

УДК 62–50

© 2001 г. Ю.В. Алдакимов, А.А. Меликян, Г.В. Наумов

**ПЕРЕСТРОЙКА РЕЖИМА
В ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОМ СЕМЕЙСТВЕ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Рассматривается двумерная задача оптимального управления с нефиксированным временем и интегральным функционалом, зависящим от параметра. При нулевом значении параметра проблема сводится к известной задаче Фуллера с учащающимися переключениями [1]. Предварительный анализ на основе принципа максимума показал, что подобный режим сохраняется вплоть до некоторого критического значения параметра, после чего имеет место режим с двумя переключениями и особой дугой первого порядка. Обоснование упомянутых режимов дано с помощью уравнения Беллмана. Инвариантно-групповой его анализ, проведенный аналогично известному подходу [2], выявил структуру (дважды гладкой) функции Беллмана, содержащей неизвестные константы. Последние определяются численно из системы алгебраических уравнений.

1. Постановка задачи. Управляемая система задается уравнениями движения, ограничениями, начальными и терминальными условиями

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad 0 \leq t \leq T, \quad |u| \leq 1 \quad (1.1)$$

$$x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0; \quad x(T) = 0, \quad y(T) = 0$$

Здесь T – нефиксированный момент окончания процесса, u – скалярный управляющий параметр. На движениях системы (1.1) рассматривается функционал (L – вещественный параметр)

$$J = \int_0^T x^2(t)[Lu(t) + 1]dt, \quad |L| \leq 1 \quad (1.2)$$

Допустимыми управлениями считаются кусочно-непрерывные функции $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющие ограничению (1.1), т.е. принимающие значения из интервала $[-1, 1]$. Рассматривается задача о минимизации функционала (1.2) в классе допустимых управлений и соответствующих движений системы (1.1).

При $L = 0$ получаем задачу Фуллера, исследованную ранее [1, 2]. Полное исследование задачи Фуллера и других задач оптимального управления с учащающимися переключениями можно найти в монографии [3]. Отметим, что при $|L| < 1$ подынтегральное выражение в функционале (1.2) положительно.

Ограничение $|L| \leq 1$ на параметр L обеспечивает неотрицательную определенность функционала (1.2). При других значениях L , $|L| > 1$, минимум функционала (1.2) не существует; можно построить последовательность допустимых управлений, на которых значение функционала (1.2) стремится к $-\infty$.

В вычислениях использовался также другой параметр, a , связанный с параметром L соотношениями

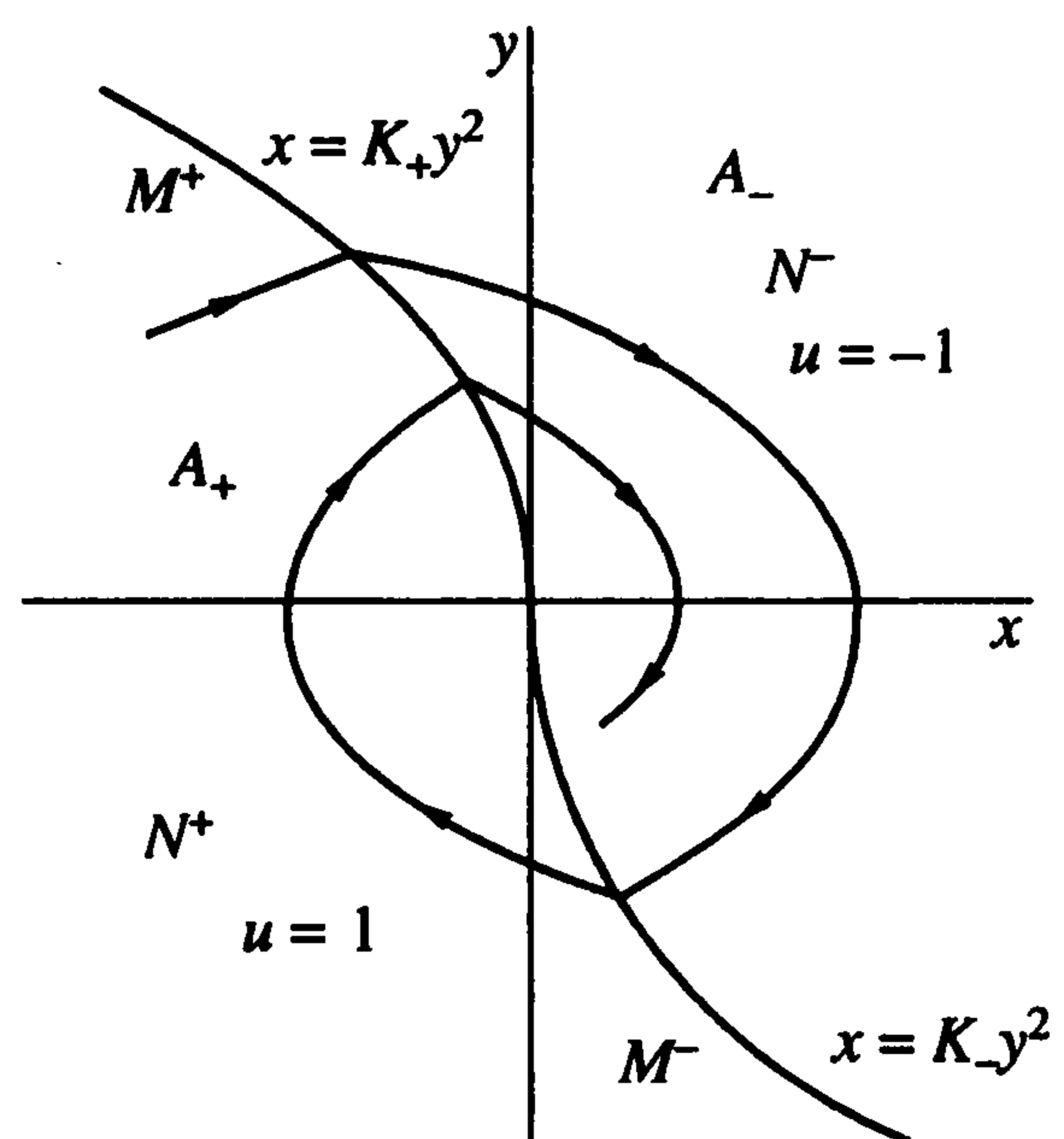
$$a = \frac{1+L}{1-L}, \quad -1 \leq L < 1; \quad L = \frac{a-1}{a+1}, \quad 0 \leq a < \infty \quad (1.3)$$

При этом функционал (1.2) с точностью до положительного множителя $a + 1$ представляется в виде

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T x^2(t) [(1+u)a + 1 - u] dt \quad (1.4)$$

Следует отметить, что достаточно рассмотреть только положительные значения параметра L , поскольку при $L < 0$ его можно заменить на положительный параметр, изменив знак управления и фазовых координат в (1.1).

В терминах параметра a выражение для гамильтонианов задачи и их скобок Пуассона получаются более простыми.



Фиг. 1

2. Построение кривой переключения на основе принципа максимума. Решение задачи оптимального управления (1.1), (1.2) характеризуется некоторой кривой M , называемой кривой переключения. Эта кривая разделяет плоскость (x, y) на две области: N^+ и N^- , в которых оптимальное управление принимает значение $u = +1$ и $u = -1$ соответственно. Поскольку при $L = 0$ кривая M состоит из двух полупарабол [1, 2], предположим, что при других значениях L кривая M также состоит из полупарабол M^+ , M^- , вообще говоря, несимметричных

$$M^+ : x = K_+ y^2, y \geq 0; M^- : x = K_- y^2, y \leq 0 \quad (2.1)$$

$$K_+ < 0, K_- > 0$$

Таким образом, полупарабола M^+ лежит во второй четверти плоскости (x, y) , а M^- — в четвертой (фиг. 1).

Известно [1, 2], что при $L = 0$ имеет место равенство $K_- = K_+ = 0.4446$. Отметим, что несимметричная кривая переключения вида (2.1) возникает также и в задаче с несимметричными ограничениями на управление, $a \leq u \leq b$, рассмотренной ранее [4]. Однако подобные ограничения не приводят к бифуркации фазового портрета, найденной в данной работе и имеющей своим источником модифицированный функционал (1.2).

Для отыскания постоянных K_+ , K_- применим к задаче принцип максимума [5]. Будем полагать, что сопряженные переменные p, q взяты с обратным знаком, что позволит сохранить единую систему обозначений при рассмотрении метода динамического программирования. Итак, $p = -\phi$, $q = -\psi$, где ϕ, ψ — сопряженные переменные принципа максимума.

Гамильтониан и его экстремальные значения имеют вид

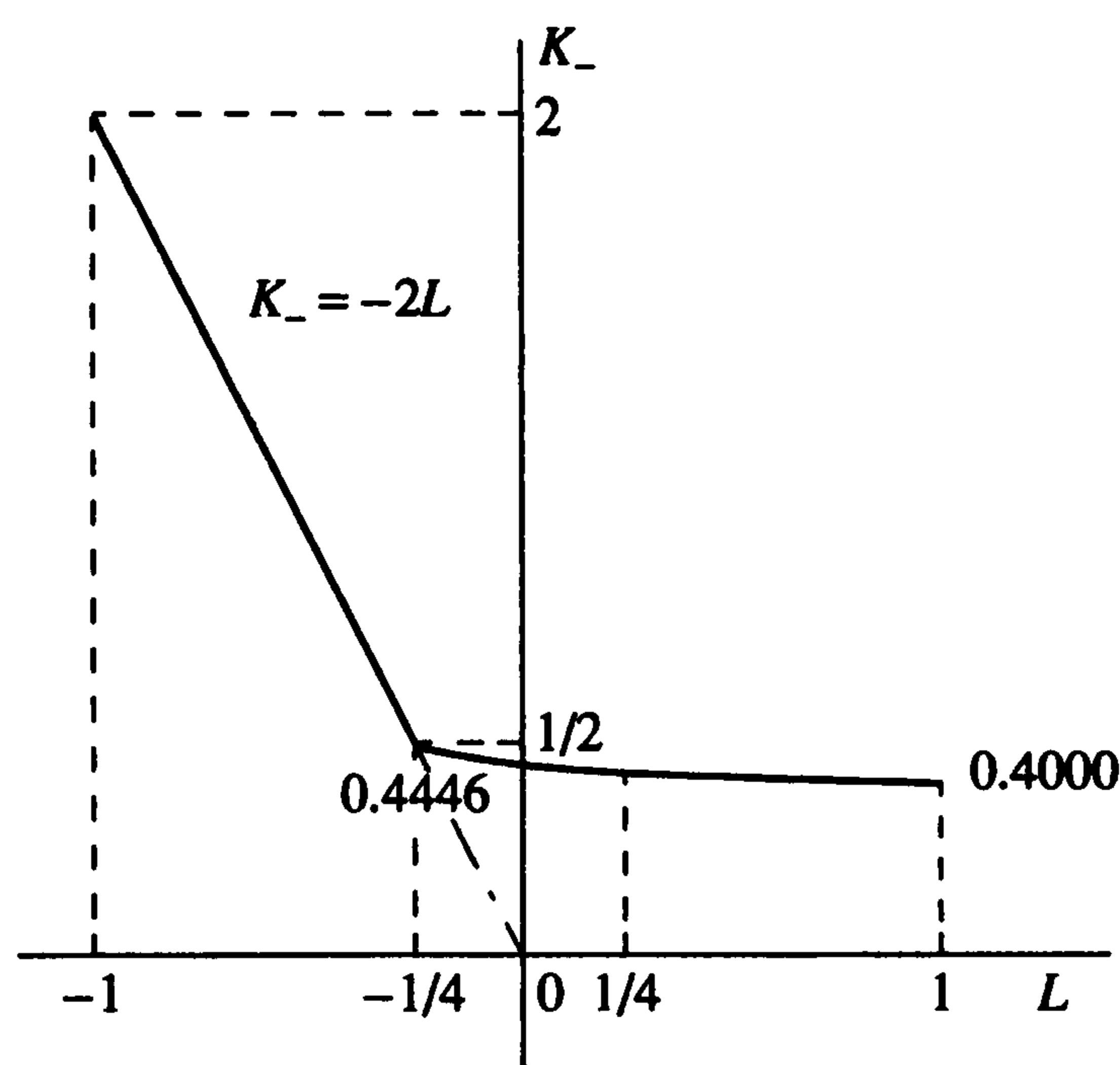
$$H(x, y, p, q, u) = py + qu + x^2(Lu + 1)$$

$$\min_u H = \min[F^+, F^-] = py + x^2 - |q + Lx^2| \quad (2.2)$$

$$F^+ = py + x^2 \pm q \pm Lx^2, \quad u^* = -\text{sign}(q + x^2 L)$$

Здесь операция максимизации заменена на минимизацию вследствие изменения знака у p, q ; u^* — оптимальное управление.

Предположим, что, как и в случае $L = 0$, оптимальная траектория состоит из парабол двух семейств, соответствующих $u = +1$, $u = -1$. Рассмотрим участок подобной траектории, начинающийся в точке $(x_*, y_*) \in M^+$, приходящий на кривую M^- и лежащий



Фиг. 2

в области N^- , где $u = -1$. Таким образом, точка x_* , y_* и соответствующие величины p_* , q_* удовлетворяют соотношениям

$$x_* = K_+ y_*^2, \quad q_* + x_*^2 L = 0 \quad (2.3)$$

$$F^\pm = p_* y_* + x_*^2 \pm q_* \pm L x_*^2 = 0$$

Здесь использовано условие переключения

$$q + Lx^2 = 0 \quad (2.4)$$

и тождество $H(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$, вытекающее из принципа максимума. Из соотношений (2.3) величины x_* , p_* , q_* выражаются через y_*

$$x_* = K_+ y_*^2, \quad p_* = -K_+^2 y_*^3, \quad q_* = -LK_+^2 y_*^4 \quad (2.5)$$

Интегрируя систему уравнений принципа максимума [5], соответствующую области N^-

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -1, \quad \dot{p} = -F_x^- = -2x(1-L), \quad \dot{q} = -F_y^- = -p$$

с начальными условиями (2.5) при $t = 0$, получим выражение для y , x , p , q в виде многочленов по t степени 1, 2, 3, 4 соответственно. В частности, $y = -t + y_*$. В момент $t = t_1$ попадания траектории на кривую M^- должны быть выполнены два равенства: условие переключения (2.4) и уравнение кривой M^- : $x = K_- y^2$. Используя для x , y , q выражения в виде многочленов и вводя обозначения

$$\Lambda^\pm(\tau) = \frac{4L \mp 1}{12} \tau^3 \mp \frac{4L - 1}{3} \tau^2 + (K_\pm \mp 2K_\pm L + L)\tau + 2K_\pm L + K_\pm^2$$

можно представить эти два равенства в следующем виде:

$$\tau = 1 + \left(\frac{1 + 2K_+}{1 + 2K_-} \right)^{1/2}, \quad \Lambda^+(\tau) = 0; \quad \tau = \frac{t}{y_*} \quad (2.6)$$

Выражение (2.6) для $\tau = t/y_*$ соответствует максимальному из корней t квадратного уравнения $x(t) = K_- y^2(t)$ относительно t , минимальный корень дает точку пересечения с неиспользованной частью параболы $x = K_- y^2$.

Аналогично, рассматривая участок оптимальной траектории, приходящей из M^- на M^+ через область N^+ , можно получить другую пару уравнений

$$\rho = -1 - \left(\frac{1 - 2K_-}{1 - 2K_+} \right)^{1/2}, \quad \Lambda^-(\rho) = 0; \quad \rho = \frac{t}{y_*} \quad (2.7)$$

Система (2.6), (2.7) четырех уравнений относительно K_+ , K_- , τ , ρ использовалась для расчета зависимостей $K_+(L)$, $K_-(L)$; последняя представлена на фиг. 2. При $L = 0$, в частности, результаты совпадают с полученными ранее [1]: $K_- = -K_+ = 0.4446$.

Система (2.6), (2.7) используется только для интервала значений $|L| < 1/4$. При $|L| \geq 1/4$ режим с бесконечным числом учащающихся переключений уступает место режиму с двумя переключениями и особой дугой первого порядка. На особом участке

выполнены тождественно по времени два равенства: (2.4) и

$$py + x^2 = 0 \quad (2.8)$$

Равенство (2.8) следует из условия переключения и обращения в нуль гамильтониана: $H = 0$. Дифференцируя по времени равенство (2.4) вдоль решений гамильтоновой системы

$$\dot{x} = H_p = y, \quad \dot{y} = H_q = u \quad (2.9)$$

$$\dot{p} = -H_x = -2x(Lu + 1), \quad \dot{q} = -H_y = -p$$

получим

$$-p + 2xyL = 0 \quad (2.10)$$

Вместе с равенством (2.8) это приводит к следующему уравнению (параболы) для особой дуги:

$$x = -2Ly^2 \quad (2.11)$$

Дифференцируя равенство (2.10) вдоль системы (2.9) и используя уравнение (2.11), приходим к равенству, из которого определяется особое управление

$$u_s = -1/(4L) \quad (2.12)$$

Используя гамильтониан (2.2) и особое управление (2.12) можно показать, что условие Келли [6] на особой параболе (2.11) оказывается выполненным:

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial H}{\partial u} = -8L^2 y^2 \leq 0$$

Изменение знака неравенства здесь вызвано изменением знака сопряженных переменных. Инвариантная форма условия Келли получена ранее [7].

Особое управление (2.12) должно удовлетворять исходному ограничению $|u_s| \leq 1$, откуда видно, что особый режим может существовать лишь при $|L| \geq 1/4$. При этом парабола (2.11) берет на себя роль участка M^+ (участка M^-) кривой переключения при $L > 0$ (при $L < 0$).

Таким образом, при $1/4 \leq L \leq 1$ следует положить $K_+ = -2L$ и находить коэффициент $K_-(L)$ из системы (2.7). При $-1 \leq L \leq -1/4$ следует принять $K_- = -2L$ и находить $K_+(L)$ из системы (2.6).

Вычислительные эксперименты показали, что система (2.6), (2.7) совместна и при $|L| > 1/4$, однако полученные значения K_+ , K_- не являются элементами решения задачи оптимального управления. Это устанавливается методом динамического программирования.

3. Уравнение Беллмана. Обозначим через $V(x, y)$ функцию оптимального результата (функцию Беллмана) задачи (1.1), (1.2), т.е. минимальную величину функционала (1.2) на траекториях системы (1.1), начинающихся в точке (x, y) . Функция $V(x, y)$ определена на всей плоскости (x, y) и удовлетворяет уравнению

$$\min_u H\left(x, y, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, u\right) = y \frac{\partial V}{\partial x} + x^2 - \left| \frac{\partial V}{\partial y} + Lx^2 \right| = 0 \quad (3.1)$$

$$u^* = -\text{sign}\left(\frac{\partial V}{\partial y} + Lx^2\right)$$

В областях N^-, N^+ , на которые кривая переключения M разбивает плоскость (x, y) ,

функция Беллмана удовлетворяет уравнениям

$$F^-\left(x, y, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right) \equiv y \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} - Lx^2 + x^2 = 0 \quad (3.2)$$

$$(x, y) \in N^-, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + Lx^2 > 0, \quad u^* = -1$$

$$F^+\left(x, y, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right) \equiv y \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + Lx^2 + x^2 = 0 \quad (3.3)$$

$$(x, y) \in N^+, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + Lx^2 < 0, \quad u^* = +1$$

Гамильтонианы H , F^+ , F^- определены в (2.2). Обозначим через $V^-(x, y)$ и $V^+(x, y)$ ограничение функции Беллмана на области N^- и N^+

$$V^\pm(x, y) = V(x, y), \quad (x, y) \in N^\pm \quad (3.4)$$

Таким образом, функция $V^-(x, y)$ (функция $V^+(x, y)$) удовлетворяет уравнению (3.2) (уравнению (3.3)). Для уравнений (3.1)–(3.3) необходимы граничные условия. Терминальное условие в (1.1) задает следующее значение для функции Беллмана в начале координат:

$$V(0, 0) = 0 \quad (3.5)$$

Это равенство и будет рассматриваться в качестве граничного условия к уравнениям (3.1)–(3.3). Вообще говоря, граничные условия должны быть заданы не в одной точке, а на некоторой линии [8]. Однако определенная вырожденность рассматриваемой задачи позволяет получить единственное решение по условию (3.5).

Решение задачи (3.1), (3.5) будем искать в классе непрерывно дифференцируемых функций, т.е. уравнения (3.1)–(3.3) понимаются в классическом (а не обобщенном) смысле.

Инвариантно-групповой анализ позволяет упростить решение уравнения Беллмана. Можно проверить, что уравнения движения и ограничения (1.1) инвариантны относительно группы преобразований

$$x = \mu^2 \bar{x}, \quad y = \mu \bar{y}, \quad u = \bar{u}, \quad t = \mu \bar{t}, \quad \mu > 0 \quad (3.6)$$

где μ – скалярный параметр. При этом в функционале (1.2) возникает множитель μ^5 , т.е. значения функции Беллмана в соответствующих точках $V(x, y)$ и $V(\bar{x}, \bar{y})$ связаны соотношением

$$V(x, y) = V(\mu^2 \bar{x}, \mu \bar{y}) = \mu^5 V(\bar{x}, \bar{y}) \quad (3.7)$$

Это позволяет выразить функцию двух переменных через функцию одной переменной. Используя в (3.6), (3.7) параметр $\mu = 1/y$ при $y > 0$ или $\mu = -1/y$ при $y < 0$, можно получить представление

$$V(x, y) = y^5 \varphi(xy^{-2}), \quad \varphi(z) = \begin{cases} V(z, 1), & y > 0 \\ -V(z, -1), & y < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Ветви функции $\varphi(z)$, соответствующие ветвям $V^-(x, y)$, $V^+(x, y)$ функции Беллмана, согласно соотношению (3.8), обозначим через φ^- , φ^+

$$V^\pm(x, y) = y^5 \varphi^\pm(xy^{-2}), \quad (x, y) \in N^\pm \quad (3.9)$$

Функция вида (3.8) удовлетворяет условию (3.5), которое тем самым является необходимым условием существования автомодельного решения уравнения (3.1). Понятно, что условие (3.5) можно не использовать при построении функций φ^+ , φ^- .

Используя уравнения (3.2), (3.3), можно получить следующие обыкновенные дифференциальные уравнения для функций φ^+ , φ^- , где $z = x/y^2$,

$$\varphi^\pm : \varphi'(z)(1 \mp 2z) \pm 5\varphi(z) + z^2(1 \pm L) = 0 \quad (3.10)$$

Общие решения линейных неоднородных уравнений (3.10) имеют вид

$$\varphi^\pm(z) = A_\pm \left| z \mp \frac{1}{2} \right|^{\frac{5}{2}} + 2(1 \pm L) \left(\mp \frac{1}{15} + \frac{1}{3}z \mp \frac{1}{2}z^2 \right) \quad (3.11)$$

где $A_\pm$ – постоянные интегрирования. Здесь предполагается, что точка $z = 1/2$ (точка $z = -1/2$) не входит в интервал определения решения $\varphi^+(z)$ ($\varphi^-(z)$). Эти точки являются сингулярными точками уравнений (3.10), так как в них исчезает коэффициент при старшей производной. Если они – внутренние точки интервалов определения соответствующего решения, то общее решение является двупараметрическим. Например, по разные стороны от точки $z = 1/2$ можно использовать разные постоянные A_+ , скажем, A_+ и A_+^* . При этом две ветви, соответствующие A_+ и A_+^* , гладко сопрягаются в точке $z = 1/2$, представляя единую непрерывно дифференцируемую функцию. Эта ситуация встречается ниже при нахождении постоянных $A_\pm, K_\pm$.

Используя (3.9), (3.11), получаем следующие выражения для значений V^+ , V^- функции V в областях N^+ , N^- :

$$V(x, y) = V^\pm(x, y) = A_\pm \left| \frac{1}{2}y^2 \mp x \right|^{\frac{5}{2}} + 2(1 \pm L) \left(\mp \frac{1}{15}y^5 + \frac{1}{3}xy^3 \mp \frac{1}{2}x^2y \right) \quad (3.12)$$

$$(x, y) \in N^\pm$$

Здесь, вообще говоря, для каждой из областей $y \geq 0$ и $y \leq 0$ должна использоваться своя постоянная A_+ или A_- . Однако требование непрерывности функций $V^+(x, y)$, $V^-(x, y)$ при $y = 0$ приводит к общему значению этих постоянных, которые и подразумеваются в формуле (3.12).

Таким образом, построение гладкой функции $V(x, y)$ сводится к нахождению постоянных $A_\pm, K_\pm$. Существование подобной функции Беллмана доказывает, как это следует, например, из результатов монографии [9], оптимальность синтеза, построенного в разд. 2, 3.

4. Определение параметров $A_\pm, K_\pm$. При вычислении величин $A_\pm, K_\pm$ параметр L считается заданным. Объем вычислений несколько уменьшается благодаря следующей симметрии при замене знака параметра L

$$L \rightarrow -L : A_\pm \rightarrow A_\mp, \quad K_\pm \rightarrow -K_\mp, \quad V(x, y) \rightarrow V(-x, -y) \quad (4.1)$$

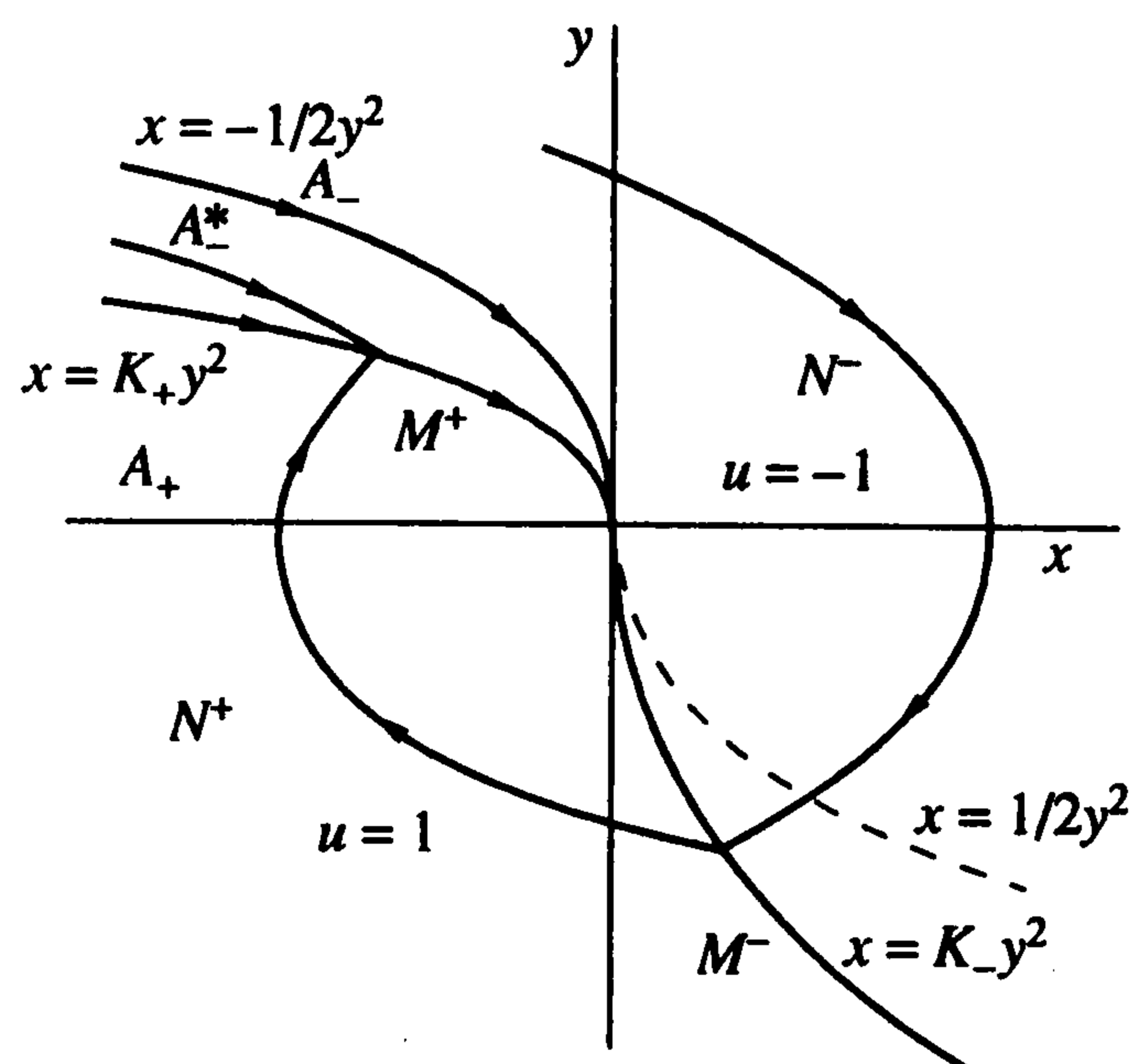
В частности, достаточно найти зависимость $K_-(L)$, $|L| \leq 1$, чтобы получить $K_+(L) = -K_-(-L)$.

В интервале значений $|L| \leq 1/4$ для вычисления величин $A_\pm, K_\pm$ рассматривается система четырех уравнений

$$V^+(x, y) = V^-(x, y), \quad \frac{\partial V^+}{\partial y} + Lx^2 = 0 \quad (x = K_-y^2) \quad (4.2)$$

$$V^+(x, y) = V^-(x, y), \quad \frac{\partial V^-}{\partial y} + Lx^2 = 0 \quad (x = K_+y^2) \quad (4.3)$$

Как видно из указанных значений x , уравнение (4.2) рассматривается на кривой M^- , а уравнение (4.3) – на кривой M^+ . При подстановке значений $x = K_-y^2$ и $x = K_+y^2$ в уравнения (4.2), (4.3) возникает общий множитель y^4 или y^5 , после сокращения которых



Фиг. 3

остаются четыре следующих равенства в терминах параметров $A_{\pm}$, $K_{\pm}$ и L :

$$\begin{aligned} \mp A_+ \left| \frac{1}{2} - K_{\mp} \right|^{\frac{5}{2}} + 2(1+L) \left(-\frac{1}{15} + \frac{1}{3} K_{\mp} - \frac{1}{2} K_{\mp}^2 \right) = \\ = \mp A_- \left| \frac{1}{2} + K_{\mp} \right|^{\frac{5}{2}} + 2(1-L) \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{3} K_{\mp} + \frac{1}{2} K_{\mp}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\mp \frac{5}{2} A_{\pm} \operatorname{sign} \left(K_{\mp} \mp \frac{1}{2} \right) \left| K_{\mp} \mp \frac{1}{2} \right|^{\frac{3}{2}} + 2(1 \pm L) \left(\mp \frac{1}{3} + K_{\mp} \mp \frac{1}{2} K_{\mp}^2 \right) + L K_{\mp}^2 = 0 \quad (4.5)$$

Эти равенства представляют собой систему трансцендентных уравнений относительно неизвестных $A_{\pm}$, $K_{\pm}$, которая решалась численно с помощью системы MAPLE.

Для интервала значений $L \geq 1/4$, согласно (2.11), имеем $K_+ = -2L$. Подставив это значение в уравнение (4.7), можно получить следующее значение постоянной $A_- = A_-^*$:

$$A_-^* = \frac{8\sqrt{2}}{15} \frac{3L-1}{\sqrt{4L-1}} \quad (4.6)$$

Функция $V^*(x, y)$, равная $V^-(x, y)$ в (3.12) с постоянной (4.6) задает функцию Беллмана в части области N^- , лежащей между параболлами M^+ и $x = -y^2/2$ (фиг. 3). В остальной части области N^- функцию $V^-(x, y)$ представляет постоянная A_- , которая вместе с A_+ и K_- отыскивается из системы трех уравнений, включающей (4.4), (4.5) и модифицированное уравнение (4.4) с нижним знаком, в которое подставлены $A_- = A_-^*$ и $K_+ = -2L$.

Отметим, что при $L = 1/4$ имеем $K_+ = -1/2$, и для нахождения $A_{\pm}$, K_- используется система, состоящая из обоих уравнений (4.4) и уравнения (4.5) с верхним знаком. Надобность в постоянной A_-^* из (4.6) в уравнении (4.4) пропадает (кривая M^+ совпадает с $x = -y^2/2$, фиг. 3). Хотя и $A_-^* \rightarrow \infty$ при $L \rightarrow 1/4 + 0$, величина $V^*(x, y)$ стремится к конечному пределу для $(x, y) \in M^+$: $V^* = (3/80)y^5$.

Результаты расчетов иллюстрируют фиг. 2 и следующие числовые данные:

L	0.0	0.2	0.25	0.4	0.6	0.8	1.0
A_+	0.7640	0.8998	0.9333	1.0291	1.1453	1.2513	1.3492
A_-	0.7640	0.6269	0.5926	0.4894	0.3515	0.2133	0.0749
A_-^*	--	--	--	0.1947	0.5100	0.7119	0.8709
K_+	-0.4446	-0.4801	-0.5000	-0.8000	-1.2000	-1.6000	-2.0000
K_-	0.4446	0.4277	0.4248	0.4174	0.4100	0.4044	0.4000

Кривая зависимости $K_-(L)$, представленная на фиг. 2, имеет угловую точку при $L = -1/4$, когда и происходит бифуркация фазового портрета. Соответственно кривая $K_+(L)$ имеет излом при $L = 1/4$. Зависимость $K_-(L)$ для некоторых точек интервала $-1/4 \leq L \leq 1$ найдена численно, на участке $-1 \leq L \leq -1/4$ выполнено равенство $K_-(L) = -2L$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-01131).

ЛИТЕРАТУРА

1. Fuller A.T. Study of an optimum non-linear control system // J. of Electronics and Control. 1963. V. 15. № 1. P. 63–71.
2. Wonham W.M. Note on a problem in optimal non-linear control // J. of Electronics and Control. 1963. V. 15. № 1. P. 59–62.
3. Zelikin M.I., Borisov V.F. Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics and Engineering. Boston: Birkhäuser, 1993. 256 p.
4. Marchall C. Second-order tests in optimization theory // J. Optimizat. Theory and Appl. 1975. V. 15. № 5. P. 633–666.
5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.
7. Melikyan A.A. Generalized Characteristics of First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. Boston: Birkhäuser, 1998. 320 p.
8. Courant R. Partial Differential Equations. N.Y.; L.: Interscience, 1962. = Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
9. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 407 с.

Москва
e-mail: melik@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
4.IX.2000