

УДК 531.36:62–50

© 2001 г.

В.И. Максимов, Л. Пандолфи

О РЕКОНСТРУКЦИИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Рассматривается задача динамического восстановления переменного входа нелинейной динамической системы по результатам неточных наблюдений ее фазовой траектории. Указывается алгоритм ее решения, который основан на методе управления с моделью. Алгоритм устойчив к информационным помехам и погрешностям вычислений.

1. Введение. Постановка задачи. Рассматривается динамическая система, описываемая нелинейным дифференциальным уравнением

$$\dot{y}(t) = f_1(y(t)) + B_1 u(t), \quad t \in [0, T], \quad y(0) = y_0; \quad y \in R^q \quad (1.1)$$

где B_1 – $(q \times n)$ -мерная матрица, f_1 – $(q \times q)$ -мерная матричная функция, удовлетворяющая условию Липшица. Траектория системы $y(t)$ зависит от меняющегося во времени входного воздействия (его роль, как правило, играет управление) $u(t)$. Заранее как это воздействие, так и траектория не заданы. Известно лишь, что $u(t)$ – функция, суммируемая с квадратом нормы, т.е.

$$u(\cdot) \in L_2([0, T]; R^n) \quad (1.2)$$

В процессе движения наблюдается некоторый сигнал, характеризующий фазовое состояние системы. Именно в дискретные, достаточно частые моменты времени $\tau_i \in [0, T]$ наблюдается, с ошибкой, величина

$$x(\tau_i) = Cy(\tau_i) \in R^N$$

Результаты измерений – векторы $\xi_i^h \in R^N$, такие, что

$$\xi_i^h = x(\tau_i) + z_i, \quad |z_i| \leq h$$

Здесь C – $(q \times N)$ -мерная матрица, величина h характеризует точность измерения. Требуется построить алгоритм приближенного восстановления входа, обладающий свойствами динамичности и устойчивости. Свойство динамичности означает, что текущие значения приближения входа вырабатываются в реальном времени, свойство устойчивости – что приближение сколь угодно точно при достаточной точности наблюдения. Такова содержательная постановка рассматриваемой в работе задачи.

Иными словами, цель работы состоит в конструировании алгоритма приближенного восстановления (или, как часто говорят [1, 2], реконструкции) входа – вычисления некоторого управления $v_h(\cdot) = \{v^h(\cdot), v^h(\cdot)\}$, такого, что функция $v^h(\cdot)$ играет роль своего рода "оценки" приближения $u(\cdot)$. Авторы рассчитывают, во-первых, восстанавливать к произвольному текущему моменту времени $t \in [0, T]$ всю предысторию входа $u(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t$, используя информацию также лишь о предыстории

процесса (измерения ξ_i^h , отвечающие моментам $\tau_i < t$). Во-вторых, процесс восстановления входа $u(\tau)$, $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ будем осуществлять лишь после вычисления управления $v_i^h(\tau)$ на предыдущем промежутке времени, т.е. при $\tau \in [0, \tau_i]$. При этом будем использовать также новую информацию о траектории – вектор ξ_i^h .

Сформулированная выше задача относится к классу обратных задач динамического оценивания неизвестных характеристик по результатам измерений. Подобные задачи исследовались (см., например, [3–6]). Был предложен [7] динамический алгоритм реконструкции входа $u(\cdot)$ в предположении, что задано ограниченное и замкнутое множество $P \subset R^n$ со свойством

$$u(t) \in P \text{ при почти всех } t \in [0, T] \quad (1.3)$$

Алгоритм основывается на комбинации известного в теории гарантированного управления методе позиционного управления с моделью [8], а также одного из основных инструментов теории некорректных задач [9] – методе сглаживающего функционала (методе Тихонова). В дальнейшем алгоритм работы [7] был развит для различных классов систем, описываемых: а) обыкновенными дифференциальными уравнениями [1, 10], б) уравнениями с запаздыванием [11], в) параболическими и гиперболическими уравнениями [2, 12–14]. При этом во всех цитированных выше работах условие (1.3) играло принципиальную роль.

Ниже указанный алгоритм модифицируется так, чтобы было возможно восстанавливать неограниченное управление. Именно управление, априорная информация о котором имеет вид (1.2). Заметим, что был предложен [15, 16] другой метод восстановления неограниченных управлений (основанный на так называемом методе невязки [9]).

2. Алгоритм восстановления. Прежде чем переходить к описанию алгоритма восстановления, введем следующее условие, которое в дальнейшем будем считать выполненным.

Условие 1. Существует липшицева функция $f(z): R^N \rightarrow R^N$, такая, что

$$Cf_1(y) = f(Cy)$$

для любых $y \in R^q$.

Следуя описанной ранее методике [1, 7], для решения рассматриваемой задачи выберем семейство разбиений

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = T, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h)$$

отрезка $[0, T]$ с диаметрами $\delta(h)$ и функцию $\alpha(h)$ (регуляризатор). Функции $\delta(h) \in (0, 1)$ и $\alpha(h) \in (0, 1)$ выбираем таким образом, чтобы были выполнены следующие условия:

$$\delta(h) \rightarrow 0, \quad \alpha(h) \rightarrow 0, \quad \frac{h + \delta(h)}{\alpha(h)} \rightarrow 0, \quad \frac{h^2}{\delta(h)} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

Затем введем вспомогательную управляемую систему (модель)

$$\dot{w}(t) = f(\xi_i^h) + Bv_i^h(t) + v_i^h(t), \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}) \quad (2.2)$$

с начальным условием $w(0) = \xi_0^h$. Здесь $B = CB_1$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину h и разбиение $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$. Работу алгоритма разобьем на $m - 1$ однотипных шагов. На i -м шаге, осуществляемом на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i , вычисляются векторы v_i^h и v_i^h по формулам

$$v_i^h = \frac{1}{\alpha} B'(\xi_i^h - w(\tau_i)), \quad v_i^h = c \frac{\delta}{\alpha^2} (\xi_i^h - w(\tau_i)) \quad (2.3)$$

Здесь $c = \text{const} > 0$, штрих означает транспонирование. Затем на вход модели подаются управления

$$v^h(t) = v_i^h \text{ и } v^h(t) = v_i^h, \quad t \in \delta_i \quad (2.4)$$

Под действием этих двух управлений модель (2.2) переводится из состояния $w(\tau_i)$ в состояние $w(\tau_{i+1})$. Работа алгоритма заканчивается в момент T .

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия (2.1). Тогда имеет место сходимость

$$v^h(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot) \text{ в } L_2([0, T]; R^n) \text{ при } h \rightarrow 0$$

Здесь $u_*(\cdot) = u_*(\cdot; x(\cdot))$ – элемент множества $U(x(\cdot))$ минимальной $L_2([0, T]; R^n)$ – нормы, $U(x(\cdot))$ – множество всех управлений $u(\cdot) \in L_2([0, T]; R^n)$, совместимых с выходом $x(\cdot)$.

Имеет место

Лемма 1. Множество $U(x(\cdot))$ выпукло и замкнуто в пространстве $L_2([0, T]; R^n)$.

В силу этой леммы элемент $u_*(\cdot; x(\cdot))$ определяется однозначно.

Доказательство теоремы проводится по стандартной схеме (см., например, [1, 7, 12]) и опирается на приведенную ниже лемму 2. При обосновании этой леммы существенную роль играет свойство липшицевости функции f :

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

которое влечет при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ оценку

$$|f(x(t)) - f(\xi_i^h)| \leq k_0 Q, \quad k_0 = L \max\{1, |\dot{x}|_{L^2(0, T)}\}, \quad Q = h + \delta^{1/2} \quad (2.5)$$

Следует также отметить, что в основе доказательства сходимости алгоритма лежит процедура стабилизации функционала типа Ляпунова

$$\mu(t) = |w_h(t) - x(t)|^2 + \alpha \int_0^t [|v^h(s)|^2 - |u_*(s)|^2] ds \quad (2.6)$$

где $w_h(\cdot) = w(\cdot; \xi_0^h, v^h(\cdot))$ – фазовая траектория модели (2.2).

Лемма 2. Пусть

$$c > 8b^2, \quad 4\left(4bc + 2c^2 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}cb^3 + \frac{1}{2}c\right)\frac{\delta}{\alpha} \leq c, \quad \frac{\delta}{\alpha} \leq 1 \quad (2.7)$$

($b = |B|$ – норма матрицы B). Тогда можно указать (в явном виде) постоянные d_0 и d_1 , такие, что справедливы неравенства

$$|x_i - w_i|^2 \leq d_0(h + \delta + \alpha), \quad x_i = x(\tau_i), \quad w_i = w_h(\tau_i) \quad (2.8)$$

$$\int_0^T |v^h(\tau)|^2 d\tau \leq \int_0^T |u_*(\tau)|^2 d\tau + d_1 \frac{h + \delta}{\alpha} \quad (2.9)$$

Доказательство. Рассмотрим величину

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} |x(t) - w_h(t)|^2$$

Для почти всех $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ имеем

$$\dot{\varepsilon}(t) = (x_i - w_i + \int_{\tau_i}^t \{f^i(\tau) + B^i(\tau) - v_i^h\} d\tau, \quad f^i(t) + B^i(t) - v_i^h)$$

$$(f^i(t) = f(x(t)) - f(\xi_i^h), \quad B^i(t) = B(u_*(t) - v_i^h))$$

После интегрирования правой и левой частей этого равенства получаем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_i + \sum_{j=0}^7 M_i^j(t) + v_i^1(t) + v_i^2(t) - \int_{\tau_i}^t (x_i - w_i, v_i^h) d\tau$$

где

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2} |x_i - w_i|^2, \quad M_i^j(t) = \int_{\tau_i}^t \mu_i^{(j)}(\tau) d\tau$$

$$\mu_i^{(0)}(t) = \left(\int_{\tau_i}^t B^i(\tau) d\tau, v_i^h \right), \quad \mu_i^{(1)}(t) = (t - \tau_i) |v_i^h|^2$$

$$\mu_i^{(2)}(t) = (x_i - w_i, f^i(t)), \quad \mu_i^{(3)}(t) = \left(\int_{\tau_i}^t f^i(\tau) d\tau, f^i(t) \right)$$

$$\mu_i^{(4)}(t) = -\left(\int_{\tau_i}^t f^i(\tau) d\tau, v_i^h \right), \quad \mu_i^{(5)}(t) = -\delta(v_i^h, f^i(t))$$

$$\mu_i^{(6)}(t) = -\delta(v_i^h, B^i(t)), \quad \mu_i^{(7)}(t) = \int_{\tau_i}^t (x_i - w_i, B^i(\tau)) d\tau$$

$$v_i^1(t) = 2\left(\int_{\tau_i}^t f^i(\tau) d\tau, \int_{\tau_i}^t B^i(\tau) d\tau \right), \quad v_i^2(t) = \left| \int_{\tau_i}^t B^i(\tau) d\tau \right|^2; \quad t \in \delta_i$$

Видно, что

$$|v_i^h| = \left| \frac{B'(w_i - \xi_i^h)}{\alpha} \right| \leq \frac{b}{\alpha} Q_i, \quad |v_i^h| \leq \frac{c\delta}{\alpha^2} Q_i; \quad Q_i = h + \varepsilon_i^{1/2} \quad (2.10)$$

Кроме того, имеем

$$M_i^0 \leq b \left\{ U_{i1} + \frac{\delta}{\alpha} Q_i \right\} \frac{c\delta^2}{\alpha} Q_i \leq b \left(\frac{\delta}{c} U_{i2} + 4ch^2 + 4c \frac{\delta^3}{\alpha^3} \varepsilon_i \right) \quad (2.11)$$

$$U_{in} = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u_*(\tau)|^n d\tau$$

Из соотношений (2.10) следует

$$M_i^1 \leq c^2 \frac{\delta^4}{\alpha^4} Q_i^2 \leq 2c^2 \left(h^2 + \frac{\delta^3}{\alpha^3} \varepsilon_i \right), \quad t \in \delta_i \quad (2.12)$$

В свою очередь из соотношения (2.5) получаем оценку

$$M_i^2 \leq k_0 \varepsilon_i^{1/2} \delta Q \leq \frac{c}{4} \frac{\delta^2}{\alpha^2} \varepsilon_i + k_* \alpha^2 (h^2 + \delta), \quad t \in \delta_i, \quad Q = h + \delta^{1/2} \quad (2.13)$$

Нетрудно указать постоянную k_1 , такую, что

$$M_i^3 \leq k_1 \delta^2 \quad (2.14)$$

Воспользовавшись снова соотношениями (2.10) и (2.5), будем иметь

$$\begin{aligned} M_i^4 &\leq k_0 c \frac{\delta^3}{\alpha^2} Q_i Q \leq k_0 c \delta Q h + k_0^* \frac{\delta^3}{\alpha^2} \varepsilon_i^{1/2} \leq \\ &\leq k_0^{**} \delta h Q + (k_0^*)^2 \frac{\delta^3}{2\alpha} + \frac{\delta^3}{2\alpha^3} \varepsilon_i \leq \frac{\delta^3}{2\alpha^3} \varepsilon_i + k_2 \delta (h^2 + \delta + h\delta^{1/2}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$M_i^5 \leq k_0 c \frac{\delta^3}{\alpha^2} Q Q_i \leq \frac{\delta^3}{2\alpha^3} \varepsilon_i + k_2 \delta (h^2 + \delta + h\delta^{1/2}) \quad (2.16)$$

После алгебраических преобразований получаем

$$\begin{aligned} M_i^6(t) &\leq b^2 c \frac{\delta^2}{\alpha^2} Q_i \left(U_{i1} + \delta b \frac{Q_i}{\alpha} \right) \leq \\ &\leq \frac{5}{2} c b^3 \frac{\delta^3}{\alpha^3} \varepsilon_i + 2 c b^3 h^2 + c b^2 h U_{i1} + \frac{1}{2} c \delta b U_{i2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$M_i^7(\tau_{i+1}) \leq \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\xi_i^h - w_i, B^i(\tau)) d\tau + b h \left(U_{i1} + b \frac{\delta Q_i}{\alpha} \right)$$

Кроме того,

$$b^2 h \frac{\delta}{\alpha} \varepsilon_i^{1/2} \leq \frac{1}{2} b^4 h^2 + \frac{\delta^2}{2 \alpha^2} \varepsilon_i$$

Тогда

$$M_i^7(\tau_{i+1}) \leq \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\xi_i^h - w_i, B^i(\tau)) d\tau + b h U_{i1} + b^2 h^2 \frac{\delta}{\alpha} + \frac{1}{2} b^4 h^2 + \frac{\delta^2}{2 \alpha^2} \varepsilon_i$$

Видно, что

$$M_i^7(\tau_i + 1) \leq \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\xi_i^h - w_i, B^i(\tau)) d\tau + b h U_{i1} + b^2 \left(1 + \frac{1}{2} b^2 \right) h^2 + \frac{\delta}{2 \alpha} \varepsilon_i$$

Следующие неравенства следуют из (2.10), (2.5) и неравенств $\frac{\delta}{\alpha} \leq 1$, $\delta \leq 1$:

$$\begin{aligned} v_i^1(t) &\leq 2 k_0 b \delta Q \left\{ b \frac{\delta}{\alpha} Q_i + U_{i1} \right\} \leq \\ &\leq \frac{\delta^3}{2 \alpha^3} \varepsilon_i + k_4 \{ \delta Q (Q + U_{i1}) \}, \quad t \in \delta_i \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$v_i^2(t) \leq b^2 \left(U_{i1} + \delta b \frac{Q_i}{\alpha} \right)^2 \leq 4 b^4 \frac{\delta^2}{\alpha^2} \varepsilon_i + 4 b^4 h^2 + 2 \delta b^2 U_{i2} \quad (2.19)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (x_i - w_i, v_i^h) d\tau &= -c \frac{\delta^2}{\alpha^2} (x_i - w_i, (\xi_i^h - w_i)) \leq \\ &\leq -c \frac{\delta^2}{\alpha^2} \varepsilon_i + c \frac{\delta^3}{2 \alpha^3} \varepsilon_i + \frac{1}{2} c \delta \alpha h^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Введем величину

$$\mu_i = 2 \varepsilon_i + \alpha \int_0^{\tau_i} \{ |v_i^h(\tau)|^2 - |u_*(\tau)|^2 \} d\tau$$

Объединяя соотношения (2.11)–(2.20), получаем

$$\begin{aligned} \mu_{i+1} &\leq d_1 \delta U_{i2} + d_2 (h + \delta^{3/2}) U_{i1} + d_3 (1 + \alpha^2 + \delta \alpha) h^2 + d_4 \delta^2 + \\ &+ d_5 (\alpha^2 + h^2 + \delta) \delta + \mu_i + 2 \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\xi_i^h - w_i, B^i(\tau)) d\tau + \alpha \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{ |v_i^h(\tau)|^2 - |u_*(\tau)|^2 \} d\tau + \\ &+ \left(4 b c + 2 c^2 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} c b^3 + \frac{1}{2} c \right) \frac{\delta^3}{\alpha^3} \varepsilon_i + \left(4 b^4 - \frac{3}{4} c \right) \frac{\delta^2}{\alpha^2} \varepsilon_i \end{aligned} \quad (2.21)$$

Кроме того,

$$|x(0) - \xi_0^h| \leq h \quad (2.22)$$

Из соотношений (2.7), (2.21), (2.22) вытекают неравенства (2.8), (2.9).

Из результатов [1] и леммы 2 вытекает

Лемма 3. Пусть $u_*(\cdot) = u_*(\cdot; x(\cdot))$ является функцией ограниченной вариации. Тогда имеет место следующая оценка скорости сходимости алгоритма:

$$|v^h(\cdot) - u_*(\cdot)|_{L^2(0,T)}^2 \leq c_1 \frac{h + \delta}{\alpha} + c_2(\alpha + \delta + h)^{1/2}$$

Здесь c_1 и c_2 – некоторые постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде.

Таким образом, если положить $\delta = \delta(h) \leq h$, $\alpha(h) = h^{2/3}$, то имеет место следующая оценка скорости сходимости алгоритма:

$$|v^h(\cdot) - u_*(\cdot)|_{L^2(0,T)}^2 \leq ch^{1/3}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS-96-0816), а также Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00046) и Программы поддержки ведущих научных школ России (00-15-96086) для первого автора, и итальянской программы MURST для второго автора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Gordon and Breach, 1995. 653 p.
2. Osipov Yu.S. On the reconstruction of a parameter for hyperbolic system. WP IIASA, Laxenburg, Austria, 1991. 32 p.
3. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
4. Гусев М.И., Куржанский А.Б. Обратные задачи динамики управляемых систем // Механика и научно-технический прогресс. Т. 1. Общая и прикладная механика. М.: Наука, 1987. С. 187–195.
5. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 319 с.
6. Овсеевич А.И., Трущенко В.Л., Черноусько Ф.Л. Уравнения непрерывного гарантированного оценивания состояния динамических систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. № 4. С. 94–101.
7. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
8. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
10. Krjažimskii A.V., Osipov Yu.S. On positional calculation of Ω -normal controls in dynamical systems // Problem Control and Inform. Theory. 1984. V. 13. № 6. P. 425–436.
11. Maksimov V.I. Problems of robust control and dynamical input reconstruction for time-delay systems // Proc. 5th Europ. Control Conf. Karlsruhe, Germany, 1999.
12. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И. Задачи динамической регуляризации для систем с распределенными параметрами. Свердловск: Ин-т мат. и мех. УрО РАН, 1991. 104 с.
13. Osipov Yu.S., Pandolfi L., Maksimov V.I. Problems of dynamical reconstruction and robust boundary control: the case of Dirichlet boundary conditions // Сб. докл. междунар. конф. "Распределенные

системы: оптимизация и приложения в экономике и науках об окружающей среде".
Екатеринбург: УрО РАН, 2000. С. 42–45.

14. Максимов В.И., Пандольфи Л. О реконструкции управлений в нелинейных распределенных системах // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 716–724.
15. Максимов В.И. О динамическом моделировании неизвестных возмущений в параболических вариационных неравенствах // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 743–750.
16. Maksimov V.I. On the reconstruction of a control through results of observations // Proc. 3rd Europ. Control Conf. Rome, Italy, 1995. P. 3766–3771.

Екатеринбург
e-mail: maksimov@imm.uran.ru
Турин
e-mail: lucipan@polito.it

Поступила в редакцию
4.V.2000