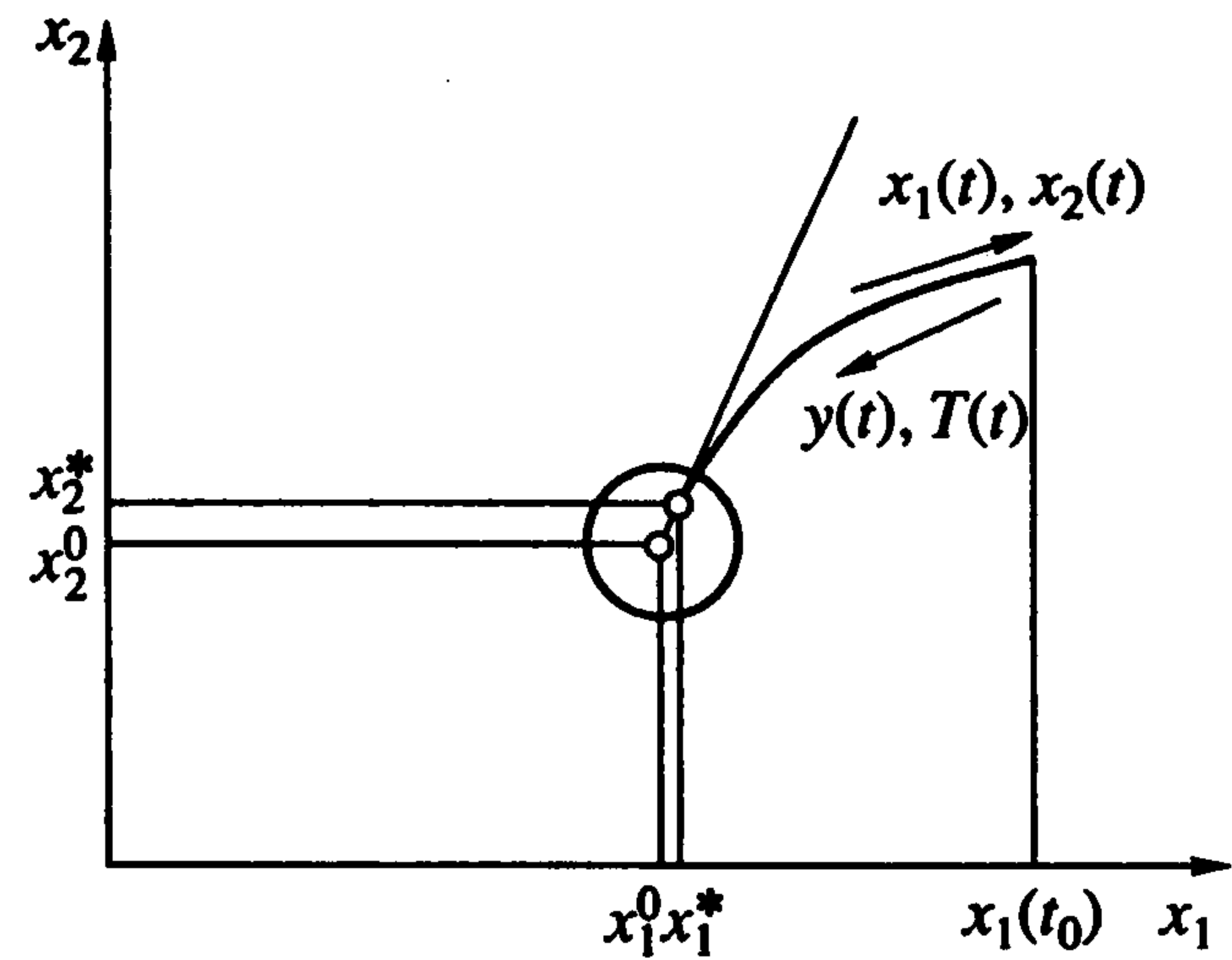
$$\ddot{x}_1 = \frac{\dot{x}_1^2}{x_1} + x_1 \left(\frac{\dot{x}_1}{x_1} \right)' = \frac{\dot{x}_1^2}{x_1} - (\gamma f_2 x_1^{-\gamma} + x_1 u) \dot{x}_1 - x_1 (x_1 + g) \dot{u} \quad (6.2)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{\dot{x}_2^2}{x_2} + x_2 \left(\frac{\dot{x}_2}{x_2} \right)' = \frac{\dot{x}_2^2}{x_2} - \gamma^2 f_2 x_2 x_1^{-(\gamma+1)} \dot{x}_1 - x_2 g \dot{u} + \frac{\dot{x}_2}{x_2} \quad (6.3)$$

$$\frac{\dot{x}_2}{x_2} = \frac{g}{x_1 + g} \frac{\dot{x}_1}{x_1} + F(x_1, x_2) \quad (6.4)$$

$$F(x_1, x_2) = -\frac{g(f_1 + f_2 x_1^{-\gamma})}{x_1 + g} + \rho + \gamma f_2 x_1^{-\gamma} - \frac{1}{x_2}$$

Сделаем сначала предположение (оно будет доказано ниже), что при расчете квазиоптимальной траектории во все моменты времени t , $t_0 \leq t \leq t^*$, выполняются



Фиг. 1

условия $\ddot{x}_1(t) > 0$ и $\ddot{x}_2(t) > 0$. Тогда очевидно, что $\dot{x}_1(t) < 0$, $\dot{x}_2(t) < 0$ и координата x_1 достигает своего начального значения $x_1(t_0)$. В результате используемый численный алгоритм находит квазиоптимальную траекторию.

Получим выражение для производной функции u по времени t

$$\dot{u} = -\frac{u^2}{a_2} \left[(x_2 - p^0) \dot{x}_1 + (x_1 + g) \dot{x}_2 \right] \quad (6.5)$$

Используя условие $x_2 - p^0 > -gx_2/x_1$, следующее из (3.4), и равенство (6.4), получим оценку, которая выполняется при расчете траектории, попадающей в окрестность положения равновесия,

$$\begin{aligned} \dot{u} &< -\frac{u^2}{a_2} \left[-gx_2 \frac{\dot{x}_1}{x_1} + (x_1 + g) \dot{x}_2 \right] = \\ &= -\frac{u^2 (x_1 + g) x_2}{a_2} \left[\frac{\dot{x}_2}{x_2} - \frac{g}{x_1 + g} \frac{\dot{x}_1}{x_1} \right] = -\frac{u^2 (x_1 + g) x_2}{a_2} F(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Покажем, что функция $F(x_1, x_2)$, введенная ранее в (6.4), положительна. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= \frac{g \gamma f_2 x_1^{-(1+\gamma)}}{x_1 + g} + \frac{g(f_1 + f_2 x_1^{-\gamma})}{(x_1 + g)^2} - \gamma^2 f_2 x_1^{-(1+\gamma)} = \\ &= \frac{g f_1 + f_2 x_1^{-(1+\gamma)} (-\gamma^2 x_1^2 + g x_1 (1 + \gamma - 2\gamma^2) + g^2 \gamma (1 - \gamma))}{(x_1 + g)^2} \geq \\ &\geq \frac{g f_1 - \gamma^2 f_2 x_1^{1-\gamma}}{(x_1 + g)^2} > \frac{g f_1 - \gamma^2 f_2 (x_1(t_0))^{1-\gamma}}{(x_1 + g)^2} > 0 \\ \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= \frac{1}{x_2^2} > 0 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\dot{F} = \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} \dot{x}_2 < 0$$

Кроме того, в силу (6.4) выполняется равенство $F(x_1^0, x_2^0) = 0$. Поэтому при работе алгоритма $F(x_1, x_2) > 0$ и согласно (6.6) $\dot{u} < 0$, а из (6.2) следует, что $\ddot{x}_1(t) > 0$.

Докажем теперь, что $\ddot{x}_2(t) > 0$. Используя неравенство

$$\frac{\dot{x}_2}{x_2} > \frac{g}{x_1 + g} \frac{\dot{x}_1}{x_1}$$

которое следует из (6.4) при $F(x_1, x_2) > 0$, и выражение (6.3), получим

$$\ddot{x}_2 > \frac{\dot{x}_2^2}{x_2} + \left(\frac{g}{x_1 + g} - \gamma^2 f_2 x_2 x_1^{-\gamma} \right) \frac{\dot{x}_1}{x_1} - x_2 g \dot{u} > 0 \quad (6.7)$$

Здесь использовался тот факт, что при введенных ранее ограничениях (6.1) выраже-

ние, взятое в скобки в формуле (6.7), отрицательно

$$\begin{aligned} \frac{g}{x_1 + g} - \gamma^2 f_2 x_2 x_1^{-\gamma} &= x_1^{-\gamma} \left(\frac{g x_1^\gamma}{x_1 + g} - \gamma^2 f_2 x_2 \right) < \\ < x_1^{-\gamma} \left[g x_1 (t_0)^{-(1-\gamma)} - \gamma^2 f_2 x_2^0 \right] &= x_1^{-\gamma} \left[g \left(\frac{\gamma^2 f_2}{g f_1} \right) - \gamma^2 f_2 x_2^0 \right] < 0 \end{aligned}$$

Итак, доказана гарантированная работа численного алгоритма при ограничениях (6.1) и показано, что при $t_0 \leq t \leq t^*$ имеют место неравенства

$$\ddot{x}_1(t) > 0, \quad \dot{x}_1(t) < 0, \quad \ddot{x}_2(t) > 0, \quad \dot{x}_2(t) < 0, \quad \dot{u}(t) < 0$$

7. Оценка точности алгоритма. В этом разделе получена аналитическая оценка погрешности вычисления максимального значения функции полезности, возникающая в результате использования предложенного квазиоптимального управления.

Подставим выражение для оптимального закона управления (2.2) в функционал (1.8). Тогда в соответствии с (3.3), (2.6) получим

$$U_{t_0} = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} [(1+a_2) \ln x_1 + a_2 \ln u] dt + \eta \quad (7.1)$$

$$\eta = -p_0 \rho \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} \ln x_3 dt$$

Учитывая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x_3}{e^{\rho(t-t_0)}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\ln x_3)'}{(e^{\rho(t-t_0)})'} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-x_3 u e^{-\rho(t-t_0)}}{\rho} = 0$$

перепишем последнее слагаемое в (7.1) в виде

$$\begin{aligned} \eta &= p^0 e^{-\rho(t-t_0)} \ln x_3 \Big|_{t_0}^{\infty} - p^0 \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} \frac{\dot{x}_3}{x_3} dt = \\ &= -p^0 \ln x_3(t_0) + p^0 \int_{t_0}^{\infty} x_1 u e^{-\rho(t-t_0)} dt \end{aligned}$$

Теперь очевидно, что ошибка вычисления максимального значения функционала (7.1) связана исключительно с точностью определения функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ на временных интервалах (t_0, t^*) , (t^*, ∞) . Отметим, что в формуле (7.1) верхний предел интегрирования можно положить равным t^* и затем значение полученного интеграла найти численно. Дополнительную величину

$$U_{t^*} = \int_{t^*}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} [(1+a_2) \ln x_1 + a_2 \ln u + p^0 x_1 u] dt \quad (7.2)$$

которая давала бы вклад в интеграл (7.1) на интервале (t^*, ∞) , но была отброшена при изменении предела интегрирования, можно оценить. Возникает вопрос: как выбрать параметр ε , задающий размеры окрестности положения равновесия, если задана допустимая погрешность Δ_{t_0} вычисления функционала U_{t_0} ?

Далее рассматриваем две вспомогательные задачи.

Задача 1. Определить погрешность вычисления функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ на временном интервале (t_0, t^*) и связанную с этим погрешность вычисления функционала (7.1).

Решение. Оценим сначала длительность $t_0 - t^*$ процесса интегрирования в обратном времени. Используя соотношения (3.5), (6.2), (6.6), получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &> -(\gamma f_2 x_1^{-\gamma} + x_1 u) \dot{x}_1 - x_1(x_1 + g) \dot{u} = G(x_1, x_2) > G(x_1^*, x_2^*) = \\ &= \frac{\partial G(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \delta x_1(t^*) + \frac{\partial G(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \delta x_2(t^*) = C\epsilon \end{aligned} \quad (7.3)$$

Здесь введено обозначение

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= -(\gamma f_2 x_1^{1-\gamma} + x_1^2 u) \left(f_1 + f_2 x_1^{-\gamma} - (x_1 + g) u \right) + \\ &+ x_1 \frac{u^2 (x_1 + g)^2 x_2}{a_2} F(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Таким образом, имеем оценку

$$t^* - t_0 < \left[\frac{2(x_1(t_0) - x_1^0)}{C\epsilon} \right]^{1/2} \quad (7.4)$$

Интегрирование первых двух уравнений редуцированной системы (3.5) в обратном времени в силу теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных [13] приводит к ошибке порядка $\epsilon^{1/2}$ в определении $x_1(t)$, $x_2(t)$ на интервале $t_0 < t < t^*$, что в свою очередь дает ошибку при вычислении функционала (7.1) $C_1 \epsilon^{1/2} (1 - e^{-\rho(t_0 - t^*)})$ (непосредственное значение константы C_1 определяется параметрами системы).

Задача 2. Пусть для любого $t > t^* > t_0$ функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ представимы в виде

$$x_1(t) = x_1^0 + \delta x_1(t), \quad x_2(t) = x_2^0 + \delta x_2(t) \quad (7.5)$$

Здесь x_1^0 , x_2^0 — задают положение равновесия системы (3.5), а величины $\delta x_1(t)$, $\delta x_2(t)$ достаточно малы так, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = x_1^0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = x_2^0$$

(эти условия выполнены, если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ изменяются в соответствии с оптимальным законом или квазиоптимальным законом (5.6)). Требуется оценить значение функционала (7.2).

Решение. Предположим, что для любого $t > t^*$ выполнены ограничения

$$|\delta x_1| < \Delta_1 \sim \epsilon, \quad |\delta x_2| < \Delta_2 \sim \epsilon \quad (7.6)$$

где Δ_1 , Δ_2 — некоторые постоянные. Подставим выражения (7.5) в (7.2):

$$U_{t^*} = \frac{e^{-\rho(t^* - t_0)}}{\rho} \left[(1 + a_2) \ln x_1^0 + a_2 \ln u(x_1^0, x_2^0) + \rho^0 x_1^0 u(x_1^0, x_2^0) \right] + \Delta \quad (7.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_{t^*}^{\infty} e^{-\rho(t - t_0)} \left[\rho^0 a_2^{-1} x_2^0 u^2 \left(g \delta x_1 - (x_1^0 + g) \delta x_2 \right) + \right. \\ &\left. + (1 + a_2) \frac{\delta x_1}{x_1^0} - a_2 u \left((x_2^0 - \rho^0) \delta x_1 + (x_1^0 + g) \delta x_2 \right) \right] dt + o(\epsilon) \end{aligned} \quad (7.8)$$

Используя неравенства (7.6), получим

$$|\Delta| < \frac{e^{-\rho(t^* - t_0)}}{\rho} \left[p^0 a_2^{-1} x_2^0 u^2 (g \Delta_1 + (x_1^0 + g) \Delta_2) + (1 + a_2) \frac{\Delta_1}{x_1^0} + \right. \\ \left. + a_2 u ((p^0 - x_2^0) \Delta_1 + (x_1^0 + g) \Delta_2) \right] + o(\varepsilon) = C_2 \varepsilon e^{-\rho(t^* - t_0)} + o(\varepsilon) \quad (7.9)$$

Согласно соотношению (7.9), абсолютное значение Δ становится бесконечно малым при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, получили следующий результат: если $\varepsilon \rightarrow 0$, то при квазиоптимальном законе управления (5.6) значение функционала U_* стремится к постоянной, определяемой первым слагаемым выражения (7.7).

Суммируя оценки погрешностей, полученные при решении задач 1, 2, получим трансцендентное уравнение для нахождения ε

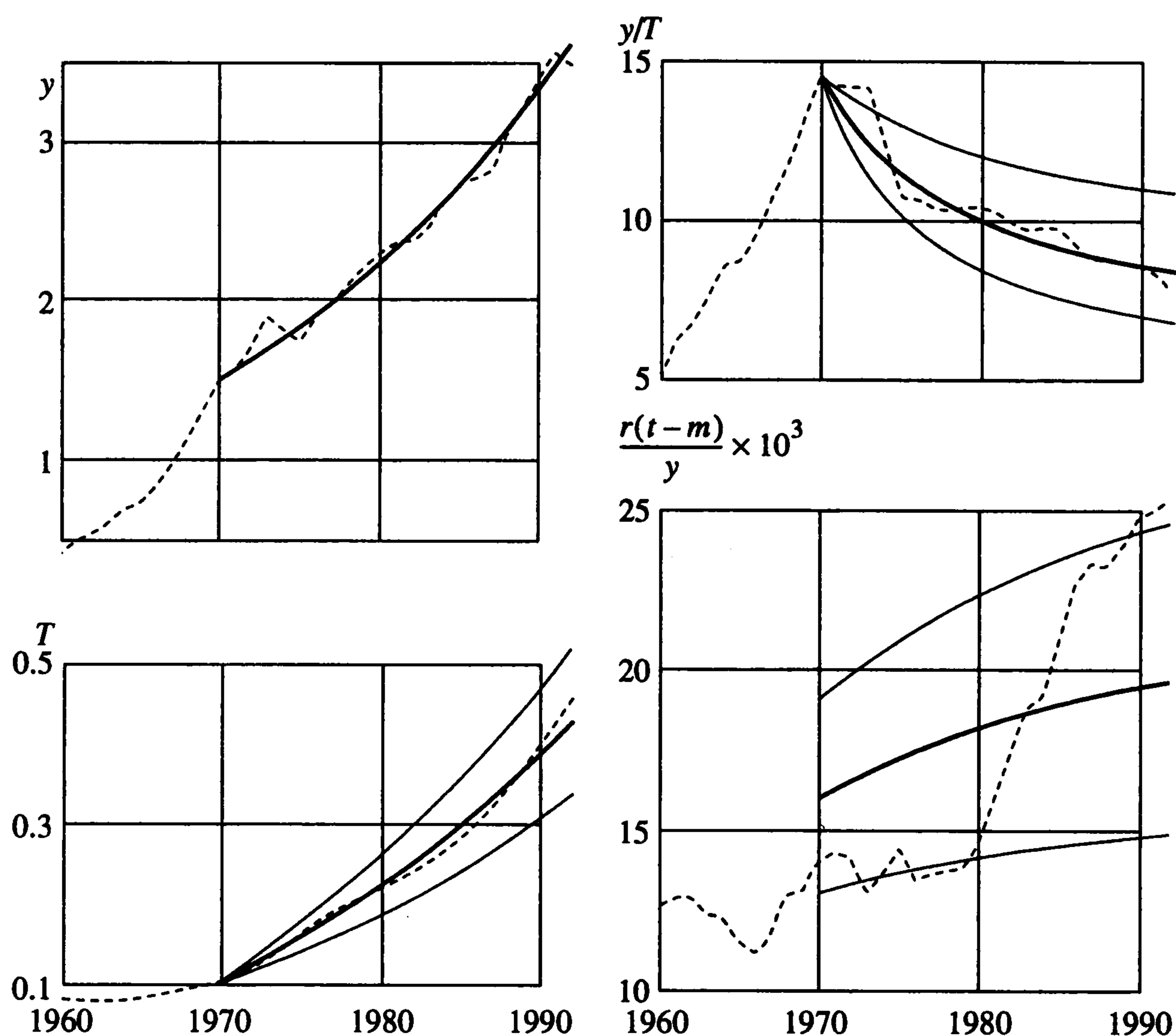
$$\Delta_{t_0} = C_1 \varepsilon^{1/2} (1 - e^{-\lambda/\varepsilon^{1/2}}) + C_2 \varepsilon e^{-\lambda/\varepsilon^{1/2}}, \quad \lambda = \frac{1}{\rho} \left[\frac{2(x_1(t_0) - x_1^0)}{C} \right]^{1/2}$$

где Δ_{t_0} – требуемая точность вычисления максимального значения функции полезности (1.8).

8. Эконометрическая идентификация. Рассматриваемая математическая модель была апробирована на данных обрабатывающей промышленности Японии за период 1960–1992 гг. Согласно материалам Токийского технологического института (см. [10]), в 1960-х годах экономика Японии развивалась в сложных условиях: бурный экономический рост сопровождался дефицитом рабочей силы и энергетическим кризисом. Процесс экономического развития имел нерегулярный характер. В начале 1970-х годов были предприняты энергичные меры по стабилизации процесса и его управлению. В результате экономическое развитие приобрело устойчивый и управляемый характер. Одним из основных рычагов управления являлась политика инвестиций в развитие науки и новых технологий.

Ниже приведены результаты тестирования. Варьирование параметров модели позволяет получить кластеры теоретически оптимальных траекторий. Сопоставляя кластеры траекторий с эмпирическими данными, можно сделать вывод об эффективности управления экономикой и оценить оптимальность инвестиций при различных сценариях экономического развития. Синтезированные кластеры могут быть также использованы для определения чувствительности оптимальных траекторий к вариациям различных параметров модели или их комбинаций. Такой анализ чувствительности особенно важен, когда рассматриваемый процесс экономического развития оптимален или близок к оптимальному. В этой ситуации параметры, к изменению которых наиболее чувствительны оптимальные траектории, могут быть идентифицированы экспертами. Управление этими существенными параметрами – важная задача макроэкономического менеджмента.

На фиг. 2 показаны кластеры синтезированных оптимальных траекторий, полученные при изменении коэффициента эластичности в интервале $0.90 < \alpha < 0.94$. На временном интервале 1970–1992 гг. кластеры оптимальных траекторий сопоставляются с эмпирическими данными для четырех основных показателей: $y(t)$ – производство (трлн. иен), $T(t)$ – технология (трлн. иен), $y(t)/T(t)$ – продуктивность технологии, $r(t - m)/y$ – интенсивность инвестиций в развитие технологии; t – время (годы). Оптимальная траектория, наиболее близкая к реальным эконометрическим данным (обозначенным штриховой линией), соответствует следующему набору параметров модели: $\gamma = 1.0$, $\alpha = 0.92$, $\rho = 0.035$ ((год)⁻¹), $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.5$, $f_1 = 0.042$ ((год)⁻¹),



Фиг. 2

$f_2 = 0.015$ ((год) $^{-1}$), $g = 0.6$ и начальным значениям $t_0 = 1970$, $y(t_0) = 1.504$, $T(t_0) = 0.1034$.

Эксперименты показали, что в определенных параметрических интервалах оптимальные траектории хорошо согласуются с эконометрическими данными по обрабатывающей промышленности Японии. Этот факт подтверждает предположение о том, что в период 1970–1992 гг. развитие экономики Японии было близко к оптимальному, и указывает на адекватность математической модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00258, 00-15-96013, 99-01-00146, 00-15-96057, 01-01-06308) и Исследовательского института Фуджитсу (00-117).

ЛИТЕРАТУРА

1. Tarasyev A.M., Watanabe C. Optimal control of R and D investment in a techno-metabolic system. Interim Report IR-99-001. Laxenburg, Austria: Intern. Inst. Appl. Syst. Analysis, 1999. 37 p.
2. Arrow K.J. Collected Papers. V. 5. Production and Capital. Cambridge; London: Belknap Press; Harvard Univ. Press, 1985. 481 p.
3. Arrow K.J., Kurz M. Public Investment, the Rate of Return and Optimal Fiscal Policy. Baltimore; London: J. Hopkins, 1970. 218 p.
4. Grossman G.M., Helpman E. Innovation and Growth in the Global Economy. Cambridge; London: MIT Press, 1993. 384 p.
5. Lee C.S., Leitmann G. On one aspect of science policy based on an uncertain model // Annals of Operat. Res. 1999. V. 88. P. 199–214.
6. Borisov V.F., Hutschenreiter G., Kryazhimskii A.V. Asymptotic growth rates in knowledge-exchanging economies // Annals of Operat. Res. 1999. V. 89. P. 61–73.

7. *Watanabe C.* Trends in the substitution of production factors to technology – empirical analysis of the inducing impact of the energy crisis on Japanese industrial technology // *Res. Policy*. 1992. V. 21. № 6. P. 481–505.
8. *Intriligator M.* Mathematical Optimization and Economic Theory. N.Y.: Prentice-Hall, 1971. 508 p.
9. *Griliches Z. R* and D. Patents, and Productivity. Chicago; London: Univ. Chicago Press, 1987. 528 p.
10. *Watanabe C.* The interaction between technology and economy: national strategies for constrained economic environments. The case of Japan 1955–1992. Interim Report WP-95-16. Laxenburg, Austria: Intern. Inst. Appl. Syst. Analysis, 1995. 98 p.
11. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
12. *Hartman Ph.* Ordinary Differential Equations. N.Y.: Wiley, 1964. = *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
13. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331 с.

Москва
e-mail: reshmin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
19.X.2000