

УДК 539.375

© 2001 г. И.В. Симонов

**СТАЦИОНАРНОЕ ДОЗВУКОВОЕ ДВИЖЕНИЕ
ТРЕЩИН И ТОНКИХ ЩЕЛЕЙ
ПО ГРАНИЦЕ СОСТАВНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ**

Строятся решения смешанных динамических задач для кусочно-однородной плоскости, совпадающей с плоскостью симметрии упругих свойств среды, – наиболее общий случай анизотропии, когда плоская и антиплоская задача разделяются. На прямой линии раздела двух материалов задаются условия для вектора напряжений и смещений в трех комбинациях и нескольких эквивалентных вариантах. Например, на открытых промежутках щелей и трещин заданы усилия, на участках скольжения – сопротивление сдвигу и скачок нормального смещения, в областях сцепления – скачки напряжений и смещений. Введением новых комплексных потенциалов общие представления решений в стационарной динамике [1, 2] удастся преобразовать к изученному ранее типу краевых задач [3–5]. Для примера изучены задачи: о щели с неизвестным участком контакта берегов, вызванным внешним полем напряжений, и о движении полубесконечного разреза под действием приложенных к берегам разреза усилий с альтернативными условиями контакта берегов (отрыв, скольжение).

Задачи стационарной динамики изотропной и статики анизотропной упругой полуплоскости с двумя типами граничных условий впервые изучены Л.А. Галиным [6] и Г.Н. Савиным [7]. Первое решение было построено [8] для составной плоскости из разных изотропных материалов с тремя типами условий контакта, но с одним участком скольжения, а затем дано [3] общее решение векторной задачи Римана – Гильберта, допускающей факторизацию методами аналитического продолжения и конформного преобразования области. Затем подобные задачи со многими типами и комбинациями условий и числом участков изучены для изотропных полуплоскости и составной плоскости [4] и для ортотропной полуплоскости или ортотропной плоскости со щелями [5]. Показано, что эти задачи сводятся к новой комбинированной краевой задаче теории функций комплексного переменного с условиями типа Римана и Дирихле на разных промежутках, допускающей общее решение в интегралах Коши [4].

В предлагаемой работе дается конкретизация этого решения с упрощениями применительно к целям исследования, а также вывод формул для граничных значений искомых величин и асимптотик в узлах.

Три типа условий также рассмотрены в одной статической задаче о трещине на границе раздела составной анизотропной плоскости методом граничных интегральных уравнений [9].

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую задачу о взаимодействии двух анизотропных линейно-упругих полуплоскостей из разных материалов. На системах отрезков $S = \cup S_k$, $S_k = [s_k, t_k]$, $k = 1, \dots, K$, $s_1 < t_1 < \dots < t_K$ полуплоскости сцеплены и здесь заданы скачки векторов напряжений и смещений; на участках скольжения $L = \cup L_j$, $L_j = \langle a_j, b_j \rangle$, $j = 1, \dots, J$ заданы касательные напряжения и скачки нормальных смещений и напряжений; на остальных промежутках $T = \cup T_m$, $m = 1, \dots, M$ поверхности раскрыты и на них заданы усилия; x, y – движущаяся с постоянной дорелеевской скоростью c_0 прямоугольная система координат; материалы 1 и 2 заполняют полуплоскости $y > 0$ и $y < 0$.

Формализм [1, 2] основан на следующей записи уравнений Навье для стационарной трехмерной динамики произвольной анизотропной среды

$$C_{ijkl}^{\circ} u_{k,il} = 0, \quad C_{ijkl}^{\circ} = C_{ijkl} - \rho c_0^2 \delta_{jk} \delta_{li} \delta_{1l}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

где $\{C_{ijkl}\}$ – тензор жесткостей, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор перемещений, ρ – плотность, δ_{jk} – символ Кронекера. Эффективный тензор $\{C_{ijkl}^{\circ}\}$ теряет часть свойств симметрии и остается инвариантным только по отношению к замене индексов: $C_{ijkl}^{\circ} = C_{lkji}^{\circ}$. Известно [1, 2], что общее решение уравнений (1.1), зависящее только от двух переменных, может быть выражено через три произвольных голоморфных функции $\phi_k(z_k)$, $z_k = x + p_k y$:

$$\mathbf{t} = (\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{y3}) = 2\Re\{\mathbf{G}\Phi\}, \quad \mathbf{u}_{,x} = 2\Re\{\mathbf{A}\Phi\}, \quad \Phi = \{\phi_k(z_k)\} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{s} = (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{x3}) = 2\Re\{\rho c_0^2 \mathbf{A}\Phi - \mathbf{G}\Gamma\Phi\}$$

где $\mathbf{t}$, $\mathbf{s}$ – векторы напряжений, а матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{G}$, Γ зависят от решения задачи на собственные значения

$$\sum_{q=1}^3 \{C_{1jk1}^{\circ} + p_q (C_{1jk2}^{\circ} + C_{2jk1}^{\circ}) + p_q^2 C_{2jk2}^{\circ}\} A_{kq} = 0 \quad (1.3)$$

$$\det\{C_{1jk1}^{\circ} + p_q (C_{1jk2}^{\circ} + C_{2jk1}^{\circ}) + p_q^2 C_{2jk2}^{\circ}\} = 0$$

Нормализация каждого столбца матрицы $\mathbf{A}$ произвольна. При $c_0 < c_R$, где c_R – меньшая из скоростей волн Релея в направлении оси x , все собственные значения, вообще говоря, комплексны и среди трех пар сопряженных корней второго уравнения (1.3) выбираются три корня с положительной мнимой частью p_k ($k = 1, 2, 3$). Затем коэффициенты матрицы $\mathbf{G}$ определяются по формулам (определение Γ см. [2])

$$G_{jq} = \sum_{k=1}^3 \{C_{2jk1}^{\circ} + p_q C_{2jk2}^{\circ}\} A_{kq} = - \sum_{k=1}^3 \{p_q^{-1} C_{1jk1}^{\circ} + C_{1jk2}^{\circ}\} A_{kq} \quad (1.4)$$

Если x, y – плоскость симметрии упругих свойств, то $C_{ijkl}^{\circ} = 0$ для наборов индексов, содержащих нечетное число цифр 3. Уравнение для u_3 в (1.1), а значит, и антиплоская задача отделяются от уравнений для $u_1, u_2 \equiv u, v$ (плоская задача); определитель в (1.3) раскладывается на два сомножителя так, что вычисление корня p_3 осуществляется независимо, как и единственной компоненты A_{33} соответствующего собственного вектора.

Ограничимся далее рассмотрением плоской задачи и будем искать векторы $\mathbf{t} = (\sigma_{xy}, \sigma_{yy}) \equiv (\tau, \sigma)$, $\mathbf{U} = (u_x, v_x) \equiv (U, V)$, исходя из представлений через комплексные потенциалы, полагая $i, j, k, l, q = 1, 2$ в (1.2)–(1.4). Исключительные случаи кратных и действительных корней p_1, p_2 , требующие иного подхода, не рассматриваются. Тогда построенные ниже решения не вырождаются при $c_0 \rightarrow 0$, как в случае изотропии, и включают статические задачи.

Граничные условия основной задачи

$$\mathbf{t}^{\pm} = \mathbf{t}_0^{\pm}(x) \quad (\mathbf{T}), \quad \tau^{\pm} = \tau_0^{\pm}(x), \quad [V] = V_*(x) \quad (\mathbf{L}) \quad (1.5)$$

$$[\mathbf{t}] = \mathbf{t}_*(x), \quad [\mathbf{U}] = \mathbf{U}_*(x) \quad (\mathbf{S}), \quad \mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}_{\infty}, \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty$$

где индексы плюс и минус отмечают сужение на ось $y = 0$ сверху и снизу, а правые части удовлетворяют условию Гёльдера, разделим на симметричную и антисимметричную части по напряжениям, обозначая

$$f_s^{\pm} = \langle f \rangle \equiv \frac{1}{2} \{f^+(x, 0) + f^-(x, 0)\}, \quad \pm 2f_{as}^{\pm} = [f] \equiv f^+(x, 0) - f^-(x, 0)$$

Соответственно строим поля t_s , U_s и t_{as} , U_{as} , сумма которых является решением исходной задачи (1.5). Для задачи с асимметричными напряжениями и нулевыми условиями для $[U_{as}]$ на линии раздела при условии исчезновения решения на бесконечности из (1.2) следует задача Дирихле отдельно для верхней и нижней полуплоскости, решение которой дается интегралами типа Коши [10]. Затем становятся известными правые части краевых условий для задачи с симметричными условиями для напряжений (индекс s далее опускаем):

$$\begin{aligned} t^\pm &= \langle t_0 \rangle (T), \quad [t] = 0, \quad [U] = U_* (S) \\ \tau^\pm &= \langle \tau_0 \rangle, \quad [\sigma] = 0, \quad [V] = V_* (L) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Эту задачу необходимо дополнить для замыкания набором заданных скачков $[u]$ на всяком стыке промежутков S и T и скачков $[v]$ в остальных узлах.

Введем векторные функции $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ и $\chi(z) = (\chi_1, \chi_2)$ ($z = x + iy$), а также матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= 2\mathbf{G}\Phi, \quad \chi_1 = ih_1, \quad \chi_2 = h_2 + \beta_0 h_1 \\ \mathbf{B} &= i\mathbf{A}\mathbf{G}^{-1}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}_1 + \overline{\mathbf{B}}_2 = \{H_{kj}\}, \quad H_{jj} \equiv H_j > 0 \\ H_{12} &= \overline{H}_{21} \equiv \hat{H} + i\tilde{H}, \quad \det H > 0, \quad \beta_0 = \hat{H} / H_2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь и далее для сокращения письма для любой комплексной величины вводится обозначение: $g = \hat{g} + i\tilde{g}$. Матрица $\mathbf{H}$, определенная выше через матрицы $\mathbf{B}$, отнесенные к материалам 1 и 2, – эрмитова и положительно определена. Отметим также, что H_1, H_2 и $\hat{H}$ инвариантны по отношению к перестановке материалов 1 и 2 местами, а $\tilde{H}$ меняет знак; ниже, без ограничения общности, полагаем $\tilde{H} > 0$.

Из симметрии граничных условий в напряжениях (1.6) и (1.2), (1.7) следует аналитическое продолжение $\mathbf{h} = \overline{\mathbf{h}(\bar{z})} \equiv \bar{\mathbf{h}}$. Тогда напряжения и скачки производных перемещений на границе могут быть выражены через граничные значения функции $\mathbf{h}$, а затем, при использовании формул (1.7) и приводимых ниже соотношений (1.8), через потенциалы χ_k следующим образом:

$$t = \Re\{\mathbf{h}^+\}, \quad [U] = \mathcal{T}\{\mathbf{H}\mathbf{h}^+\} \quad (1.8)$$

$$\sigma(x) = \hat{\chi}_2^+(x) - \beta_0 \tilde{\chi}_1^+(x), \quad \tau(x) = \tilde{\chi}_1^+(x) \quad (1.9)$$

$$[V(x)] = H_2\{\beta \tilde{\chi}_1^+(x) + \hat{\chi}_2^+(x)\}, \quad [U(x)] = \tilde{H}\{\zeta \hat{\chi}_1^+(x) + \hat{\chi}_2^+(x)\} + \beta_0[V(x)]$$

$$\beta = -\frac{\tilde{H}}{H_2}, \quad \zeta = \frac{\hat{H}^2 - H_1 H_2}{\tilde{H} H_2}, \quad \zeta < \beta < 0$$

Воспользуемся идентичностью записи краевых условий при $y = \pm 0$ в плоскостях z и z_k . А именно (L) задача будет рассмотрена в плоскости z и будут найдены функции $\chi_j(z)$. Затем из (1.7) находятся функции $h_j(z)$ и восстанавливаются исходные потенциалы: $\Phi(z) = \frac{1}{2}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{h}(z)$. Наконец, переменная z заменяется на z_k , а поле вне границы может быть рассчитано по формулам (1.2).

Из соотношений (1.6)–(1.9) следует обобщенная краевая задача Римана – Гильберта [11]: найти вектор $\chi(z)$, голоморфный в верхней полуплоскости z , по следующим условиям на действительной оси:

$$\mathcal{T}\{\mathbf{D}\chi^+(x)\} = \mathbf{f}(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.10)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} (T), \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \end{pmatrix} (L)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ i\zeta & i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_4 \\ f_5 \end{bmatrix}(\mathbf{S}), \quad f_3 = H_2^{-1}V_* - \beta f_1$$

$$f_1 = \langle \tau_0 \rangle, \quad f_2 = \langle \sigma_0 \rangle + \beta_0 f_1$$

$$f_4 = H_2^{-1}V_*, \quad f_5 = \tilde{H}^{-1}\{U_* - \beta_0 V_*\}$$

и удовлетворяющий обычным в теории упругости ограничениям на поведение в узлах и на бесконечности. Общий метод решения обобщенной связанной векторной задачи Римана – Гильберта с тремя и более типами краевых условий в отличие от аналогичной скалярной задачи неизвестен. Однако важно, что исходная задача сведена к задаче (1.10), принадлежащей частному классу таких задач: верхние строки кусочно-постоянной матрицы $\mathbf{D}$ вещественные, а нижние – мнимые числа. Это достигнуто введением новых потенциалов χ_k (функции h_k и матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ введены ранее [1, 2]). Тогда факторизация векторной задачи становится возможной [3, 4].

Решение задачи (1.10) в разд. 4 будет построено для случая конечной длины всех промежутков из $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$. Другие случаи, в том числе разрывы краевых условий на бесконечности, можно рассмотреть при помощи соответствующего предельного перехода или элементарного конформного преобразования плоскости, переводя бесконечную точку в конечную. Заметим также, что задание дальнего поля напряжений не всегда произвольно, а должно быть согласовано с граничными условиями.

При замене $\tau \rightarrow \sigma$, $U \rightarrow V$ (индексы у H_k , h_k , χ_k меняются местами), а также при использовании двойственности $\tau \rightarrow U$, $\sigma \rightarrow V$ и затем замены $\tau \rightarrow \sigma$, $U \rightarrow V$ и обращении матрицы $\mathbf{B}$ можно получить эквивалентные (1.10) постановки краевых задач. Сначала рассмотрим случай, когда решение строится более простым и понятным для читателя методом конформного преобразования.

2. Один участок скольжения. Пусть имеется участок скольжения $[-1, 1]$. Предварительно снимем на нем неоднородность, рассматривая разность

$$\mathbf{X} = \chi - \chi^\circ, \quad \chi^\circ = (\chi_1^\circ, \chi_2^\circ) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\mathbf{f}(t)dt}{t-z}$$

Для вектор-функции $\mathbf{X}(z)$ получается краевая задача (1.10) с видоизмененными правыми частями ($\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f}_0$):

$$\mathbf{f}_0 = (f_1, f_2 - \chi_2^\circ) \quad (\mathbf{T}), \quad \mathbf{f}_0 = 0 \quad (\mathbf{L}), \quad \mathbf{f}_0 = (f_4, f_5 - \zeta\chi_1^\circ - \chi_2^\circ) \quad (\mathbf{S}) \quad (2.1)$$

метод решения которой предложен ранее [3]. Путь решения следующий. Аналитически продолжим функцию $\mathbf{X}(z)$ через отрезок $[-1, 1]$: $\mathbf{X}(z) = \overline{\mathbf{X}(\bar{z})}$. Конформное преобразование Жуковского: $z = (\omega + \omega^{-1})/2$ ($\omega = \xi + i\eta = z + \sqrt{z^2 - 1}$) переводит плоскость z с разрезами $|x| > 1$, $y = \pm 0$ в верхнюю полуплоскость ω , а отрезок $[-1, 1]$ – в верхнюю полуокружность единичного радиуса с соответствием точек $x = s_k^\pm$, $t_k^\pm \Leftrightarrow \xi = (s'_k)^{\pm 1}$, $(t'_k)^{\pm 1}$. Для кусочно-голоморфного в плоскости ω вектора $\Phi = \mathbf{D}_1 \mathbf{X}$, где $\mathbf{X}(\omega) = \overline{\mathbf{X}(1/\bar{\omega})}$, $\eta \geq 0$, а $\Phi(\omega) = \overline{\Phi(\bar{\omega})}$, получим задачу сопряжения, в которой матрица коэффициентов связи на границе равна единичной на участках из $\mathbf{T}$ и равна некоторой матрице $\mathbf{D}^\circ$ на $\mathbf{S}_\omega = (s'_k, t'_k) \cup (s'^{-1}_k, t'^{-1}_k)$. Диагонализацией матрицы $\mathbf{D}^\circ$ задача сводится к определению фактически одной скалярной функции $W(\omega)$ по краевым условиям сопряжения, решение которой строится стандартным путем [11] и приведено ниже

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} W + \bar{W} \\ \kappa W - \kappa \bar{W} \end{bmatrix}, \quad W = \Pi\{R + I\}, \quad \Pi = \Pi_1 \Pi_2 \quad (2.2)$$

$$\Pi_1 = \prod_1^K \left[\frac{(\omega - s'_k)(t'_k \omega - 1)}{(s'_k \omega - 1)(\omega - t'_k)} \right]^{i\alpha}, \quad 2^{K+1} \Pi_2 = \left\{ (z^2 - 1) \prod_1^K (z - s_k)(z - t_k) \right\}^{-1/2}$$

$$R = \sum_{-K-1}^{K+1} r_k \omega^k, \quad r_k = -\bar{r}_{-k}, \quad I = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W^\circ(t) dt}{\Pi^+(t)(t - \omega)}$$

$$\kappa = \sqrt{\zeta \beta}, \quad W^\circ = \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{B}_0 \mathbf{g} = (W^\circ, W_*^\circ) \quad (\mathbf{S}_\omega), \quad W^\circ = \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{g} \quad (\mathbf{T}_\omega)$$

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2^{-1}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{f}_0[x(\xi)] = (g_1, g_2), \quad |\xi| > 1$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \kappa & -\kappa \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{\ln |\lambda|}{2\pi}, \quad \lambda = \frac{d-1}{d+1} < 0, \quad d = \frac{\kappa}{\zeta}, \quad |\lambda| > 1$$

$$g_m(\xi) = (-1)^m g_m(1/\xi), \quad |\xi| < 1$$

где d – аналог параметра Дундурса, определяет степень различия упругих свойств материалов 1 и 2, а для существования интеграла требуется ограничение на характер убывания заданных функций при $x \rightarrow \pm\infty$. Разрезы для выделения однозначной ветви функции $\Pi_1(\omega)$ проведем вдоль $\mathbf{S}_\omega$, условие $1^\gamma = 1$ фиксирует выбор ветвей ее сомножителей. Свободные $2K + 3$ действительные постоянные в решении (2.2) определяются из двух условий сращивания напряжений на бесконечности с заданным дальним полем $\mathbf{t}_\infty$ и $2K + 1$ условий однозначности смещений при обходе открытых и закрытого промежутков [10] с учетом заданных в узлах скачков смещений.

Если обе точки $x = \pm 1$ являются граничными для участков $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$, то соответствующие множители $(z - s_l)$ и $(z - t_m)$, $s_l = -1$, $t_m = 1$ следует убрать из произведения $\Pi_2(z)$. Когда зона скольжения $\mathbf{L}$ граничит и с участком склейки из $\mathbf{S}$, и с зоной отрыва из $\mathbf{T}$, то, помимо исключения соответствующего множителя, как в предыдущем случае, добавляется множитель $\sqrt{z+1} - \sqrt{z-1}$ к функции $\Pi_2(z)$, компенсирующий нерегулярное поведение решения на бесконечности. Изменению также подлежит многочлен (выбираются либо верхние, либо нижние знаки)

$$R = \sum_{-K-1}^K r_k \omega^k, \quad r_{k-1} = \pm \bar{r}_{-k}, \quad k = 0, \dots, K+1, \quad x = \pm 1 \in \mathbf{L}/\mathbf{S}, \quad x = \mp 1 \in \mathbf{T}/\mathbf{L}$$

а число свободных постоянных равно $2K + 2$, если краевые условия не терпят разрыва на бесконечности, и совпадает с числом дополнительных условий задачи.

Вблизи узлов $z = \pm 1$ имеем обычную корневую особенность решения: в граничных точках $\mathbf{S}/\mathbf{L}$ (слева расположен интервал из $\mathbf{S}$, справа – из $\mathbf{L}$) и $\mathbf{L}/\mathbf{S}$ осциллирующая особенность автоматически пропадает, так как сокращаются одинаковые сомножители у функции $\Pi_1(\omega)$. Эта особенность исчезает также в точках типа $\mathbf{T}/\mathbf{S}$ на поверхности $d = 0 \Leftrightarrow |\lambda| = 1$, $\alpha = 0$ в фазовом пространстве упругих постоянных.

3. Щель на границе раздела. Рассмотрим пример статической задачи с одним участком скольжения без трения $[-1, 1]$, образующимся при смыкании берегов щели (a, b) , $a < -1$, $b > 1$ под действием дальнего поля $\tau_\infty, \sigma_\infty < 0$. Первоначально она имела постоянное раскрытие δ_0 , затем оно сохраняется только на ее концах. Решение (2.2) принимает вид

$$\Pi_1 = \varphi^{i\alpha}, \quad \varphi = \frac{(A - \omega)(1 - B\omega)}{(A\omega - 1)(\omega - B)}, \quad \Pi_2 = \frac{1}{4\sqrt{(z^2 - 1)(a - z)(z - b)}} \quad (3.1)$$

$$R = r_2 \omega^2 - \bar{r}_2 \omega^{-2} + r_1 \omega - \bar{r}_1 \omega^{-1} + i r_0, \quad I = 0$$

$$\tilde{r}_0 = 0, \quad A = a + \sqrt{a^2 - 1}, \quad B = b - \sqrt{b^2 - 1}$$

Из условий на бесконечности, включающих равенство нулю коэффициента при z^{-1} в разложении $W(z)$ при $z \rightarrow \infty$, извлекаем комплексные коэффициенты r_1 и r_2

$$r_2 = \frac{\sigma_\infty + \beta_0 \tau_\infty + i\kappa \tau_\infty}{i\kappa(|\lambda|^{1/2} + |\lambda|^{-1/2})} \exp\left\{i\alpha \ln \left| \frac{A}{B} \right| \right\} \quad (3.2)$$

$$r_1 = r_2 \{2i\alpha(\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{b^2 - 1}) - a - b\}$$

Условия однозначности смещений при обходе всего контура щели будут выполнены, если в разложении потенциалов отсутствует слагаемое $O(z^{-1})$ [10], а для вычисления коэффициента r_0 остается условие приращения скачка вертикальных смещений на величину δ_0 на участке $(1, a)$

$$\int_1^a [V]dx = \delta_0, \quad [V(x)] = 2\kappa H_2 \tilde{W}^+(x) \quad (3.3)$$

$$r_0 = \{(\kappa H_2)^{-1} \delta_0 - I_1\} I_2^{-1}, \quad I_k = 2 \int_1^a \Pi_2^+(x) \psi_k(x) dx$$

$$\psi_1 = \mathcal{T}\{\Pi_1^+(x)(R[\xi(x)] - ir_0) \exp(i\alpha \ln |\varphi(x)|)\}, \quad \psi_2 = \cos(\alpha \ln |\varphi(x)|)$$

При расчетах целесообразно учесть малость постоянной α в статике и низкоскоростной динамике и пренебречь в (3.1)–(3.3) членами порядка α^2 по сравнению с единицей. Однако при приближении скорости c_0 к c_R величина α растет до бесконечности [1, 2].

Неизвестные a и b определим из условия отсутствия особенности в граничных точках неполного контакта гладких поверхностей $z = \pm 1: 2\tilde{r}_2 \pm \tilde{r}_1 + r_0 = 0$. В физическую плоскость, где концы щели a° и b° – заданные числа, а $x_{1,2}^\circ$ – искомые границы области контакта берегов щели, перейдем преобразованием

$$z^\circ = \frac{(a^\circ - b^\circ)z + ab^\circ - a^\circ b}{a - b}; \quad x = \pm 1 \Leftrightarrow x_{1,2}^\circ = \frac{ab^\circ - a^\circ b \pm (a^\circ - b^\circ)}{a - b}$$

Очевидно, решение существует, если найденные числа $x_{1,2}^\circ$ удовлетворяют неравенствам $a^\circ < x_1^\circ \leq x_2^\circ < b^\circ$. Начало смыкания $x_1^\circ = x_2^\circ$ определяет предельную поверхность $\sigma_\infty^* = \sigma_\infty^*(\tau_\infty, \dots)$ в пространстве параметров.

В случае симметрии ($\tau_\infty = 0, a = -b$)

$$r_2 = i\tilde{r}_2 = \frac{-i\sigma_\infty |\lambda|^{1/2}}{\kappa(1-\lambda)}, \quad r_1 = \hat{r}_1 = -4\alpha\sqrt{a^2 - 1}\tilde{r}_2, \quad r_0 = \frac{1}{I_2} \left(\frac{\delta_0}{\kappa H_2} - I_1 \right)$$

$$I_1 = 2\tilde{r}_2 \{aE(\sqrt{1 - a^{-2}}) - I_2\}, \quad I_2 = (2a)^{-1} K(\sqrt{1 - a^{-2}})$$

где K и E – полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Уравнение для определения точки отрыва: $2\tilde{r}_2 + r_0 = 0$ используем для решения обратной задачи определения величины напряжения σ_∞ в зависимости от длины перекрытия щели $2l$

$$-\sigma_\infty \approx \frac{\delta_0(|\lambda|^{1/2} + |\lambda|^{-1/2})}{2H_2 I_0(l)}, \quad I_0 = \int_l^1 \sqrt{\frac{t^2 - l^2}{1 - t^2}} dt \quad (3.4)$$

где для удобства анализа за единицу длины принята полудлина щели (перенормировка), раскрытие δ_0 уже отнесено к этой полудлине, а точность формулы есть $O(\alpha^2)$. При $l \rightarrow 0$ существует предел $I_0 \rightarrow 1$, а тогда из (3.4) просто находится предельное

напряжение σ_∞^* . Оно совпадает со значением, которое можно извлечь из решения соответствующей задачи о щели без касания ее берегов. С другой стороны, если $l \rightarrow 1$, то $I_0 \sim \frac{1}{2}\pi(1-l)$ и $\sigma_\infty \sim (1-l)^{-1} \rightarrow \infty$.

4. Общий случай. Пусть число промежутков L_j произвольно, $J > 1$. Выделим среди них полуоткрытые (имеющие только одну общую с T точку) $\langle a'_n, b'_n \rangle \in L' \subset L$ ($n = 1, \dots, J'$), замкнутые (две таких точки) $[a'_l, b'_l] \in L'' \subset L$ ($l = 1, \dots, J''$) и открытые участки числом $J - J' - J''$. Следуя описанному ранее подходу [4], решение векторной задачи (1.10) выразим через одну скалярную функцию $F(z)$

$$\chi_j(z) = \kappa^{j-1} \{F(z) - (-1)^j \overline{F(\bar{z})}\}, \quad j = 1, 2 \quad (4.1)$$

Подстановка выражений (4.1) в условия (1.10) приводит к комбинированной краевой задаче определения кусочно-голоморфной функции по условиям задачи Дирихле на L и условиям задачи Римана на $R = T \cup S$

$$\tilde{f}^\pm(x) = f^\pm(x), \quad 2f^\pm = \kappa^{-1} f_3 \pm f_1 \quad (L) \quad (4.2)$$

$$F^+(x) = F^-(x) + f_T(x), \quad f_T = \kappa^{-1} f_2 + if_1 \quad (T) \quad (4.3)$$

$$F^+(x) = \lambda F^-(x) + f_S(x), \quad f_S = \frac{df_5 + if_4}{\beta + \kappa} \quad (S) \quad (4.4)$$

В отличие от обычной краевой задачи сопряжения, общее решение соответствующей (4.2)–(4.4) комбинированной однородной задачи находится при помощи двух канонических решений, так как в этом случае нельзя подобрать одно каноническое решение с максимально допустимыми особенностями во всех узлах и, следовательно, имеющее максимальный порядок на бесконечности [4, 10]. Эти решения ищутся в виде произведения канонического решения задачи Римана (4.3), (4.4), $Z(z)$, вспомогательных функций $\Pi_1(z)$, $\Pi_*(z)$, обеспечивающих выполнение дополнительных условий и нужный порядок в узлах, и наконец, канонического решения задачи Дирихле (4.2)

$$F_c(z) = Z(z)\Pi_1(z)\Pi_*(z)e^{i\psi(z)}, \quad Z = Z_0\Pi_0 \quad (4.5)$$

$$Z_0 = \prod_{k=1}^K \left(\frac{z-s_k}{z-t_k} \right)^{i\alpha}, \quad \Pi_0 = \prod_{k=1}^K \frac{(z-s_k)^{-1/2}}{(z-t_k)^{1/2}}, \quad \Pi_1 = \prod_{j=1}^{J-1} \frac{1}{z-c_j}$$

$$\hat{\psi}^\pm = \eta_j^\pm \equiv \pi m_j^\pm - \arg\{Z\Pi_1\Pi_*\}^\pm \quad (L) \quad (4.6)$$

Здесь целые числа $m_j^\pm$ пока произвольны, вспомогательные комплексные постоянные c_j располагаем на нижних полуокружностях с концами a_j, b_j , а функция $\Pi_*(z)$ конкретизируется ниже. Разрезы для выделения ветвей степенных функций вида $(z-a)^\beta$ проведем вдоль оси x , соединяя точки a, ∞ ; $\arg(x-a)^\pm = 0, 2\pi, x > a$; $\arg(x-a)^\pm = \pi, x < a$. Сомножитель, соответствующий точкам $x = +\infty$ или $x = -\infty$ на полубесконечном интервале, выпадает из произведений, но учитывается как предельный аргумент этого сомножителя. Например, если $s_1 = -\infty$, то сомножитель $(z-s_1)$ выпадает, а под $\arg(z-t_1)^{1/2}$ понимаем $\lim \arg\{(z-t_1)(z-s)\}^{1/2}, s \rightarrow \infty$. Кроме того, если оба полубесконечных промежутка принадлежат одному множеству, то при нумерации будем считать их за один участок.

Построим два канонических решения, таких, что одно из них (оставим обозначение F_c) обеспечивает заданное степенное поведение с показателем $-1/2$ во всех узлах s_k, t_k ,

a_j, b_j , за исключением правых концов полуоткрытых промежутков $\langle a'_n, b'_n \rangle$:

$$F_c(z) = Z_0(z)\Pi(z)e^{i\psi(z)}, \quad \Pi = \Pi_0\Pi_1\Pi_2\Pi_3 \quad (4.7)$$

$$\Pi_2 = \prod_{j=1}^{J''} \frac{(z - b_j'')^{-1/2}}{(z - a_j'')^{1/2}}, \quad \Pi_3 = \prod_{n: b'_n \in L/S} \left(\frac{z - b'_n}{z - a'_n} \right)^{1/2}$$

Решение неоднородной задачи Дирихле (4.6)

$$\psi = \frac{1}{\pi i} \sum_{j=1}^J \int_{L_j} \left\{ \frac{Y(z)\langle \eta_j(t) \rangle}{Y^+(t)} + \frac{[\eta_j(t)]}{2} \right\} \frac{dt}{t - z} \quad (4.8)$$

$$Y(z) = \prod_{j=1}^J \sqrt{(z - a_j)(z - b_j)}$$

упростим, замечая, что числа $[\eta_j(t)]$ — целые, а тогда можно обеспечить условие $[\eta_j(t)] = 0$ и устранить второй интеграл в (4.8) выбором

$$[m_j] = \frac{1}{\pi} [\arg(\Pi_0\Pi_2\Pi_3)] = 2(K_- + J_- + e_0), \quad e_0(x) = \begin{cases} 0, & x \notin L^{**} \\ 1/2, & x \in L^{**} \end{cases} \quad (4.9)$$

где $K_{\pm}$ и $J_{\pm}$ — числа целых промежутков из подмножеств S и L'' соответственно, расположенных правее (+) или левее (−) точки x , так что

$$K = K_+ + K_-, \quad x \notin S$$

$$J = J_+ + J_-, \quad x \notin L'', \quad J = J_+ + J_- + 1, \quad x \in L''; \quad L^{**} = L'' \cup L^*$$

а $L^* \subset L'$ — подмножество полуоткрытых участков $[a'_n, b'_n)$, т.е. таких, что $b'_n \in L/S$. Здесь и далее учитываются следующие значения аргументов функций, рассчитанных, подчеркнем, для случая, когда длины всех промежутков из систем S и L конечны:

$$[\arg\{Z_0 \Pi_1\}] = 0, \quad \langle \arg\{Z_0 \Pi_1\} \rangle = \arg\{Z_0 \Pi_1\}$$

$$\frac{1}{\pi} \arg \Pi_0^{\pm} = \begin{cases} -K_+(+), & K_+ - 2K(-) & x \notin S \\ -K_+ - 1/2(+), & K_+ - 2K + 1/2(-), & x \in S \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \arg \Pi_2^{\pm} = \begin{cases} -J_+(+), & J_+ - 2J''(-), & x \notin L'' \\ -J_+ - 1/2(+), & J_+ - 2J'' + 1/2(-), & x \in L'' \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \arg \Pi_3^{\pm} = \begin{cases} 0, & x \notin L^* \\ \pm 1/2, & x \in L^* \end{cases}, \quad \langle \arg\{\Pi_0\Pi_2\} \rangle = -\pi(K + J'')$$

В оставшемся интеграле при учете соотношений (4.9) имеем

$$\langle \eta_j \rangle = \pi w_j - \arg \{Z_0 \Pi_1\}(t)$$

$$w_j = m_j^+ - \frac{1}{\pi} \arg\{\Pi_0\Pi_2\Pi_3\} = m_j^+ + K_+ + J'' - J_- - e_0$$

Требование $\psi(z) = O(1)$, $z \rightarrow \infty$ обеспечивается условиями

$$\sum_{j=1}^J \int_{L_j} \frac{\langle \eta_j(t) \rangle t^l dt}{Y^+(t)} = 0, \quad l = 0, \dots, J-2 \quad (4.10)$$

откуда подбором находятся числа w_j , а затем при учете (4.9) и числа $m_j^{\pm}$, а также

величины γ_j , связанные с c_j равенствами

$$2c_j = a_j + b_j + (b_j - a_j)\exp(-i\gamma_j), \quad 0 < \gamma_j < \pi$$

При этом полезно учесть, что правая часть первого равенства (4.9) – четное число, а число w_j – целое на участках $L_j \notin L^{**}$ и дробное и кратное $\frac{1}{2}$, если $L_j \in L^{**}$. Как показано на примере в разд. 5, числа w_j определяются с некоторым произволом, что влияет только на знаки канонических решений.

Другое каноническое решение есть произведение $Y_0(z)F_c$, где

$$Y_0(z) = Y(z)Y_1(z), \quad Y_1(z) = \prod_{j=1}^{J'} (z - b'_n)^{-1} \quad (4.11)$$

Оно, напротив, приобретает корневые особенности при $z \rightarrow b'_n$, но теряет их во всех остальных концах промежутков $\langle a_j, b_j \rangle$; в точках S/T и T/S указанные решения имеют одинаковые особенности. При $z \rightarrow \infty$ из (4.7), (4.11) следует

$$F_c \sim z^{-r}, \quad Y_0(z)F_c \sim z^{-s}, \quad r = K + J + J'' - 1, \quad s = K + J' + J'' - 1$$

а тогда решение задачи (4.2)–(4.4), ограниченное на бесконечности (ранее [4] требовалось исчезновение), принимает вид

$$F(z) = F_c(z)\{P_r(z) + iQ_s(z)Y_0(z) + F_1(z) + F_2(z)\} \quad (4.12)$$

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \frac{f_R(t)dt}{F_c^+(t)(t-z)}, \quad f_R(t) = \begin{cases} f_S(t), & t \in \mathbf{S} \\ f_T(t), & t \in \mathbf{T} \end{cases}$$

$$F_2(z) = \frac{Y_0(z)}{\pi} \int_{\mathbf{L}} \frac{\langle f_*(t) \rangle dt}{Y_0^+(t)(t-z)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{L}} \frac{[f_*(t)]dt}{t-z} \equiv iY_0(z)F_{21}(z) + F_{22}(z)$$

$$f_*^\pm(t) = f^\pm(t)\{F_c^\pm(t)\}^{-1} - \tilde{F}_1(t)$$

где $P_r(z)$, $Q_s(z)$ – полиномы степени r и s с действительными коэффициентами, число которых равно

$$r + s + 2 = 2K + J + J' + 2J'' = K + M + 2J$$

так как можно доказать равенство $M = K - J + J' + 2J''$. Для определения этих коэффициентов имеем два условия на бесконечности, $2J - 2$ условия устранения искусственных полюсов решения в точках $z = c_j$ и $K + M$ условий однозначности смещений при обходе зон раскрытия и скольжения с учетом задания скачков этих величин в узлах. На этом построение общего решения закончено.

Переходя к анализу решения, сначала отметим, что общее решение (4.12) содержит произведение функций с осциллирующими (физически некорректными) особенностями в узлах S/L и L/S, порожденными каноническим решением $Z(z)$ задачи Римана (4.3), (4.4). Эти осцилляции гасятся сомножителем $\exp[i\psi(z)]$ в общем решении, где функция $\psi(z)$ является решением задачи Дирихле (4.6), причем соответствующие осциллирующие в противоположной фазе сомножители скрыты в интеграле типа Коши (4.8) и явно выделяются лишь в приведенных ниже асимптотиках, где эти «неправильные» осцилляции таким образом устраняются полностью. Однако зоны таких осцилляций, как известно, могут разрастаться при преобладании сдвиговых усилий или в динамике. Такое наложение особенностей отсутствует в решениях, приведенных в разд. 2, 3, что удобнее, например, при численной реализации, и его желательно также устранять при конкретизациях решения (4.12), как это сделано в разд. 5. Хотя при наличии одного участка скольжения решения, приведенные в разд. 2 и 4, должны совпадать, переход от одного решения к другому в общем виде весьма

нетривиален, возникает множество вариантов, и поэтому проще было решить задачу заново.

В случае приложения векторов сил $(\pm \Gamma_m, \Sigma_m)$ в точках $x_m \in \mathbf{T}$, $y = \pm 0$ и отсутствия других нагрузок функции, определяющие частное решение задачи, принимают вид

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^M \frac{(\beta_0 + i\kappa)\Gamma_m + \Sigma_m}{\kappa F_c^+(x_m)(x_m - z)}, \quad F_2(z) = \frac{Y_0(z)}{\pi} \int_L \frac{\tilde{F}_1(t)dt}{Y_0^+(t)(z - t)} \quad (4.13)$$

Приведем полезные для расчетов формулы для граничных значений искомых комплексных функций. Предварительно укажем предельные значения вспомогательных функций

$$\begin{aligned} \psi^\pm(x) &= \pi w_j - \arg\{Z_0(x)\Pi_1(x)\} \pm i\psi_0(x), \quad x \in L_j \\ \psi^\pm(x) &= \psi_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad \psi_0(x) = \frac{Y^j(x)}{\pi} \int_L \frac{\langle \eta_j(t) \rangle dt}{Y^j(t)(x - t)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$Y^\pm(x) = Y^j(x) \times \begin{cases} \pm i, & x \in L_j \\ 1, & b_j < x < a_{j+1} \end{cases}, \quad |Z_0^\pm(x)| = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{L} \cup \mathbf{T} \\ |\lambda|^{\pm 1/2}, & x \in \mathbf{S} \end{cases}$$

$$Y^j(x) = (-1)^{J-j} |Y(x)|, \quad \arg Z_0^\pm(x) = \alpha \sum_{k=1}^K \ln \left| \frac{x - s_k}{x - t_k} \right|, \quad x \in \mathbf{L} \cup \mathbf{R}$$

$$F_c^\pm(F_1^\pm + F_2^\pm) = \begin{cases} if^\pm + F_c^\pm(\hat{F}_1 + \hat{F}_2), & x \in \mathbf{L} \\ \pm 1/2 G^\pm f_R + F_c^\pm(F_1 + F_2), & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

$$F^\pm(x) = F_c^\pm(x) \{P_r \pm Q_s Y_1 Y^j + \hat{F}_1 + \hat{F}_2\}(x) + if^\pm(x), \quad x \in \mathbf{L}$$

$$F_c^\pm(x) = (-1)^{m_j^+} |\Pi(x)| \exp\{\mp \psi_0(x)\} \times \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{L} - \mathbf{L}^{**} \\ \mp 1, & x \in \mathbf{L}^{**} \end{cases}$$

$$F^\pm(x) = F_c^\pm(x) \{P_r + iQ_s Y_1 Y^j + F_1 + F_2\}(x) \pm \frac{1}{2} G^\pm f_R(x), \quad x \in \mathbf{R}$$

$$F_c^\pm(x) = (-1)^{K_+ + J_+} |\Pi(x)| \exp\{i\psi^\circ(x)\} \times \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{T} \\ \mp i, & x \in \mathbf{S} \end{cases}$$

$$\psi^\circ(x) = \psi_0(x) + \arg\{Z_0(x)\Pi_1(x)\}, \quad G^+ = 1, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$G^- = 1, \quad x \in \mathbf{T}; \quad G^- = \lambda^{-1}, \quad x \in \mathbf{S}$$

Здесь интегралы понимаются в смысле главного значения, если они не существуют по Риману. Из (4.14) очевидно, что функции $F^\pm(x)$ удовлетворяют всем граничным условиям (4.2)–(4.4).

Симметричные напряжения на участках контакта и соответствующие скачки производных от смещений в областях неполного контакта и раскрытия выражаются через граничные значения функции $F(z)$ так:

$$\begin{aligned} \sigma &= \kappa(\lambda - 1)\hat{F}^- - \beta_0 \tau + \kappa f_S, \quad \tau = (\lambda - 1)\tilde{F}^- + \tilde{f}_S \quad (\mathbf{S}) \\ \sigma &= \kappa(\hat{F}^+ - \hat{F}^-) - \beta_0 \langle \tau_0 \rangle, \quad [U] = \tilde{H}\{(\zeta + \kappa)\hat{F}^+ + (\zeta - \kappa)\hat{F}^-\} \quad (\mathbf{L}) \\ [V] &= H_2\{2\kappa\tilde{F}^+ + (\beta - \kappa)f_1\}, \quad [U] = 2\zeta\tilde{H}\hat{F}^+ + \tilde{H}(1 - d^{-1})f_2 + \beta_0[V] \quad (\mathbf{T}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Поведение функции $F(z)$ вблизи особых точек a определяется следующими асимптотиками, где опущены члены $O(\ln(z - a))$ и $O(1)$, обеспечивающие выполнение гра-

ничных условий локально:

$$F(z) \sim \{\Pi'_0 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3\}(a) \exp\{i\psi(a)\} \{P_r + iQ_s Y_0 + F_1 + F_2\}(a) \frac{(z-s_k)^{-1/2+i\alpha}}{(z-t_k)^{1/2+i\alpha}} \quad (4.16)$$

$$z \rightarrow a = s_k, \quad t_k \in S/T \cup T/S$$

$$F^\pm(z) \sim i(-1)^{l_j^\pm} |\lambda|^{\pm e_0} \{|\Pi| Y'_0(F_{21} + Q_s)\}(a)(z-a)^{-1/2}, \quad z \rightarrow a = b'_n$$

$$l_j^\pm = m_j^+, \quad b'_n \equiv b_j \in L/T; \quad l_j^+ = m_j^+ + 1, \quad l_j^- = m_j^+, \quad b'_n \equiv b_j \in L/S$$

$$F^\pm(z) \sim (-1)^{m_j^+ + 1} P(a) |\Pi_0 \Pi_1 \Pi_2 \Pi'_3|(a)(z-a)^{-1/2}, \quad a = a'_n \in T/L$$

$$F^\pm(z) \sim (-1)^{m_j^+} |\lambda|^{\pm 1/2} P(a) \frac{|\Pi'_0 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3|(a)}{\sqrt{z-a}} \times \begin{cases} i, & a = s_k \in L/S, \quad a \neq b'_n \\ \pm 1, & a = t_k \in S/L \end{cases}$$

$$P(a) = \{P_r + \hat{F}_1 + F_{22}\}(a), \quad j: a \equiv a_j, b_j; \quad a_j = t_k, \quad b_j = s_k$$

$$F^\pm(z) \sim (-1)^{m_j^+} P(a) \frac{|\Pi_0 \Pi_1 \Pi'_2 \Pi_3|(a)}{\sqrt{z-a}} \times \begin{cases} -1, & a = a''_m \\ \mp i, & a = b''_m \end{cases}$$

где штрих над произведением означает, что из него выпадает пара (или, по смыслу, — один из) сомножителей, которые обращаются в нуль и в бесконечность в исследуемой точке. При выводе были использованы общие методы исследований поведения интегралов типа Коши с различными особенностями плотности [11], в частности — произведения логарифмической на степенную особенность, как, например, в случае функции $\psi^\pm(z)$:

$$\psi^\pm = \pi w_l - \arg \Pi_1(a) - \alpha \ln \prod_{k=1}^K \left| \frac{a-s_k}{a-t_k} \right| - \alpha \ln \frac{z-s_m}{z-t_m} \mp i\alpha\pi + O((z-a)^{1/2})$$

$$z \rightarrow a = t_m, \quad s_m \equiv a_l, \quad b_l \in S_m/L_l, \quad L_l/S_m$$

Связь потока энергии в вершину разреза с коэффициентами интенсивности напряжений приведена ранее [2], где отмечено, что в отличие от случая однородной плоскости эти величины остаются ограниченными и, вообще говоря, не равными нулю при $c_0 \rightarrow c_R$. Условия гладкого отрыва в узлах T/L и L/T обеспечиваются равенствами, устраняющими сингулярность в этих точках, указанную в (4.16),

$$\{P_r + \hat{F}_1 + F_{22}\}(a) = 0, \quad a = a''_l, \quad b''_l, \quad a'_n, \quad a'_n \in T/L' \quad (4.17)$$

$$\{F_{21} + Q_s\}(b'_n) = 0, \quad b'_n \in L'/T$$

из которых определяются эти точки отрыва. Ликвидация этих особенностей следует из обычных ограничений типа неравенств: $[v] \geq 0$ — в областях отрыва, $\sigma \leq 0$ — в областях контакта со скольжением, хотя возможны и более экзотические условия, когда границы зон проскальзывания заданы, отрыв негладкий и допускаются отрицательные контактные давления. Поясним, что уравнения (4.17) обеспечивают только правильное сочетание знаков асимптотик σ и $[v]$ слева и справа от точки отрыва и необходима глобальная проверка указанных неравенств, *апостериори*, при использовании формул (4.15), чтобы обрести уверенность в правильности выбора числа и расположения участков скольжения и отрыва в конкретной задаче. Единственность решений задач с альтернативными условиями контакта доказана [12].

5. Стационарное движение разреза. Для иллюстрации рассмотрим движение полубесконечной трещины-разреза по границе раздела под действием постоянной косо

подвижной силы $\pm(\Gamma_0, \Sigma_0)$, $\Sigma_0 > 0$, приложенной в точках $x' = 0$, $y' = \pm 0$ стационарной системы координат ($z' = x' + iy'$). На участке (a_1, b_1) трещина раскрыта, на луче $(-\infty, a_1]$ и в зоне около вершины разреза $[b_1, s_1)$ выполнены условия скольжения без трения, на луче $[s_1, \infty)$ анизотропные и разные полуплоскости $y' > 0$ и $y' < 0$ сцеплены. Положения точек $a_1 < 0$, $b_1 > 0$ определяются по ходу решения. Ради сокращения выкладок симметризуем задачу конформным преобразованием $z = (b + Az')(1 - Az')^{-1}$ с соответствием точек $z' = \infty, s_1, a_1, b_1 \Leftrightarrow z = -1, 1, -a, a$. Условия раскрытия, скольжения и полного контакта теперь выполнены соответственно на промежутках

$$(-a, a) = T, \quad (-1, -a] \cup [a, 1) = L_1 \cup L_2 = L, \quad (-\infty, -1] \cup [1, \infty) = S$$

а силы приложены в точках $-x = b$, $y = \pm 0$; $-a < b < a$. Решение ищем в том же классе функций, что и (4.12), за исключением поведения в окрестности точки $z = -1 \Leftrightarrow z' = \infty$, где потребуем

$$F(z) = O\{(z+1)^{3/2}\} + O\{(z+1)^2\} \quad (5.1)$$

Это равенство обеспечивает, в частности, отсутствие полюса на бесконечности у функции F в плоскости z' . Действительные постоянные a, b определяются по ходу решения, затем количества a_1, b_1 и A восстанавливаются по формулам

$$a_1 = \frac{2s_1(a+b)}{(1-a)(b-1)}, \quad b_1 = \frac{2s_1(a-b)}{(1+a)(1-b)}, \quad A = \frac{1-b}{2s_1}$$

Процедура устранения корневых особенностей в точках $z = \pm a$ позволяет определить две свободные постоянные P_0 и Q_0 в решении. Интеграл, определяющий функцию $F_2(z)$ в (4.13), может быть вычислен при помощи теории вычетов. Интеграл (4.8) для $\psi(z)$ преобразуем так, что осциллирующая функция $Z_0(z)$ аннигилируется в данном случае полностью, а тогда решение (4.12) при учете соотношений (4.13), (5.1) можно записать в виде

$$F = |\lambda|^{\pm 1/2} \frac{(z+1)^{3/2} \exp\{i\psi(z)\}}{(z+i\gamma)(b-z)} \left\{ \hat{F}_0 \frac{\sqrt{z-a}}{b-a} + i\tilde{F}_0 \sqrt{\frac{(1-b)(z+a)(z+1)}{(1+b)(a^2-b^2)(z-1)}} \right\} \quad (5.2)$$

$$F_0 = \pm \frac{(\Sigma_* + i\kappa\Gamma_0)(b+i\gamma)(a-b)^{1/2}}{2\pi\kappa(b+1)^{3/2} \exp\{i\psi_*\}}, \quad \Sigma_* = \Sigma_0 + \beta_0\Gamma_0, \quad \psi_* = \psi_0(b)$$

$$\psi = Y(z) \left\{ \int_L \frac{w_j + \pi^{-1} \operatorname{arctg}(\gamma/t)}{iY^+(t)(t-z)} dt + \int_{-a}^a \frac{\alpha}{Y^+(t)(t-z)} dt \right\}$$

$$Y(z) = \sqrt{(z^2-1)(z^2-a^2)}, \quad j=1, 2, \quad w_1 = m_1^+ + 1/2, \quad w_2 = m_2^+$$

Знаки $\pm$ во втором равенстве относятся к верхней и нижней полуплоскости, а для вычисления функций на границе раздела полезно знать, что

$$\psi^\pm(x) = \pi w_j + \operatorname{arctg}(\gamma/t) \pm i\psi_0(x) \quad (L), \quad \psi^\pm(x) = \psi_0(x) \pm i\alpha\pi \quad (T)$$

$$\psi^\pm(x) = \psi_0(x) \quad (S)$$

$$\psi_0(x) = Y^j(x) \int_L \frac{w_j + \pi^{-1} \operatorname{arctg}(\gamma/t)}{Y^j(t)(x-t)} dt + \int_{-a}^a \frac{\alpha Y^j(x)}{Y(t)(t-x)} dt$$

Выражение для функций $Y^j(x)$ приведено в (4.14). Условие отсутствия полюса в точке $z = c = -i\gamma$ дает два действительных уравнения для определения постоянных

a, b через величину γ

$$a = \gamma^2, \quad \sqrt{\frac{(1+b)(\gamma^2+b)(\gamma^2+1)}{2(1-b)(\gamma^2-b)}} = \frac{\tilde{F}_0}{\hat{F}_0} = \frac{A_0 \Sigma_* + \kappa \Gamma_0}{\Sigma_* - \kappa A_0 \Gamma_0} \quad (5.3)$$

$$A_0 = \frac{\gamma \cos \psi_* - b \sin \psi_*}{\gamma \sin \psi_* + b \cos \psi_*}$$

Решение уравнения в (5.3) неединственно, если не принять во внимание условие непересечения. Принцип выбора нужного решения следующий: останавливаемся на том, которое обеспечивает максимально допустимую длину участка скольжения около вершины разреза: $\max(s_1 - b_1)$. Другие решения, как показано на сходном примере [13], приводят к нарушению физического условия $[\nu] \geq 0$ на участке раскрытия $(0, s_1)$.

В единственном вспомогательном уравнении, аналогичном (4.10), при подстановке $a = \gamma^2$ интегрирование по L_1 сводится к интегрированию по L_2 , а затем оба интеграла (по участкам L_2 и $(-a, a)$) приводятся заменой переменной к интегралу от функции со слабой особенностью

$$\int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{1}{q} \left(\arctg\left(\frac{\gamma}{q}\right) + \frac{\pi}{2} n^\circ \right) + \frac{2\alpha\pi}{\sqrt{1-\gamma^4 \sin^2 \phi}} \right\} d\phi = 0 \quad (5.4)$$

$$q = \sqrt{1 - (1 - \gamma^4) \sin^2 \phi}$$

Результат может быть также представлен через полные эллиптические интегралы.

Из (5.4) однозначно определяются число γ и разность $n^\circ = w_2 - w_1 = m_2^+ - m_1^+ - 1/2$. Одно из целых чисел, например w_2 , можно задать произвольно, а тогда $w_1 = w_2 - n^\circ$. Можно показать, что при вариации w_2 на целое число w интеграл, определяющий приращение функции ψ , берется и будет равен πw , и это может привести лишь к изменению знака канонического решения.

Угловое распределение коэффициентов интенсивности напряжений можно рассчитывать, исходя из асимптотики при $z \rightarrow 1$

$$F(z) = \pm \frac{4i\tilde{F}_0 |\lambda|^{\pm 1/2} (z-1)^{-1/2}}{\sqrt{(1-b^2)(a^2-b^2)}} + O(1)$$

При $\lambda = -1$, $\alpha = 0$ (в частности, одинаковые материалы) зоны скольжения теряются: $a = 1$, $b_1 = s_1$, $a_1 = -\infty$. С ростом параметра α длина зоны раскрытия убывает, оставаясь, однако, конечной при достижении скорости значения c_R , так как при $c \rightarrow c_R$ имеем

$$|H_{1,2}| \rightarrow \infty, \quad \kappa \rightarrow \kappa_R \neq 0, \quad \infty, \quad \beta, \zeta \rightarrow 0, \quad \beta/\zeta \rightarrow 1, \quad \alpha \rightarrow \infty$$

Это согласуется с качественным анализом приближенного решения аналогичной задачи для различных изотропных материалов, где учитывался лишь один участок скольжения вблизи ее вершины [13].

В заключение отметим, что полученные решения, вообще говоря, распространяются на более широкий диапазон дозвуковых скоростей. Для этого потребуются сохранение эллиптичности исходной системы уравнений и необходим анализ существования и взаиморасположения нулей характеристических функций – скоростей, локализованных около границы раздела волн, соответствующих различным условиям контакта анизотропных полуплоскостей. Из физических соображений следует, что увеличение степени стеснения на межфазной границе приводит к росту скоростей граничных волн, а значит, эти скорости лежат выше значения c_R .

Автор благодарит К.Ю. Осипенко за техническую помощь при подготовке рукописи к печати.

Работа выполнена при поддержке Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS-96-2306).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stroh A.N.* Steady state problems in anisotropic elasticity // *J. Math. and Phys.* 1962. V. 41. № 2. P. 77–103.
2. *Yang W., Suo Z., Shih C.F.* Mechanics of dynamic debonding // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1991. V. 433. № 1889. P. 679–697.
3. *Симонов И.В.* Об интегрируемом случае краевой задачи Римана – Гильберта для двух функций и решении некоторых смешанных задач для составной упругой плоскости // *ПММ.* 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 951–960.
4. *Нахмейн Е.Л., Нуллер Б.М.* О дозвуковом стационарном движении штампов и гибких накладок по границе упругой полуплоскости и составной плоскости // *ПММ.* 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 134–144.
5. *Нахмейн Е.Л., Нуллер Б.М.* Динамические контактные задачи для ортотропной упругой полуплоскости и составной плоскости // *ПММ.* 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 633–641.
6. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
7. *Савин Г.Н.* Концентрация напряжений около отверстий. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 496 с.
8. *Симонов И.В.* Динамика трещины отрыва–сдвига на границе раздела двух упругих материалов // *Докл. АН СССР.* 1983. Т. 271. № 1. С. 65–68.
9. *Ni L., Nemat-Nasser S.* Interface crack in anisotropic dissimilar materials: an analytical solution // *J. Mech. and Phys. Solids.* 1991. V. 39. № 1. P. 113–144.
10. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
11. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
12. *Shield R.T.* Uniqueness for elastic crack and punch problems // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1982. V. 49. № 3. P. 516–518.
13. *Симонов И.В.* Об установившемся движении трещины с участками проскальзывания и отрыва по границе раздела двух упругих материалов // *ПММ.* 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 482–489.

Москва

Поступила в редакцию
16.XI.1999