

УДК 62-50

Н.Ю. Лукоянов

О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИОНАЛА ЦЕНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ С НАСЛЕДСТВЕННОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

На основе понятия производных по многозначным направлениям даны дифференциальные неравенства, выражающие в инфинитезимальной форме определяющие свойства стабильности функционала цены дифференциальной игры с наследственной информацией [1–7]. Как следствие, получены критерии стабильности для кусочно ci -гладких [7, 8] функционалов и для огибающих семейства ci -гладких функционалов.

На основе развития подходов, ранее предложенных [9–12] для задач управления обыкновенными дифференциальными системами, в статье продолжены исследования [7, 13], посвященные задачам управления, осложненным эффектом последействия и формализуемым в дифференциальную игру с наследственной информацией. Было показано [7], что функционал цены этой игры является обобщенным, а именно минимаксным [11, 13], решением (МР) задачи Коши при условии на правом конце для уравнения типа Гамильтона – Якоби с коинвариантными (ci -) производными [8, 13]. Определение МР дано в [7, 13] через нелокальные свойства стабильности относительно характеристических дифференциальных включений с последействием. Такое определение отвечает содержательному смыслу задачи. Оно удобно, например, для доказательства соответствующих теорем [13] существования, единственности и корректности. Однако в конкретных задачах проверить выполнение нужных свойств стабильности для найденного при помощи вспомогательных построений решения нередко бывает достаточно затруднительно. Полученные ниже, эквивалентные по сути названным свойствам стабильности, дифференциальные неравенства относительно производных функционала цены по многозначным направлениям часто, в том числе для кусочно ci -гладких функционалов, а также огибающих семейства ci -гладких функционалов, оказываются более удобными для проверки.

1. Коинвариантные производные и производные по многозначным направлениям.

Будем обозначать через $C([t_1, t_2], R^n)$, где $t_1, t_2 \in R, t_1 \leq t_2$, пространство непрерывных функций $x[\cdot] = x[t_1[\cdot]t_2] : [t_1, t_2] \mapsto R^n$. При этом через $x[t]$ будем обозначать значение функции $x[\cdot]$ в точке $t \in [t_1, t_2]$, а через $x[t'[\cdot]t'']$ – ее сужение на $[t', t''] \subset [t_1, t_2]$. Пусть $t_*, t_0, T \in R, t_* \leq t_0 < T, C_* = C([t_*, T], R^n)$ и G – множество пар $g = (t, x[t_*[\cdot]t])$, таких, что $t \in [t_0, T], x[t_*[\cdot]t] \in C([t_*, t], R^n)$. На G определим функцию расстояния

$$\rho(g_1, g_2) = \max \{ \rho^*(g_1, g_2), \rho^*(g_2, g_1) \} \quad (1.1)$$

где

$$g_1 = (t_1, x^{(1)}[t_*[\cdot]t_1]) \in G, \quad g_2 = (t_2, x^{(2)}[t_*[\cdot]t_2]) \in G$$

$$\rho^*(g_{i+1}, g_{2-i}) = \max_{t_* \leq \xi \leq t_{i+1}} \min_{t_* \leq \eta \leq t_{2-i}} \max \{ \|\xi - \eta\|, \|x^{(i+1)}[\xi] - x^{(2-i)}[\eta]\| \}, \quad i = 0, 1$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора.

Всюду ниже свойства непрерывности рассматриваемых величин по аргументу $g = (t, x[t_*[\cdot]t])$ понимаются относительно его изменения, оцениваемого функцией ρ .

Рассмотрим функционал

$$G \ni g = (t, x[t_*, \cdot | t]) \mapsto \varphi(g) = \varphi(t, x[t_*, \cdot | t]) \in R$$

Зафиксируем $g = (t, x[t_*, \cdot | t]) \in G$, $t < T$. Через $\text{Lip}(g)$ обозначим множество функций $y[\cdot] \in C_*$, совпадающих с $x[t_*, \cdot | t]$ на $[t_*, t]$, каждая из которых с некоторой (своей) константой удовлетворяет на $[t, T]$ условию Липшица. Будем говорить [7, 8, 13], что функционал φ коинвариантно дифференцируем в точке g относительно $\text{Lip}(g)$ (сі-дифференцируем в g), если существуют такие число $\partial_t \varphi(g)$ и n -вектор $\nabla \varphi(g)$, что для любой функции $y[\cdot] \in \text{Lip}(g)$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \varphi(t + \delta, y[t_*, \cdot | t + \delta]) - \varphi(t, x[t_*, \cdot | t]) = \\ & = \partial_t \varphi(g) \delta + \langle \nabla \varphi(g), y[t + \delta] - x[t] \rangle + o_{y[\cdot]}(\delta), \quad \delta \in [0, T - t] \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $o_{y[\cdot]}(\delta)$ зависит от выбора $y[\cdot] \in \text{Lip}(g)$, $o_{y[\cdot]}(\delta)/\delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$.

Здесь и далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов.

Величины $\partial_t \varphi(g)$ и $\nabla \varphi(g)$ назовем соответственно сі-производной по t и сі-градиентом функционала φ в точке g . Функционал φ назовем сі-дифференцируемым, если он сі-дифференцируем в каждой точке $g = (t, x[t_*, \cdot | t]) \in G$, $t < T$. Непрерывный сі-дифференцируемый функционал φ будем называть сі-гладким.

Заметим, что класс сі-гладких функционалов достаточно широк. Например, многие функционалы, представимые в интегральной форме, оказываются сі-гладкими; при этом в большинстве случаев сі-производные могут быть вычислены стандартными способами, опирающимися на правила дифференцирования обычных функций конечномерного аргумента. Более подробные сведения о свойствах, способах вычисления и некоторых применениях сі-производных функционалов можно найти в [8].

Пусть $g = (t, x[t_*, \cdot | t]) \in G$, $t < T$, $y[\cdot] \in \text{Lip}(g)$, $\varepsilon > 0$, непустое множество $F \subset R^n$ – выпуклый компакт. Символом $[F]^\varepsilon$ будем обозначать замкнутую ε -окрестность множества F в R^n . Положим

$$\begin{aligned} \partial^- \varphi(g | y[\cdot]) &= \lim_{\delta \downarrow 0} \inf [\varphi(t + \delta, y[t_*, \cdot | t + \delta]) - \varphi(g)] \delta^{-1} \\ \partial^+ \varphi(g | y[\cdot]) &= \lim_{\delta \downarrow 0} \sup [\varphi(t + \delta, y[t_*, \cdot | t + \delta]) - \varphi(g)] \delta^{-1} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\Omega(g, F, \varepsilon) = \{y[\cdot] \in \text{Lip}(g) : dy[\tau]/d\tau \in [F]^\varepsilon \text{ п.в. } \tau \in [t, T]\} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} d^- \varphi(g | F) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{y[\cdot] \in \Omega(g, F, \varepsilon)} \partial^- \varphi(g | y[\cdot]) \\ d^+ \varphi(g | F) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{y[\cdot] \in \Omega(g, F, \varepsilon)} \partial^+ \varphi(g | y[\cdot]) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Величины $\partial^- \varphi(g | y[\cdot])$ и $\partial^+ \varphi(g | y[\cdot])$ являются соответственно нижним и верхним правыми производными числами функционала φ в точке g вдоль функции $y[\cdot]$. Величины $d^- \varphi(g | F)$ и $d^+ \varphi(g | F)$ назовем соответственно нижней и верхней производными (правыми) функционала φ в точке g по многозначному направлению F . Отметим, что эти производные могут принимать несобственные значения $-\infty$ и $+\infty$.

Утверждение 1. Если функционал $\varphi : G \mapsto R$ сі-дифференцируем в точке g , то для любого выпуклого компакта $F \subset R^n$ справедливы равенства

$$d^- \varphi(g | F) = \partial_t \varphi(g) + \min_{f \in F} \langle \nabla \varphi(g), f \rangle \quad (1.6)$$

$$d^+ \varphi(g | F) = \partial_t \varphi(g) + \max_{f \in F} \langle \nabla \varphi(g), f \rangle$$

Доказательство. С одной стороны, для любых $\varepsilon > 0$ и $y[\cdot] \in \Omega(g, F, \varepsilon)$, учитывая (1.2), (1.3) и теорему о среднем значении вектор-функции (см., например, [14, с. 51]), выводим

$$\partial^- \varphi(g | y[\cdot]) \geq \partial_t \varphi(g) + \min_{f \in [F]^\varepsilon} \langle \nabla \varphi(g), f \rangle = \partial_t \varphi(g) + \min_{f \in F} \langle \nabla \varphi(g), f \rangle - \|\nabla \varphi(g)\| \varepsilon$$

поэтому, в согласии с (1.5), справедливо неравенство

$$d^- \varphi(g | F) \geq \partial_t \varphi(g) + \min_{f \in F} \langle \nabla \varphi(g), f \rangle \quad (1.7)$$

С другой стороны, так как для любых $\varepsilon > 0$ и $f \in F$ функция

$$y_f[\cdot] = \{y_f[\tau] = x[\tau], \tau \in [t_*, t]; y_f[\tau] = x[t] + f(\tau - t), \tau \in (t, T]\} \quad (1.8)$$

принадлежит множеству $\Omega(g, F, \varepsilon)$, вновь используя (1.2), имеем

$$d^- \varphi(g | F) \leq \inf_{f \in F} \partial^- \varphi(g | y_f[\cdot]) = \partial_t \varphi(g) + \min_{f \in F} \langle \nabla \varphi(g), f \rangle \quad (1.9)$$

Неравенства (1.7) и (1.9) доказывают первое из равенств (1.6). Второе равенство проверяется аналогично.

Пусть

$$\varphi(g) = \min_{i \in I} \max_{j \in J} \psi_{ij}(g), \quad g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G \quad (1.10)$$

где $\psi_{ij} : G \mapsto R$ – ci -гладкие функционалы ($i \in I, j \in J$), I и J – конечные множества.

Функционалы $\varphi : G \mapsto R$, представимые в виде (1.10), будем называть кусочно ci -гладкими. Обозначим

$$I_0(g) = \{i_0 \in I : \max_{j \in J} \psi_{i_0 j}(g) = \varphi(g)\}$$

$$J_0(g, i) = \{j_0 \in J : \psi_{ij_0}(g) = \max_{j \in J} \psi_{ij}(g)\} \quad (1.11)$$

$$\omega_0(g, \xi, z) = \min_{i \in I_0(g)} \max_{j \in J_0(g, i)} [\partial_t \psi_{ij}(g) \xi + \langle \nabla \psi_{ij}(g), z \rangle] \quad (1.12)$$

Утверждение 2. Пусть $\varphi : G \mapsto R$ – кусочно ci -гладкий функционал (1.10). Тогда для любого выпуклого компакта $F \subset R^n$ справедливы равенства

$$d^- \varphi(g | F) = \min_{f \in F} \omega_0(g, 1, f), \quad d^+ \varphi(g | F) = \max_{f \in F} \omega_0(g, 1, f) \quad (1.13)$$

$$g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G, \quad t < T$$

Доказательство. Пусть $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$, $t < T$, $\varepsilon > 0$, $y[\cdot] \in \Omega(g, F, \varepsilon)$. Поскольку функционалы ψ_{ij} непрерывны, а множества I и J конечны, найдется такое число $\delta_0 > 0$, что для всех $\delta \in (0, \delta_0]$ и $i \in I$ будут справедливы включения

$$I_0(t + \delta, y[t_*[\cdot]t + \delta]) \subset I_0(g), \quad J_0(t + \delta, y[t_*[\cdot]t + \delta], i) \subset J_0(g, i)$$

Учитывая это и (1.10), (1.11), в силу ci -дифференцируемости функционалов ψ_{ij} получаем

$$\varphi(g) = \psi_{ij}(g), \quad i \in I_0(g), \quad j \in J_0(g, i)$$

$$\varphi(t + \delta, y[t_*[\cdot]t + \delta]) - \varphi(g) = \min_{i \in I_0(g)} \max_{j \in J_0(g, i)} [\psi_{ij}(t + \delta, y[t_*[\cdot]t + \delta]) - \psi_{ij}(g)] =$$

$$= \min_{i \in I_0(g)} \max_{j \in J_0(g, i)} [\partial_t \psi_{ij}(g) \delta + \langle \nabla \psi_{ij}(g), y[t + \delta] - x[t] \rangle + o_{y[\cdot]}(\delta; i, j)], \quad \delta \in (0, \delta_0]$$

Так как I и J конечны, существует функция $o_{y[\cdot]}^*(\delta)$ такая, что $|o_{y[\cdot]}(\delta; i, j)| \leq o_{y[\cdot]}^*(\delta)$ для всех $i \in I_0(g), j \in J_0(g, i)$ и $\delta \in (0, \delta_0]$, $o_{y[\cdot]}^*(\delta)/\delta \rightarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$. Таким образом, заключаем, что

для любых $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$, $t < T$, $\varepsilon > 0$, $y[\cdot] \in \Omega(g, F, \varepsilon)$ и $\delta \in (0, T - t]$ имеет место равенство

$$\varphi(t + \delta, y[t_*[\cdot]t + \delta]) - \varphi(g) = \omega_0(g, \delta, y[t + \delta] - x[t]) + o_{y[\cdot]}(\delta) \quad (1.14)$$

Равенства (1.13) выводятся из (1.3)–(1.5) и (1.12), (1.14) при помощи рассуждений, подобных приведенным выше, при доказательстве утверждения 1.

Рассмотрим функционал

$$\varphi(g) = \max_{l \in L} [\psi(g, l) + v(l)], \quad g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G \quad (1.15)$$

где $L \subset R^n$ – непустой компакт, $v: L \rightarrow R$ – полунепрерывная сверху функция, $\psi(g, l): G \times L \rightarrow R$ – непрерывный функционал (причем по g – равностепенно относительно $l \in L$) ψ -дифференцируемый при любом фиксированном $l \in L$, ψ -производные $\partial_t \psi(g, l) \in R$ и $\nabla \psi(g, l) \in R^n$ которого непрерывны по l на L при любом фиксированном $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$, $t < T$, и при этом, "о малое" в соответствующем равенстве типа (1.2) не зависит от выбора $l \in L$.

Обозначим

$$L^0(g) = \{l^0 \in L : \varphi(g) = \psi(g, l^0) + v(l^0)\} \quad (1.16)$$

$$\lambda^0(g, f) = \max_{l \in L^0(g)} [\partial_t \psi(g, l) + \langle \nabla \psi(g, l), f \rangle] \quad (1.17)$$

Множество $L^0(g)$ будет непустым компактом для любого $g \in G$.

Утверждение 3. Пусть функционал $\varphi: G \rightarrow R$ представим в виде (1.15). Тогда для любого выпуклого компакта $F \subset R^n$ справедливы равенства

$$d^- \varphi(g | F) = \min_{f \in F} \lambda^0(g, f), \quad d^+ \varphi(g | F) = \max_{f \in F} \lambda^0(g, f) \quad (1.18)$$

$$g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G, \quad t < T$$

Доказательство. Докажем первое из равенств (1.18). Пусть $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$, $t < T$, $\varepsilon > 0$, $y[\cdot] \in \Omega(g, F, \varepsilon)$ и последовательность $\delta_j \downarrow 0$ ($j = 1, 2, \dots$) такова, что

$$\partial^- \varphi(g | y[\cdot]) = \lim_{j \rightarrow \infty} [\varphi(t + \delta_j, y[t_*[\cdot]t + \delta_j]) - \varphi(g)] \delta_j^{-1} \quad (1.19)$$

Обозначим $f_j = (y[t + \delta_j] - x[t]) \delta_j^{-1}$ ($j = 1, 2, \dots$). Так как $y[\cdot] \in \Omega(g, F, \varepsilon)$ (см. (1.4)) и $F \subset R^n$ – выпуклый компакт, по теореме о среднем значении вектор-функции имеем $f_j \in [F]^\varepsilon$, при этом без ограничения общности дальнейших рассуждений можно принять, что $f_j \rightarrow f_* \in [F]^\varepsilon$ при $j \rightarrow \infty$. Пусть $l^0 \in L^0(g)$. Тогда из (1.19), учитывая (1.15), (1.16) и ψ -дифференцируемость функционала $\psi(g, l^0)$, выводим

$$\begin{aligned} \partial^- \varphi(g | y[\cdot]) &\geq \lim_{j \rightarrow \infty} [\psi(t + \delta_j, y[t_*[\cdot]t + \delta_j], l^0) - \psi(g, l^0)] \delta_j^{-1} = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} [\partial_t \psi(g, l^0) + \langle \nabla \psi(g, l^0), f_j \rangle + o_{y[\cdot]}(\delta_j) \delta_j^{-1}] = \partial_t \psi(g, l^0) + \langle \nabla \psi(g, l^0), f_* \rangle \end{aligned}$$

Данные соотношения имеют место для любого $l^0 \in L^0(g)$, поэтому, если учесть (1.17), а также что $f_* \in [F]^\varepsilon$, далее получаем

$$\partial^- \varphi(g | y[\cdot]) \geq \lambda^0(g, f_*) \geq \min_{f \in [F]^\varepsilon} \lambda^0(g, f) \geq \min_{f \in F} \lambda^0(g, f) - \varepsilon \max_{l \in L} \|\nabla \psi(g, l)\|$$

Эти неравенства справедливы при любых $\varepsilon > 0$ и $y[\cdot] \in \Omega(g, F, \varepsilon)$, так что, в согласии с (1.5), имеем

$$d^- \varphi(g | F) \geq \min_{f \in F} \lambda^0(g, f) \quad (1.20)$$

С другой стороны, пусть $f \in F$, $y_f[\cdot]$ из (1.8) и последовательность $\delta_i \downarrow 0$ ($i = 1, 2, \dots$) такова, что

$$\partial^- \varphi(g | y_f[\cdot]) = \lim_{i \rightarrow \infty} [\varphi(t + \delta_i, y_f[t_*[\cdot]t + \delta_i]) - \varphi(g)] \delta_i^{-1} \quad (1.21)$$

Возьмем $l_i \in L^0(t + \delta_i, y_f[t_*[\cdot]t + \delta_i])$ ($i = 1, 2, \dots$). Теперь из (1.21), вновь учитывая (1.15), (1.16) и свойства функционала $\psi(g, l)$, а также (1.8), выводим

$$\begin{aligned} \partial^- \varphi(g | y_f[\cdot]) &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} [\psi(t + \delta_i, y_f[t_*[\cdot]t + \delta_i], l_i) - \psi(g, l_i)] \delta_i^{-1} = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} [\partial_t \psi(g, l_i) + \langle \nabla \psi(g, l_i), f \rangle + o_{y_f[\cdot]}(\delta_i) \delta_i^{-1}] \end{aligned} \quad (1.22)$$

Из (1.1) и (1.8) следует, что $\rho((t + \delta_i, y_f[t_*[\cdot]t + \delta_i]), g) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Поэтому и в силу отмеченных свойств L , $\psi(g, l)$ и $v(l)$ можно показать, что существует сходящаяся подпоследовательность $\{l_{i'}\}$ последовательности $\{l_i\}$, причем $l_{i'} \rightarrow l_0 \in L^0(g)$ при $i' \rightarrow \infty$. Таким образом, из (1.17), (1.22) вытекают неравенства

$$\partial^- \varphi(g | y_f[\cdot]) \leq \partial_t \psi(g, l_0) + \langle \nabla \psi(g, l_0), f \rangle \leq \lambda^0(g, f)$$

которые справедливы для любого $f \in F$. Поскольку $y_f[\cdot] \in \Omega(g, F, \epsilon)$ для всех $\epsilon > 0$ и $f \in F$, отсюда, в согласии с (1.5), заключаем, что

$$d^- \varphi(g | F) \leq \inf_{f \in F} \partial^- \varphi(g | y_f[\cdot]) \leq \min_{f \in F} \lambda^0(g, f) \quad (1.23)$$

Неравенства (1.20) и (1.23) доказывают первое из равенств (1.18). Справедливость второго равенства проверяется подобным образом с понятными изменениями.

2. Дифференциальные неравенства для функционала цены. Рассмотрим дифференциальную игру с наследственной информацией [1–7] для системы с последствием

$$\begin{aligned} dx[t]/dt &= f(t, x[t_*[\cdot]t], u, v), \quad t_* \leq t_0 \leq t \leq T \\ x &\in R^n, \quad u \in U \subset R^r, \quad v \in V \subset R^k \end{aligned} \quad (2.1)$$

и показателя качества движения

$$\gamma = \sigma(x[t_0[\cdot]T]) \quad (2.2)$$

Здесь x – фазовый вектор, u и v – управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно, t_* , t_0 и T – заданные моменты времени ($t_0 < T$), U и V – известные компакты, $x[t_*[\cdot]t] \in C([t_*, t], R^n)$ – история движения, реализовавшаяся к моменту времени t , функционал $\sigma: C([t_0, T], R^n) \mapsto R$ непрерывен, а функция $f: G \times U \times V \mapsto R^n$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) она непрерывна;

(2) для любого компакта $D \subset C_*$ существует такое число $\Lambda > 0$, что для всех $t \in [t_0, T]$, $u \in U$, $v \in V$ и $x'[\cdot] \in D$, $x''[\cdot] \in D$ справедлива оценка (условие Липшица по $x[t_*[\cdot]t]$)

$$\|f(t, x'[t_*[\cdot]t], u, v) - f(t, x''[t_*[\cdot]t], u, v)\| \leq \Lambda \max_{t_* \leq \tau \leq t} \|x'[\tau] - x''[\tau]\|$$

(3) существует число $\kappa > 0$, такое, что при всех $(t, x[t_*[\cdot]t], u, v) \in G \times U \times V$ выполняется неравенство

$$\|f(t, x[t_*[\cdot]t], u, v)\| \leq \kappa(1 + \max_{t_* \leq \tau \leq t} \|x[\tau]\|)$$

(4) для любых $(t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$ и $s \in R^n$ имеет место равенство (условие седловой точки в маленькой игре [1, 5–7])

$$\min_{u \in U} \max_{v \in V} \langle s, f(t, x[t_*[\cdot]t], u, v) \rangle = \max_{v \in V} \min_{u \in U} \langle s, f(t, x[t_*[\cdot]t], u, v) \rangle$$

Условия (1_f)–(3_f) обеспечивают существование единственного продолжимого до T решения (движения) $x[t_*, \cdot]T$ системы (2.1) для любых начального состояния $g^0 = (t^0, x^0[t_*, \cdot]t^0) \in G$, $t^0 < T$ (т.е. $x[\tau] = x^0[\tau]$, $t_* \leq \tau \leq t^0$) и измеримых по Борелю реализаций $u = u[t] \in U$ и $v = v[t] \in V$, $t^0 \leq t < T$. Добавление условия (4_f) обеспечивает разрешимость игры в классе чистых стратегий.

Цель первого игрока – минимизировать показатель γ (2.2), второго – максимизировать γ . Под стратегиями управления первого и второго игроков понимаются соответственно произвольные функции $u(t, x[t_*, \cdot]t) \in U$ и $v(t, x[t_*, \cdot]t) \in V$, где $(t, x[t_*, \cdot]t) \in G$, $t \in [t^0, T]$. Формирование движения на базе выбранной стратегии производится в дискретной по времени схеме. Подробная формализация рассматриваемой игры (2.1), (2.2) дана в [7]. Там же доказано, что она имеет цену – функционал из G в R , являющийся единственным минимаксным [13] решением задачи Коши для уравнения типа Гамильтона – Якоби с ci -производными

$$\partial_t \varphi(g) + H(g, \nabla \varphi(g)) = 0, \quad g = (t, x[t_*, \cdot]t) \in G, \quad t < T \quad (2.3)$$

где

$$H(g, s) = \max_{v \in V} \min_{u \in U} \langle s, f(g, u, v) \rangle \quad (2.4)$$

при условии на правом конце

$$\varphi(T, x[t_*, \cdot]T) = \sigma(x[t_0, \cdot]T), \quad x[\cdot] \in C_* \quad (2.5)$$

при этом оптимальные стратегии $u^0(t, x[t_*, \cdot]t)$ и $v^0(t, x[t_*, \cdot]t)$, составляющие седловую точку игры, строятся как экстремальные к этому решению.

Пусть P и Q – некоторые непустые множества. Рассмотрим многозначные отображения

$$G \times Q \ni (g = (t, x[t_*, \cdot]t), q) \mapsto F^*(g, q) \subset R^n$$

$$G \times P \ni (g = (t, x[t_*, \cdot]t), p) \mapsto F_*(g, p) \subset R^n$$

удовлетворяющие следующим требованиям:

(1_K) для любых $(g, p, q) \in G \times P \times Q$ множества $F^*(g, q)$ и $F_*(g, p)$ – непустые выпуклые компакты в R^n . Существует такое число $a > 0$, что справедлива оценка

$$\max \{ \|f\| \mid f \in F^*(t, x[t_*, \cdot]t, q) \cup F_*(t, x[t_*, \cdot]t, p) \} \leq a(1 + \max_{t_* \leq \tau \leq t} \|x[\tau]\|)$$

$$(t, x[t_*, \cdot]t, p, q) \in G \times P \times Q$$

(2_K) для любых $p \in P$ и $q \in Q$ многозначные отображения $G \ni g \mapsto F^*(g, q)$ и $G \ni g \mapsto F_*(g, p)$ непрерывны в метрике Хаусдорфа;

(3_K) для любых $g \in G$ и $s \in R^n$ справедливы равенства

$$\sup_{q \in Q} \min_{f \in F^*(g, q)} \langle s, f \rangle = H(g, s) = \inf_{p \in P} \max_{f \in F_*(g, p)} \langle s, f \rangle$$

Пары $\{Q, F^*(\cdot)\}$ и $\{P, F_*(\cdot)\}$ назовем соответственно верхним и нижним характеристическими комплексами (ХК). Множество всех верхних ХК обозначим $K_c^*(H)$, нижних – $K_*^c(H)$. В силу (1_f)–(4_f) и (2.4) требования (1_K)–(3_K) выполняются, например, для

$$\begin{aligned} Q &= V, & F^*(g, q) &= \text{co}\{f(g, u, q) \mid u \in U\} \\ P &= U, & F_*(g, p) &= \text{co}\{f(g, p, v) \mid v \in V\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\text{co } F$ – выпуклая оболочка множества F в R^n , так что $K_c^*(H) \neq \emptyset$ и $K_*^c(H) \neq \emptyset$.

Пусть

$$\{Q, F^*(\cdot)\} \in K_c^*(H), \quad \{P, F_*(\cdot)\} \in K_*^c(H)$$

Теорема 1. Для того чтобы функционал $\varphi : G \rightarrow R$ был функционалом цены дифференциальной игры с наследственной информацией (2.1), (2.2), необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывным, удовлетворял краевому условию (2.5) и выполнялись следующие дифференциальные неравенства

$$\sup_{q \in Q} d^- \varphi(g | F^*(g, q)) \leq 0, \quad g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G, \quad t < T \quad (2.7)$$

$$\inf_{p \in P} d^+ \varphi(g | F_*(g, p)) \geq 0, \quad g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G, \quad t < T \quad (2.8)$$

Доказательство. Характеристическим комплексам $\{Q, F^*(\cdot)\}$ и $\{P, F_*(\cdot)\}$ поставим в соответствие характеристические дифференциальные включения (ХДВ) с последствием

$$dx[t]/dt \in F^*(t, x[t_*[\cdot]t], q) \quad (2.9)$$

$$dx[t]/dt \in F_*(t, x[t_*[\cdot]t], p) \quad (2.10)$$

Для фиксированных $g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G$, $q \in Q$ и $p \in P$ обозначим через $X^*(g^0, q | F^*(\cdot))$ и $X_*(g^0, p | F_*(\cdot))$ соответственно множества исходящих из g^0 решений ХДВ (2.9) и (2.10) (т.е. множества функций из C_* , совпадающих с $x^0[t_*[\cdot]t^0]$ на $[t_*, t^0]$, абсолютно непрерывных на $[t^0, T]$ и при почти всех $t \in [t^0, T]$ удовлетворяющих включениям (2.9) и (2.10) соответственно). В силу (1_K), (2_K) (см. [14, 15]) эти множества будут непустыми компактами в C_* .

Согласно результатам работ [7, 13], для доказательства теоремы достаточно показать, что дифференциальные неравенства (2.7), (2.8) эквивалентны соответственно неравенствам

$$\sup_{(g^0, t, q)} \min_{x^*[\cdot]} [\varphi(t, x^*[t_*[\cdot]t]) - \varphi(g^0)] \leq 0 \quad (2.11)$$

$$\inf_{(g^0, t, p)} \max_{x_*[\cdot]} [\varphi(t, x_*[t_*[\cdot]t]) - \varphi(g^0)] \geq 0 \quad (2.12)$$

где

$$g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G, \quad t \in [t^0, T], \quad p \in P, \quad q \in Q$$

$$x^*[\cdot] \in X^*(g^0, q | F^*(\cdot)), \quad x_*[\cdot] \in X_*(g^0, p | F_*(\cdot))$$

определяющим нелокальные свойства стабильности функционала φ относительно ХДВ (2.9) и (2.10).

Докажем эквивалентность (2.7) и (2.11).

Доказательство импликации (2.11) $\Rightarrow$ (2.7). Пусть $g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G$, $t^0 < T$ и $q \in Q$. Обозначим

$$\tau_i^{(m)} = t^0 + i(T - t^0)/m, \quad i = 0, 1, \dots, m; \quad m = 1, 2, \dots$$

В силу условия (2.11) найдутся функции $x_{(i)}^{(m)}[\cdot]$ такие, что

$$x_{(0)}^{(m)}[\cdot] \in X^*(g^0, q | F^*(\cdot)), \quad x_{(i)}^{(m)}[\cdot] \in X^*(\tau_{i-1}^{(m)}, x_{(i-1)}^{(m)}[t_*[\cdot]\tau_{i-1}^{(m)}], q | F^*(\cdot))$$

$$\varphi(\tau_i^{(m)}, x_{(i)}^{(m)}[t_*[\cdot]\tau_i^{(m)}]) \leq \varphi(\tau_{i-1}^{(m)}, x_{(i-1)}^{(m)}[t_*[\cdot]\tau_{i-1}^{(m)}]), \quad i = 1, \dots, m \quad (2.13)$$

Положим $x_{(m)}[\cdot] = x_{(m)}^{(m)}[\cdot]$. Из (2.13) следует, что справедливы включения $x_{(m)}[\cdot] \in X^*(g^0, q | F^*(\cdot))$ и неравенства

$$\varphi(\tau_i^{(m)}, x_{(m)}[t_*[\cdot]\tau_i^{(m)}]) \leq \varphi(g^0), \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (2.14)$$

Рассмотрим последовательность функций $x_{(m)}[\cdot]$ ($m = 1, 2, \dots$). Так как $X^*(g^0, q|F^*(\cdot))$ – компакт в C_* , можно принять, что она равномерно сходится к функции $x^*[\cdot] \in X^*(g^0, q|F^*(\cdot))$. Пусть $t \in [t^0, T]$, $g^* = (t, x^*[t_*[\cdot]t])$, $\tau_m = \tau_m(t) = \max \{ \tau_i^{(m)} \mid \tau_i^{(m)} \leq t \}$, $g_m = (\tau_m, x_{(m)}[t_*[\cdot]\tau_m])$. Тогда (см. (1.1)) $\rho(g_m, g^*) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и (см. (2.14)) $\varphi(g_m) \leq \varphi(g^0)$ ($m = 1, 2, \dots$). Так как функционал φ непрерывен, отсюда вытекает неравенство

$$\varphi(t, x^*[t_*[\cdot]t]) \leq \varphi(g^0), \quad t \in [t^0, T]$$

Поскольку многозначное отображение $g \mapsto F^*(g, q)$ непрерывно, а функция $x^*[\cdot]$ липшецева на $[t^0, T]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_0(\varepsilon) \in (0, T - t^0]$, что для всех $t \in [t^0, t^0 + \delta_0(\varepsilon)]$ будет выполняться включение $F^*(t, x^*[t_*[\cdot]t], q) \subset [F^*(g^0, q)]^\varepsilon$. Возьмем $y_\varepsilon[\cdot] \in \Omega(t^0 + \delta_0(\varepsilon), x^*[t_*[\cdot]t^0 + \delta_0(\varepsilon)], F^*(g^0, q), \varepsilon)$. Тогда, согласно (1.4), указанным свойствам функции $x^*[\cdot]$ и выбору $\delta_0(\varepsilon)$, имеем

$$y_\varepsilon[\cdot] \in \Omega(g^0, F^*(g^0, q), \varepsilon), \quad [\varphi(t^0 + \delta, y_\varepsilon[t_*[\cdot]t^0 + \delta]) - \varphi(g^0)]\delta^{-1} \leq 0$$

$$\delta \in (0, \delta_0(\varepsilon)], \quad \varepsilon > 0$$

откуда в соответствии с (1.3), (1.5) выводим

$$d^-\varphi(g^0 | F^*(g^0, q)) \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup \partial^-\varphi(g^0 | y_\varepsilon[\cdot]) \leq 0$$

Это завершает доказательство импликации (2.11) $\Rightarrow$ (2.7).

Доказательство импликации (2.7) $\Rightarrow$ (2.11). Чтобы доказать эту импликацию, достаточно показать, что из (2.7) следует неравенство

$$\sup_{(g^0, t, q, \mu)} \min_{x[\cdot]} [\varphi(t, x[t_*[\cdot]t]) - \varphi(g^0)] \leq 0 \quad (2.15)$$

$$(g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G, \quad t \in [t^0, T], \quad q \in Q, \quad \mu > 0, \quad x[\cdot] \in X_\mu^*(g^0, q | F^*(\cdot)))$$

где $X_\mu^*(g^0, q | F^*(\cdot))$ – множество исходящих из g^0 решений дифференциального включения $dx[t]/dt \in [F^*(t, x[t_*[\cdot]t], q)]^\mu$.

Действительно, если имеет место неравенство (2.15), то для любых $g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G$, $t^0 < T$, $t \in [t^0, T]$, $q \in Q$ и последовательности $\mu_i \downarrow 0$ ($i = 1, 2, \dots$) существует последовательность функций $x_{(i)}^*[\cdot] \in X_{\mu_i}^*(g^0, q | F^*(\cdot))$, таких, что

$$\varphi(t, x_{(i)}^*[t_*[\cdot]t]) \leq \varphi(g^0) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2.16)$$

Так как многозначное отображение $F^*(\cdot)$ удовлетворяет условиям (1_K) , (2_K) , можно показать, что эта последовательность имеет равномерно сходящуюся подпоследовательность, предел которой $x_0^*[\cdot] \in X^*(g^0, q | F^*(\cdot))$. В силу (2.16) для функций $x_0^*[\cdot]$ будет выполняться неравенство

$$\varphi(t, x_0^*[t_*[\cdot]t]) \leq \varphi(g^0)$$

Таким образом, получаем, что из (2.15) вытекает (2.11).

Доказательство неравенства (2.15) проведем от противного. Предположим, что оно нарушается, т.е. существуют такие $\alpha > 0$, $\mu > 0$, $t^0 < T$, $g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G$, $t^* \in (t^0, T]$ и $q \in Q$, для которых выполняется неравенство

$$\min_{x[\cdot] \in X_\mu^*(g^0, q | F^*(\cdot))} \varphi(t^*, x[t_*[\cdot]t^*]) > \varphi(g^0) + \alpha \quad (2.17)$$

Положим

$$\beta(\tau) = \varphi(g^0) + \alpha(\tau - t^0)/(t^* - t^0), \quad (2.18)$$

$$\tau_0 = \sup\{\tau \in [t_0, t^*] \mid \min_{x[\cdot] \in X_\mu^*(g^0, q \mid F^*(\cdot))} \varphi(\tau, x[t_*[\cdot]\tau]) \leq \beta(\tau)\}$$

Так как $\beta(t^0) = \varphi(g^0)$, то $\tau_0 \geq t^0$. Из (2.17) вытекает, что $\tau_0 < t^*$. Функционал $\varphi: G \mapsto R$ непрерывен, множество $X_\mu^*(g^0, q \mid F^*(\cdot))$ – непустой компакт в C_* . Поэтому $\sup$ в (2.18) достигается и существует функция $x_0[\cdot]$, такая, что

$$x_0[\cdot] \in X_\mu^*(g^0, q \mid F^*(\cdot)) \quad (2.19)$$

$$\varphi(\tau_0, x_0[t_*[\cdot]\tau_0]) \leq \beta(\tau_0) \quad (2.20)$$

Обозначим $g_0 = (\tau_0, x_0[t_*[\cdot]\tau_0])$. В силу условия (2.7) имеем

$$d^-\varphi(g_0 \mid F^*(g_0, q)) \leq 0 \quad (2.21)$$

Учитывая непрерывность многозначного отображения $g \mapsto F^*(g, q)$ и определение (1.5) нижней производной по многозначному направлению, из (2.21) выводим, что существуют такие

$$0 < \varepsilon \leq \mu/2, \quad y[\cdot] \in \Omega(g_0, F^*(g_0, q), \varepsilon), \quad 0 < \delta < t^* - \tau_0 \quad (2.22)$$

для которых имеют место соотношения

$$F^*(g_0, q) \subset [F^*(t, y[t_*[\cdot]t], q)]^{\mu/2}, \quad t \in [\tau_0, \tau_0 + \delta] \quad (2.23)$$

$$\varphi(\tau_0 + \delta, y[t_*[\cdot]\tau_0 + \delta]) - \varphi(g_0) \leq \alpha\delta/(t^* - t^0) \quad (2.24)$$

Пусть $x'[\cdot] \in X_\mu^*(\tau_0 + \delta, y[t_*[\cdot]\tau_0 + \delta], q \mid F^*(\cdot))$. Тогда из (2.19), (2.22) и (2.23), учитывая, что $\tau_0 \in [t^0, t^*)$, выводим

$$x'[\cdot] \in X_\mu^*(g^0, q \mid F^*(\cdot)) \quad (2.25)$$

а из (2.18), (2.20) и (2.24), учитывая, что $x'[t_*[\cdot]\tau_0 + \delta] = y[t_*[\cdot]\tau_0 + \delta]$, получаем

$$\varphi(\tau_0 + \delta, x'[t_*[\cdot]\tau_0 + \delta]) \leq \beta(\tau_0 + \delta) \quad (2.26)$$

Поскольку $\delta > 0$, соотношения (2.25) и (2.26) противоречат определению (2.18) числа τ_0 . Это противоречие завершает доказательство неравенства (2.15), а вместе с ним и импликации (2.7) $\Rightarrow$ (2.11).

Итак, дифференциальное неравенство (2.7) эквивалентно свойству стабильности (2.11). Аналогично доказывается эквивалентность (2.8) и (2.12). Теорема доказана.

Обсудим некоторые частные случаи. Прежде всего заметим, что в точках g , в которых функционал φ si -дифференцируем, пара неравенств (2.7) и (2.8) эквивалентна равенству (2.3). Это вытекает из утверждения 1 и условия (3_K), накладываемого на ХК $\{Q, F^*(\cdot)\} \in K_c^*(H)$ и $\{P, F_*(\cdot)\} \in K_*^c(H)$. Таким образом, в точках своей si -дифференцируемости функционал цены удовлетворяет уравнению (2.3). Вместе с краевым условием (2.5) это в общем случае лишь необходимое свойство является достаточным в случае si -гладкой цены. Однако функционал цены является si -гладким весьма редко. Чаще он оказывается кусочно si -гладким или может быть представлен в виде (1.15) (см., например, [3, 5–7]). Достаточно удобные для проверки критерии стабильности таких функционалов дает следующее следствие из теоремы 1 и утверждений 2, 3.

Следствие 1. Кусочно si -гладкий функционал (1.10) (функционал, представимый в виде (1.15) соответственно) тогда и только тогда является функционалом цены дифференциальной игры (2.1), (2.2), когда он удовлетворяет условию (2.5) и при всех

$g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G, t < T$ неравенствам

$$\sup_{q \in Q} \min_{f \in F^*(g, q)} \chi(g, f) \leq 0 \leq \inf_{p \in P} \max_{f \in F_*(g, p)} \chi(g, f)$$

в которых $\chi(g, f) = \omega_0(g, 1, f)$ из (1.12) (в которых $\chi(g, f) = \lambda^0(g, f)$ из (1.17) соответственно).

Теорема 1 и следствие 1 справедливы для любых ХК $\{Q, F^*(\cdot)\} \in K_c^*(H)$, $\{P, F_*(\cdot)\} \in K_*^c(H)$. В частности, всегда можно взять ХК (2.6). Отметим, что тогда неравенства (2.11) и (2.12), а стало быть (см. доказательство теоремы 1) и дифференциальные неравенства (2.7) и (2.8) определяют соответственно свойства u - и v -стабильности [1–5] функционала цены рассматриваемой дифференциальной игры. Другой универсальный способ выбора ХК указан в [7, 13]. Заметим еще, что в конкретных задачах подходящий выбор ХК иногда существенно упрощает проверку данных в теореме 1 и следствии 1 критериев стабильности функционалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00367).

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Осипов Ю.С. Дифференциальные игры систем с последствием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 4. С. 779–782.
3. Кряжмский А.В., Осипов Ю.С. Дифференциально-разностные игры сближения с функциональным целевым множеством // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 1. С. 3–13.
4. Ченцов А.Г. Программные конструкции в дифференциальных играх с информационной памятью // Оптимальное управление системами с неопределенной информацией. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980. С. 141–143.
5. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under Lack of Information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p.
6. Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю. Задача конфликтного управления с наследственной информацией // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 885–900.
7. Лукоянов Н.Ю. Об уравнении типа Гамильтона–Якоби в задачах управления с наследственной информацией // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 252–263.
8. Ким А.В. i -Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: Ин-т мат. и мех. УрО РАН, 1996. 234 с.
9. Субботин А.И., Субботина Н.Н. Необходимые и достаточные условия кусочно-гладкой цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243. № 4. С. 862–865.
10. Guseinov H.G., Subbotin A.I., Ushakov V.N. Derivatives for multivalued mappings with applications to game-theoretical problems of control // Problems of Control and Information Theory. 1985. V. 14. № 3. P. 155–167.
11. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991. 215 с.
12. Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. Nonsmooth Analysis and Control Theory. N.Y. etc.: Springer, 1998. 278 p.
13. Лукоянов Н.Ю. Минимаксное решение уравнений Гамильтона–Якоби для наследственных систем // Докл. РАН. 2000. Т. 371. № 2. С. 163–166.
14. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
15. Куржанский А.Б. О существовании решений уравнений с последствием // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 10. С. 1800–1809.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
4.IX.2000