

УДК 531.36:62–50

© 2001 г. А.Н. Квитко

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Предлагается алгоритм построения управляющей функции, при которой решение нелинейной системы дифференциальных уравнений переходит из начального состояния в сколь угодно малую окрестность заданного конечного состояния. Рассматривается задача межорбитального перелета.

Ранее [1, 2] были получены алгоритмы построения управляющих функций, при которых решения линейных и квазилинейных систем дифференциальных уравнений удовлетворяют заданным краевым условиям. Ниже исследуется аналогичный тип краевых задач для нелинейных управляемых систем в ограниченной области фазового пространства.

1. Постановка задачи. Объектом исследования является система

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1.1)$$

где

$$x = (x^1, \dots, x^n)^*, \quad x \in R^n; \quad u = (u^1, \dots, u^r)^*, \quad u \in R^r, \quad r \leq n \quad (1.2)$$

$$t \in [0, 1]; \quad f \in C^3(R^n \times R^r; R^n), \quad f = (f_1, \dots, f_n)^* \\ \|x\| < C_1, \quad \|u\| < C_2 \quad (1.3)$$

Пусть заданы состояния

$$x(0) = 0, \quad x(1) = x_1; \quad x_1 = (x_1^1, \dots, x_1^n)^*, \quad \|x_1\| < C_1 \quad (1.4)$$

Задача. Найти функции $x(t) \in C^1[0, 1]; u(t) \in C^1[0, 1]$, удовлетворяющие системе (1.1) и условиям (1.3), так, чтобы были выполнены соотношения

$$x(0) = 0, \quad x(t) \rightarrow x_1 \quad \text{при} \quad t \rightarrow 1 \quad (1.5)$$

Указанную пару $x(t), u(t)$ будем называть программным движением.

2. Решение задачи. Пусть вектор $u_1 \in R^r; u_1 = (u_1^1, \dots, u_1^r)$ из области (1.3) удовлетворяет условиям

$$f(x_1, u_1) = 0 \quad (2.1)$$

Используя соотношения (1.2), систему (1.1) запишем в виде

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_1, u_1)(x^j - x_1^j) + \sum_{j=1}^r \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(x_1, u_1)(u^j - u_1^j) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k} \times \\ \times (\tilde{x}, \tilde{u})(x^j - x_1^j)(x^k - x_1^k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial u^j}(\tilde{x}, \tilde{u})(x^k - x_1^k)(u^j - u_1^j) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f^i}{\partial u^j \partial u^k}(\tilde{x}, \tilde{u})(u^j - u_1^j)(u^k - u_1^k) \quad (2.2)$$

Здесь

$$\tilde{x} = x_1 + \theta_i(x - x_1), \quad \tilde{u} = u_1 + \theta_i(u - u_1); \quad \theta_i \in (0, 1)$$

$$\|\tilde{x}\| < C_1, \quad \|\tilde{u}\| < C_2 \quad (2.3)$$

Будем искать решение поставленной задачи в виде

$$x^i(t) = a^i(t)(1-t) + x_1^i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

$$u^j(t) = b^j(t)(1-t) + u_1^j, \quad j = 1, \dots, r \quad (2.5)$$

После подстановки соотношений (2.4), (2.5) в систему (2.2) получим систему, которую запишем в векторной форме

$$(1-t)\dot{a} = a + (1-t)Pa + (1-t)Qb + R(a, b, t) \quad (2.6)$$

$$P = \{P_j^i\}, \quad i, j = 1, \dots, n; \quad R = (R^1, \dots, R^n)^*$$

$$Q = \{q_j^i\}, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, r$$

Условия (1.3), (1.4), (2.4), (2.5) дают

$$\begin{aligned} \|a(t)(1-t) + x_1\| < C_1, \quad \|b(t)(1-t) + u_1\| < C_2 \\ t \in [0, 1]; \quad a(0) = -x_1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Сделаем преобразование переменной t по формуле

$$1-t = e^{-\alpha\tau}, \quad \tau \in [0, +\infty) \quad (2.8)$$

где $\alpha > 0$ – постоянная, подлежащая определению. Тогда система (2.6) и условия (2.7) примут вид

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = \alpha\bar{a} + \alpha P e^{-\alpha\tau}\bar{a} + \alpha Q e^{-\alpha\tau}\bar{b} + \alpha R(\bar{a}, \bar{b}, \tau); \quad \tau \in [0, +\infty) \quad (2.9)$$

$$\|\bar{a}(\tau)e^{-\alpha\tau} + x_1\| < C_1, \quad \|\bar{b}(\tau)e^{-\alpha\tau} + u_1\| < C_2 \quad (2.10)$$

$$\bar{a}(0) = -x_1; \quad \tau \in [0, +\infty); \quad \bar{a}(\tau) = a(t(\tau)), \quad \bar{b}(\tau) = b(t(\tau))$$

Введем переменные $c(\tau), d(\tau)$:

$$\bar{a}(\tau) = c(\tau)e^{\alpha\tau}, \quad \bar{b}(\tau) = d(\tau)e^{\alpha\tau}; \quad \tau \in [0, +\infty) \quad (2.11)$$

После подстановки выражений (2.11) в систему (2.9) при учете условий (2.10) имеем

$$\frac{dc}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} P c + \alpha e^{-\alpha\tau} Q d + R(c, d)e^{-\alpha\tau}, \quad \tau \in [0, +\infty) \quad (2.12)$$

$$\|c(\tau) + x_1\| < C_1, \quad \|d(\tau) + u_1\| < C_2; \quad \tau \in [0, +\infty), \quad c(0) = -x_1 \quad (2.13)$$

Наряду с (2.12) рассмотрим систему

$$\frac{dc}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} P c + \alpha e^{-\alpha\tau} Q d, \quad \tau \in [0, +\infty) \quad (2.14)$$

Будем искать вектор-функцию $d(\tau)$ так, чтобы обеспечить экспоненциальную устойчивость системы (2.14).

Пусть $\bar{q}_i$ (всюду далее в этом разделе $i = 1, \dots, r$) – i -й столбец матрицы Q . Построим матрицу

$$S = \{\bar{q}_1, \dots, P^{k_1-1}\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_r, \dots, P^{k_r-1}\bar{q}_r\} \quad (2.15)$$

Здесь k_i – максимальное количество столбцов вида $\bar{q}_i, P\bar{q}_i, \dots, P^{k_i-1}\bar{q}_i$, таких, что векторы $\bar{q}_1, P\bar{q}_1, \dots, P^{k_1-1}\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_r, \dots, P^{k_r-1}\bar{q}_r$ линейно независимы. Если ранг матрицы (2.15) равен n , то преобразование

$$c = Sy \quad (2.16)$$

приводит систему (2.14) к виду

$$\frac{dy}{d\tau} = \alpha S^{-1} P S e^{-\alpha\tau} y + \alpha S^{-1} Q e^{-\alpha\tau} d \quad (2.17)$$

Матрицы $S^{-1}PS$ и $S^{-1}Q$ имеют вид [1]

$$S^{-1}PS = \{\bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_{k_1}, \bar{g}_{k_1}, \dots, \bar{e}_{k_{r-1}+2}, \dots, \bar{e}_{k_r}, \bar{g}_{k_r}\} \quad (2.18)$$

$$\bar{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)_{n \times 1}^* \quad (1 - \text{на } i\text{-м месте})$$

$$\bar{g}_{k_i} = (-g_{k_1}^0, \dots, -g_{k_1}^{k_1-1}, \dots, -g_{k_i}^0, \dots, -g_{k_i}^{k_i-1}, 0, \dots, 0)_{n \times 1}^*$$

$$P^{k_i} \bar{q}_i = - \sum_{j=0}^{k_1-1} g_{k_1}^j P^j \bar{q}_1 - \dots - \sum_{j=0}^{k_i-1} g_{k_i}^j P^j \bar{q}_i \quad (2.19)$$

$$S^{-1}Q = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{k_1+1}, \dots, \bar{e}_{\gamma+1}\}; \quad \gamma = k_1 + \dots + k_{r-1} \quad (2.20)$$

В (2.19) $g_{k_1}^j (j=0, \dots, k_1-1), \dots, g_{k_i}^j (j=0, \dots, k_i-1)$ – коэффициенты разложения вектора $P^{k_i} \bar{q}_i$ по векторам $P^j \bar{q}_1 (j=0, \dots, k_1-1), \dots, P^j \bar{q}_i (j=0, \dots, k_i-1)$.

Рассмотрим задачу стабилизации системы вида

$$\frac{dy_{k_i}}{d\tau} = \{\bar{e}_2^{k_i}, \dots, \bar{e}_{k_i}^{k_i}, \bar{g}_{k_i}\} \alpha e^{-\alpha\tau} y_{k_i} + \bar{e}_i^{k_i} \alpha e^{-\alpha\tau} d^i \quad (2.21)$$

где

$$y_{k_i} = (y_{k_i}^1, \dots, y_{k_i}^{k_i})_{k_i \times 1}^*$$

$$\bar{e}_i^{k_i} = (0, \dots, 1, \dots, 0)_{k_i \times 1}^* \quad (1 - \text{на } i\text{-м месте})$$

$$\bar{g}_{k_i} = (-g_{k_i}^0, \dots, -g_{k_i}^{k_i-1})_{k_i \times 1}^*,$$

$$d = (d^1, \dots, d^r)^*$$

Система (2.21) в скалярной форме запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{dy_{k_i}^1}{d\tau} &= -\alpha g_{k_i}^0 e^{-\alpha\tau} y_{k_i}^{k_i} + \alpha e^{-\alpha\tau} d^i \\ \frac{dy_{k_i}^2}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} y_{k_i}^1 - \alpha g_{k_i}^1 e^{-\alpha\tau} y_{k_i}^{k_i} \\ &\dots \\ \frac{dy_{k_i}^{k_i-1}}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} y_{k_i}^{k_i-2} - \alpha g_{k_i}^{k_i-2} e^{-\alpha\tau} y_{k_i}^{k_i} \\ \frac{dy_{k_i}^{k_i}}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} y_{k_i}^{k_i-1} - \alpha g_{k_i}^{k_i-1} e^{-\alpha\tau} y_{k_i}^{k_i} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Пусть $y_{k_i}^{k_i} = \alpha^{k_i} \psi$. Используя последнее уравнение системы (2.22) и индуктивный переход, будем иметь

$$\begin{aligned} y_{k_i}^{k_i} &= \alpha^{k_i} \psi \\ y_{k_i}^{k_i-1} &= \alpha^{k_i-1} e^{\alpha\tau} \psi^{(1)} + g_{k_i}^{k_i-1} \alpha^{k_i} \psi \\ y_{k_i}^{k_i-2} &= \alpha^{k_i-2} e^{2\alpha\tau} \psi^{(2)} + (\alpha^{k_i-1} e^{2\alpha\tau} + \alpha^{k_i-1} e^{\alpha\tau} g_{k_i}^{k_i-1}) \psi^{(1)} + g_{k_i}^{k_i-2} \alpha^{k_i} \psi \\ &\dots \\ y_{k_i}^1 &= \alpha e^{(k_i-1)\alpha\tau} \psi^{(k_i-1)} + r_{k_i-2}(\tau) \psi^{(k_i-2)} + \dots + r_1(\tau) \psi^{(1)} + \alpha^{k_i} g_{k_i}^1 \psi \end{aligned} \quad (2.23)$$

Продифференцировав последнее равенство (2.23), из первого уравнения системы (2.22) получим

$$\psi^{(k_i)} + \varepsilon_{k_i-1}(\tau) \psi^{(k_i-1)} + \dots + \varepsilon_0(\tau) \psi = e^{-k_i\alpha\tau} d^i \quad (2.24)$$

В (2.23) $r_{k_i-2}(\tau), \dots, r_1(\tau)$ — линейные комбинации экспонент с показателями не выше $(k_i - 1)\alpha\tau$. В (2.24) $\varepsilon_{k_i-1}(\tau), \dots, \varepsilon_0(\tau)$ — линейные комбинации экспонент с неположительными показателями.

Пусть

$$v^i = e^{-k_i\alpha\tau} d^i \quad (2.25)$$

Положим

$$v^i = \sum_{j=1}^{k_i} (\varepsilon_{k_i-j}(\tau) - \gamma_{k_i-j}) \psi^{(k_i-j)} \quad (2.26)$$

где $\gamma_{k_i-j} (j=1, \dots, k_i)$ выбраны так, чтобы корни $\lambda_{k_i}^1, \dots, \lambda_{k_i}^{k_i}$ уравнения

$$\lambda^{k_i} + \gamma_{k_i-1} \lambda^{k_i-1} + \dots + \gamma_0 = 0$$

удовлетворяли условиям

$$\lambda_{k_i}^i \neq \lambda_{k_i}^j, \quad i \neq j; \quad \lambda_{k_i}^j < -(2k_i + 1)\alpha - 1; \quad j=1, \dots, k_i \quad (2.27)$$

Используя соотношения (2.16), (2.22), (2.25), (2.26), получим

$$d^i = e^{k_i\alpha\tau} \delta_{k_i} T_{k_i}^{-1} S_{k_i}^{-1} c \quad (2.28)$$

где

$$\delta_{k_i} = (\varepsilon_{k_i-1}(\tau) - \gamma_{k_i-1}, \dots, \varepsilon_0(\tau) - \gamma_0)$$

T_{k_i} — матрица системы (2.23), т.е. $\bar{\psi} = (\psi^{(k_i-1)}, \dots, \psi)^*$; $y_{k_i} = T_{k_i} \bar{\psi}$; $S_{k_i}^{-1}$ — матрица, состоящая из соответствующих k_i -строк матрицы S^{-1} .

Подставляя выражения (2.28) в правую часть системы (2.14), заключаем, что для ее решения $c(\tau)$ с начальными данными

$$c(0) = -x_1 \quad (2.29)$$

имеет место оценка

$$\|c(\tau)\| \leq M_0 \|x_1\| e^{-\lambda\tau}, \quad \lambda > 1 \quad (2.30)$$

Рассмотрим систему (2.12), замкнутую управлением (2.28), предположив дополнительно, что ее решения удовлетворяют начальным данным (2.29) и ограничениям

(2.13). Ее можно представить в виде

$$dc / d\tau = A(\tau)c + g(c, \tau) \quad (2.31)$$

где

$$A(\tau) = \alpha e^{-\alpha\tau} P + \alpha e^{-\alpha\tau} Q e^{k\alpha\tau} \delta_k T_k^{-1} S_k^{-1}$$

$$e^{k\alpha\tau} \delta_k T_k^{-1} S_k^{-1} = (e^{k_1\alpha\tau} \delta_{k_1} T_{k_1}^{-1} S_{k_1}^{-1}, \dots, e^{k_r\alpha\tau} \delta_{k_r} T_{k_r}^{-1} S_{k_r}^{-1})^*$$

$$g(c, \tau) = e^{-\alpha\tau} R(c, d)$$

Условия (1.2), (2.2), (2.13), (2.23), (2.28) гарантируют существование постоянных $L > 0, M > 0$, таких, что

$$\|g(c, \tau)\| \leq L e^{M\alpha\tau} \|c\|^2; \quad M > 2k_i \quad (2.32)$$

Кроме того, из (2.27), (2.30) следует, что система

$$dc / d\tau = A(\tau)c \quad (2.33)$$

экспоненциально устойчива.

Сделаем в (2.31) замену

$$c(\tau) = z(\tau) e^{-M\alpha\tau} \quad (2.34)$$

В результате получим

$$dz / d\tau = B(\tau)z + g_1(z, \tau) \quad (2.35)$$

$$z(0) = -x_1 \quad (2.36)$$

$$B(\tau) = A(\tau) + M\alpha E; \quad g_1(z, \tau) = e^{M\alpha\tau} g(ze^{-M\alpha\tau}, \tau)$$

E – единичная матрица. Используя соотношения (2.32), (2.34), имеем

$$\|g_1(z, \tau)\| \leq L \|z\|^2 \quad (2.37)$$

Видно, что при достаточно малых $\alpha > 0$ из экспоненциальной устойчивости системы (2.33) следует экспоненциальная устойчивость системы

$$dz / d\tau = B(\tau)z \quad (2.38)$$

с показателем $-\beta = -\lambda + \alpha M$, где $-\lambda$ – показатель экспоненциальной устойчивости системы (2.33).

Пусть $\Phi(\tau), \Phi(0) = E$ – фундаментальная матрица системы (2.38). Решение системы (2.35) с начальными данными (2.36), принадлежащее области

$$\|z(\tau) e^{-M\alpha\tau} + x_1\| < C_1, \quad \tau \in [0, +\infty) \quad (2.39)$$

примет вид

$$z(\tau) = -\Phi(\tau)x_1 + \int_0^\tau \Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)g_1(z, t)dt \quad (2.40)$$

На основании оценки (2.30) получаем

$$\|\Phi(\tau)\| \leq K e^{-\beta\tau} \quad (2.41)$$

K – постоянная величина, вообще говоря, зависящая от β .

Заменим неравенство (2.39) более жестким

$$\|z(\tau)\| < C_1 - \|x_1\|; \quad \tau \in [0, \infty) \quad (2.42)$$

Из соотношений (2.37), (2.40) следует

$$\|z(\tau)\| \leq K e^{-\beta\tau} \|x_1\| + \int_0^{\tau} e^{-\beta(\tau-t)} K \Delta \|z(t)\| dt \quad (2.43)$$

$$\Delta = L(C_1 - \|x_1\|)$$

откуда в соответствии с известными результатами [3] имеем

$$\|z(\tau)\| \leq K e^{-\mu\tau} \|x_1\|, \quad \mu = \beta - K\Delta \quad (2.44)$$

Предположим, что

$$\mu = \beta - K\Delta > 0 \quad (2.45)$$

Пусть для x_1, u_1 выполнены условия

$$(K+1)\|x_1\| < C_1$$

$$\|\delta_k(0)T_k^{-1}(0)S_k^{-1}\|K\|x_1\| + \|u_1\| < C_2 \quad (2.46)$$

Если подставить функции (2.40) в формулы (2.34), (2.28), (2.11), (2.4), (2.5), то, согласно выводу уравнений (1.2), (2.6), (2.9), (2.12), правомерность которых гарантируется условиями (2.46), (2.42), (2.39), (2.13), (2.10), (2.7), (2.3), получим решение поставленной задачи.

На основании изложенного справедлива

Теорема. Пусть для величин C_1, C_2, α , векторов x_1, u_1 и постоянной K (определенной значениями $\lambda_{k_i}^j (i=1, \dots, r; j=1, \dots, k_i)$, удовлетворяющими неравенствам (2.27)), выполнены условия (2.1), (2.45), (2.46), а также матрица (2.15) невырожденная. Тогда существует решение поставленной задачи, которое сводится к решению задачи стабилизации линейной стационарной системы, интегрированию системы (2.35), (2.36) и последующему переходу к исходным переменным t, x по формулам (2.34), (2.11), (2.12), (2.5), (2.4).

3. Решение задачи межорбитального перелета. В качестве иллюстрации предложенного метода приведем решение задачи перевода материальной точки переменной массы $m(t)$, движущейся по круговой орбите радиуса r_0 вокруг массы M с постоянной угловой скоростью α_0 в центральном поле тяготения, в заданную точку, лежащую в плоскости этой орбиты. В качестве управляющего воздействия выбрана реактивная сила. Система уравнений в отклонениях относительно указанного движения по круговой орбите имеет вид [4]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = v_1(x_1, x_4) + u_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4, \quad \dot{x}_4 = v_2(x_1, x_2, x_4) + v_3(x_1)u_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} x_1 &= r - r_0, \quad x_2 = \dot{r}, \quad x_3 = \psi - \alpha_0 t, \quad x_4 = \dot{\psi} - \alpha_0 \\ u_1 &= a_r \dot{m} / m, \quad u_2 = a_\psi \dot{m} / m \end{aligned}$$

$$v_1 = -\frac{v}{(x_1 + r_0)^2} + (x_1 + r_0)(x_4 + \alpha_0)^2$$

$$v_2 = -2 \frac{x_2(x_4 + \alpha_0)}{x_1 + r_0}, \quad v_3 = \frac{1}{x_1 + r_0}$$

$\dot{r}$ – радиальная скорость точки, ψ – полярный угол, $\dot{\psi}$ – скорость изменения полярного угла, a_r, a_ψ – проекции вектора относительной скорости отделяющейся частицы на направление радиуса и поперечного направления соответственно, $v = v^0 M$, v^0 –

постоянная всемирного тяготения. Условия (1.3), (1.5), (2.1) примут вид

$$\|x\| < C_1, \quad x = (x_1, \dots, x_4)^*, \quad \|u\| < C_2, \quad u = (u_1, u_2)^* \quad (3.2)$$

$$x(0) = 0; \quad x(t) \rightarrow x^1 \quad \text{при} \quad t \rightarrow 1$$

$$x^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1)^*, \quad u^1 = (u_1^1, u_2^1)^*$$

$$x_2^1 = 0, \quad x_4^1 = 0; \quad u_1^1 = -v_1(x_1^1), \quad u_2^1 = -\frac{v_2(x_1^1)}{v_3(x_1^1)} = 0 \quad (3.3)$$

Ограничения (2.13) и матрицы P, Q, S в правой части системы (2.12) запишутся так:

$$\|x^1 + c\| < C_1, \quad \|u^1 + d\| < C_2, \quad c = (c_1, \dots, c_4), \quad d = (d_1, d_2) \quad (3.4)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \beta_0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \beta_0 a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \beta_0 \\ 0 & a_{42} & \beta_0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{21} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1^1), \quad a_{24} = \frac{\partial v_1}{\partial x_4}(x_1^1), \quad a_{42} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x_1^1), \quad \beta_0 = v_3(x_1^1)$$

Очевидно, $\det S \neq 0$ для всех x_1^1, x_3^1 . Отсюда следует стабилизируемость системы (2.14) независимо от выбора x_1^1, x_3^1 .

После решения задачи стабилизации системы (2.14) найдем по формуле (2.28) функции d_1, d_2 , которые обеспечивают экспоненциальную устойчивость замкнутой системы (2.14) с показателем $-\lambda(\alpha) < 0$ для всех $\alpha \in [0, +\infty)$. Оценивая смешанные частные производных второго порядка по x_i ($i = 1, \dots, 4$) и u_i ($i = 1, 2$) от правых частей системы (3.1) с учетом ограничений (3.4) и считая, что α выбирается из ограниченной области, получим постоянные M, L . Решив неравенство $-\lambda(\alpha) + \alpha M < 0$, найдем постоянную

$$-\beta = -\lambda(\alpha_0) + \alpha_0 M < 0$$

После оценки нормы фундаментальной матрицы системы (2.38) (это можно сделать с помощью оценки фундаментальной матрицы системы (2.14), замкнутой стабилизирующими управлениями) будем иметь постоянную K . Далее подбираем x_1^1, x_3^1 так, чтобы были выполнены условия (2.45), (2.46).

На заключительном этапе решаем задачу Коши для системы (2.31) с выбранными начальными данными $(-x_1^1, 0, -x_3^1, 0)$ и переходим к исходной независимой переменной t по формуле (2.8). В результате получим пару функций

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_4(t))^*, \quad u(t) = (u_1(t), u_2(t))^*$$

удовлетворяющую системе (3.1) и условиям (3.2).

4. Численное моделирование. В процессе численного моделирования интегрировалась вспомогательная система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = v_1(x_1 + x_1^1, x_4) + u_1 + u_1^1, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = v_2(x_1 + x_1^1, x_2, x_4) + v_3(x_1 + x_1^1)u_2$$

где

$$u_1^1 = \frac{v}{(x_1^1 + r_0)^2} - (x_1^1 + r_0)\alpha_0^2$$

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{v}{r_0^3}} \text{ с}^{-1}, \quad x_1^1 = 100, \quad r_0 = 7 \cdot 10^6 \text{ м}, \quad x_3^1 = \alpha_0 \cdot 10^{-6}$$

на промежутке $[0, 0,99]$ с начальными данными

$$x_1(0) = -x_1^1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = -x_3^1, \quad x_4(0) = 0$$

замкнутая управлениями

$$u_1 = -\frac{1}{\alpha^3 a_{42}} [a_{42} e^{2\alpha\tau} \alpha((\gamma_2 - 6)\alpha -$$

$$-(\gamma_1 - 11))x_1 - (\gamma_2 - 6)\alpha^2 a_{42} e^{\alpha\tau} x_2 + 6e^{3\alpha\tau} x_3]$$

$$u_2 = -\frac{4e^{\alpha\tau}}{\alpha\beta_0} (a_{42}x_1 - x_4)$$

$$\alpha = 1/4, \quad \gamma_2 = 3\alpha, \quad \gamma_1 = 2\alpha^2 - \alpha^2 e^{-2\alpha\tau} \gamma_{23}$$

$$\gamma_{23} = a_{21} + a_{24}a_{42}$$

На фигуре представлены графики, соответствующие искомым функциям фазовых координат $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ и управлениям $u_1(t)$, $u_2(t)$, являющимся программным движением для системы (3.1).

Предварительный анализ результатов моделирования позволяет сделать следующие выводы:

1) наибольшие энергетические затраты управления приходятся на $u_1(t)$ и при этом напрямую зависят от x_1^1 и времени перехода;

2) постоянная L имеет порядок 10^{-6} , поэтому выбор значения α не представляет особого труда;

3) задача межорбитального перелета легко решается с помощью персональных ЭВМ средних возможностей.

Компьютерное моделирование осуществил В.Ф. Ануфриев.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-01188).

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Наука, 1971. 400 с.
2. Zubov B.I. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.
3. Bellman R., Cooke K.L. Differential-Difference equations. N.Y.; L.: Acad. Press, 1963. = Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
10.VII.2000

