

УДК 539.3:534.1

© 2001 г.

Л.А. Алексеева, Б.Н. Купесова

МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОЭЛАСТОДИНАМИКИ

На основе аппарата теории обобщенных функций разработан метод граничных интегральных уравнений для решения четырех нестационарных краевых задач связанной термоэластодинамики для сред с анизотропией упругих свойств и тепловой изотропией. Построены регулярные интегральные представления решений в пространстве преобразований Лапласа по времени и сингулярные граничные интегральные уравнения. Доказана единственность решения краевых задач, в том числе в классе ударных волн.

К настоящему времени наиболее изучены решения краевых задач термоупругости в областях классических форм, полученные на основе метода полного и неполного разделения переменных, тогда как динамика термоупругих тел и сред со сложной геометрией границ мало исследована. Для решения задач о концентрации напряжений в однородной и кусочно-однородной линейной среде с концентраторами напряжений различных форм эффективен метод граничных интегральных уравнений (ГИУ). Он разрабатывался рядом авторов для решения статических и квазистатических задач термоупругости в областях со сложной геометрией, а также использовался для решения краевых задач несвязанной термоэластодинамики при задании нестационарных тепловых потоков на границе [1, 2]. В отличие от этих работ здесь разрабатывается метод ГИУ решения нестационарных краевых задач для модели связанной термоупругой среды. Использование такой модели, в которой градиент температуры влияет на деформацию среды, а скорость объемной деформации влияет на изменение температуры, необходимо для расчета влияния динамических нагрузок на термонапряженное состояние.

Метод ГИУ для решения краевых задач связанной термоэластодинамики рассматривался ранее в [3–5]. При этом использовался традиционный подход при построении определяющих соотношений для перемещений и температуры и ГИУ, основанный на тождествах взаимности Бетти и их аналогов для термоупругой среды. Здесь предлагается новый подход при разработке метода ГИУ, основанный на использовании аппарата теории обобщенных функций, в соответствии с предложенной ранее методикой [6]. Он позволяет сравнительно просто ввести в рассмотрение также класс разрывных по производным решений (ударные волны), вывести условия на фронтах и построить динамические аналоги формул Соммерфельда и Гаусса для термоупругой среды в пространстве обобщенных функций.

1. Определяющие соотношения. Ударные волны. Линейная изотропная термоупругая среда характеризуется конечным числом термодинамических параметров: массовой плотностью ρ , упругими постоянными Ламе λ , μ и термоупругими постоянными γ , η и κ . В декартовой системе координат такая среда описывается системой уравнений [7]

$$\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i + F_i = 0$$

$$\theta_{,jj} - \kappa^{-1} \dot{\theta} - \eta_{ij,j} + F_{N+1} = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.1)$$

Здесь u_i – компоненты вектора смещений $u(x, t)$, $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j = \partial_j u_i$; $\theta \equiv u_{N+1}$ – относительная температура ($\theta = T(x, t) - T(x, 0)$), T – абсолютная температура, F_i – ком-

поненты массовой силы, $F_{N+1} = (\lambda_0 \kappa)^{-1} W$, W – количество выделенного тепла на единицу объема за единицу времени, λ_0 – коэффициент теплопроводности, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, связанные с перемещениями законов Дюамеля–Неймана

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} u_{k,l} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \gamma \delta_{ij} \theta \quad (1.2)$$

При $N = 2$ рассматривается случай плоской деформации, при $N = 3$ – пространственный. Всюду по повторяющимся индексам проводится суммирование в указанных пределах их изменения.

Подставляя выражение (1.2) в систему (1.1), получим полную систему уравнений относительно u

$$\begin{aligned} L_{ij}(\partial_x, \partial_t) u_j + F_i &= 0 \\ L_{ij} &= (\lambda + \mu) \partial_i \partial_j + (\mu \Delta - \rho \partial_t \partial_t) \delta_{ij} - \gamma \delta_{j(N+1)} \partial_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ L_{(N+1)j} &= (\Delta - \kappa^{-1} \partial_t) \delta_{j(N+1)} - \eta (1 - \delta_{j(N+1)}) \partial_t \partial_j, \quad j = 1, 2, \dots, N+1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Это система смешанного гиперболо-параболического типа. Распространяющиеся в термоупругой среде волны могут быть ударными. Уравнение фронта волны F имеет вид

$$\det\{L_{ij}^2(v, v_t)\} = \det\{L_{ij}^e(v, v_t)\} \|v\|^2, \quad \|v\|^2 = \sum_{i=1}^N v_i^2 \quad (1.4)$$

где L_{ij}^2 – главная часть оператора $L_{ij}(\partial_x, \partial_t)$, содержащая только старшие производные второго порядка, а L_{ij}^e – дифференциальный оператор уравнений движения упругого тела с параметрами λ, μ, ρ ; $(v, v_t) = (v_1, \dots, v_N, v_t)$ – вектор нормали к F в R^{N+1} .

Из (1.4) следует, что

$$\text{либо } \|v\| = 0, \quad \text{либо } \det\{L_{ij}^e(v, v_t)\} = 0$$

Первое уравнение описывает характеристическую поверхность классического параболического уравнения, которая имеет вид $t = \text{const}$ и не определяет волновой фронт в R^N . Второе уравнение описывает волновые фронты F , движущиеся в R^N со скоростью

$$c = |v_t| / \|v\|, \quad c = c_j, \quad j = 1, 2 \quad (1.5)$$

где $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – скорость объемных упругих волн, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость сдвиговых волн. Таким образом, волновые фронты (ударные волны) в термоупругой среде движутся со скоростью упругих волн. Для вывода условий на фронтах удобно использовать аппарат теории обобщенных функций.

Вводится пространство финитных бесконечно дифференцируемых вектор-функций

$$\varphi(x, t) = \{\varphi_1(x, t), \dots, \varphi_{N+1}(x, t)\} \in D_{N+1}(R^{N+1})$$

Ему соответствует сопряженное пространство $D'_{N+1}(R^{N+1})$ – пространство обобщенных вектор-функций $\hat{f}(x, t) = \{\hat{f}_i(x, t), i = 1, 2, \dots, N+1\}$ – линейных функционалов на $D_{N+1}(R^{N+1})$. С учетом правил дифференцирования обобщенных функций получим уравнения движения $D'_{N+1}(R^{N+1})$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij,j} - \rho \hat{u}_{i,tt} + \rho \hat{G}_i &= \left[\sigma_{ij} v_j - \rho u_{i,t} v_t \right]_F \delta_F(x, t) + \\ &+ \partial_j \left(\left[(\lambda u_k v_k - \gamma \theta) \delta_{ij} + \mu (u_i v_j + u_j v_i) \right]_F \delta_F(x, t) \right) - \rho \partial_t ([u_i]_F v_t \delta_F(x, t)) \end{aligned}$$

$$\hat{\theta}_{,jj} - \kappa^{-1} \hat{\theta}_{,t} - \eta \hat{u}_{j,jt} + \kappa^{-1} \hat{\theta} = \left[(\theta_{,j} - \eta \dot{u}_j) v_j - \kappa^{-1} \theta v_t \right]_F \delta_F(x, t) + \\ + \partial_j \left(\left[\theta v_j - \eta u_j v_t \right]_F \delta_F(x, t) \right)$$

Квадратные скобки означают скачок функции на характеристической поверхности F в R^{N+1} , соответствующей волновому фронту F_t в R^N . Для того чтобы сохранялись условия сплошности среды и вектор-функция u была решением системы (1.1) в $D'_{N+1}(R^{N+1})$, скачки должны удовлетворять следующим условиям:

$$\left[u_j \right]_F = 0, \quad [\theta]_F = 0 \\ \left[\sigma_{ij} v_j - \rho v_t \dot{u}_i \right]_F = 0, \quad \left[(\theta_{,j} - \eta \dot{u}_j) v_j - \kappa^{-1} \theta v_t \right]_F = 0; \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (1.6)$$

При учете уравнений (1.3) и равенства $n_j = v_j / \|v\|$ из них выводим законы сохранения на подвижных волновых фронтах F_t в R^N

$$[u]_{F_t} = 0, \quad [\theta]_{F_t} = 0 \quad (1.7)$$

$$\left[\sigma_{ij} n_j + \rho c \dot{u}_i \right]_{F_t} = 0 \quad (1.8)$$

$$\left[\theta_{,j} n_j \right]_{F_t} = \eta \left[\dot{u}_j n_j \right]_{F_t} \quad (1.9)$$

Здесь n_j – компоненты волнового вектора, единичного вектора, перпендикулярного F_t и направленного в сторону распространения волны. Первое равенство (1.7) является условием сохранения сплошности среды, (1.8) совпадает с известным законом сохранения импульса на фронтах ударных волн в упругих средах. Из второго соотношения (1.7) и (1.9) следует, что на волновых фронтах температура непрерывна, но ее градиент терпит скачок, пропорциональный скачку нормальной составляющей к фронту скорости смещений среды.

Из первого равенства (1.7) следует, в силу непрерывности u , условие равенства касательных производных к фронту, которое имеет вид

$$\left[v_j \dot{u}_i - v_t u_{i,j} \right] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N+1, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (1.10)$$

поскольку векторы $\tau^i = (\delta_1^i v_t, \dots, \delta_N^i v_t, -v_i)$ лежат в касательной плоскости к F :

$$\sum_{j=1}^{N+1} \tau_j^i v_j = \sum_{j=1}^N \delta_j^i v_t v_j - v_i v_t = v_i v_t - v_i v_t = 0$$

Будем называть решение уравнений (1.1), удовлетворяющее на волновых фронтах условиям (1.7) – (1.9), классическим.

2. Тензор Грина и его свойства. Рассмотрим фундаментальные решения уравнений (1.1). Среди них особое место занимает тензор Грина, соответствующий $F_i = \delta(x, t) \delta_{i[j]}$ ($\delta(x, t) \equiv \delta(x) \delta(t)$, δ_{ij} – символ Кронекера) и удовлетворяющий начальным условиям

$$U_i^j(x, 0) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N+1; \quad \dot{U}_i^j(x, 0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad x \neq 0 \quad (2.1)$$

Если массовые силы и тепловые источники известны, то для неограниченной среды решение имеет вид свертки

$$u_i(x, t) = U_i^j(x, t) * F_j(x, t) = \int_0^\infty d\tau \int_{R_N} U_i^j(x-y, t-\tau) F_j(y, \tau) dV(y) \quad (2.2)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N+1$$

Была построена [8] трансформанта Лапласа по времени этого тензора $\bar{U}_i^j(x, p)$ (p – параметр преобразования Лапласа) для $N = 2, 3$. Построение аналитической формулы для оригинала невозможно, поэтому построение ГИУ для решения краевых задач проводится для трансформант перемещений.

Рассмотрим свойства $\bar{U}_i^j(x, p)$.

Свойства симметрии

$$\bar{U}_i^j(x, p) = \bar{U}_j^i(x, p), \quad \bar{U}_i^j(-x, p) = \bar{U}_i^j(x, p)$$

$$\bar{U}_i^3(x, p) = \frac{m(\lambda + 2\mu)}{\eta p \kappa} \bar{U}_3^i(x, p), \quad \bar{U}_i^{N+1}(-x, p) = -\bar{U}_i^{N+1}(x, p) \quad (2.3)$$

$$\bar{U}_{N+1}^i(-x, p) = -\bar{U}_{N+1}^i(x, p), \quad \bar{U}_{N+1}^{N+1}(-x, p) = \bar{U}_{N+1}^{N+1}(x, p); \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

В отличие от упругой среды здесь тензор Грина, вообще говоря, несимметричен ни по индексам, ни по аргументу.

Асимптотика на бесконечности. Для $N = 2$ [8]

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \bar{U}_i^k(r, p) = 0 \quad (2.4)$$

так как $\bar{U}_i^k(r, p)$ выражается через функции Макдональда $K_n(z)$, а $K_n(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty, \operatorname{Re} z > 0$.

Для $N = 3$ затухание экспоненциальное, поскольку в динамические функции входит $\exp(-\zeta_j r)$, $\operatorname{Re} \zeta_j > 0$.

Для построения асимптотики $\bar{U}_i^k(r, p)$ при больших t , так как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U_i^j(x, t) = \lim_{p \rightarrow +0} p \bar{U}_i^j(x, p)$$

рассмотрим свойства величины $p \bar{U}_i^j(x, p)$. При $p \rightarrow +0$ ($\operatorname{Im} p = 0$) имеем $\zeta_2^2 \rightarrow 0$, $p \ln p \rightarrow 0$.

Тогда для $N = 2$

$$p \bar{U}_i^k(x, p) \sim -\frac{p \ln p}{2\pi\mu} \left[\delta_i^k + \frac{1+\epsilon}{2} \frac{c_2^2(2+\epsilon) - 2c_1^2(1+\epsilon)}{c_1^2(1+\epsilon)^2 - pk} r_{,i} r_{,k} \right] \rightarrow 0$$

$$p \bar{U}_3^k(x, p) \sim -\frac{\eta p^2 r}{8\pi(\lambda + 2\mu)} P(p) r_{,k} \rightarrow 0, \quad p \bar{U}_i^3(x, p) \sim -\frac{m p r}{8\pi\kappa} P(p) r_{,i} \rightarrow 0$$

$$p \bar{U}_3^3(x, p) \sim -\frac{P}{4\pi\kappa} P(p) \rightarrow 0, \quad P(p) = \frac{c_1^2(1+\epsilon)^2 \ln p}{c_1^2(1+\epsilon)^2 - pk}$$

т.е. с течением времени возмущение в любой точке среды затухает.

Асимптотические представления $U_i^k(r, p)$ при $x \rightarrow 0$. С использованием асимптотических представлений для специальных функций построены асимптотики $\bar{U}_i^k$, которые представлены в таблице. На основе формулы (2.2) проведены расчеты термонапряженного состояния среды при действии импульсных сосредоточенных и распределенных по времени силовых и тепловых источников для горных пород¹.

¹ Купесова Б.Н. Фундаментальные решения и граничные интегральные уравнения задач связанной термоэластодинамики: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. Алматы, 1998. 98 с.

	$N = 2 (i, k = 1, 2)$	$N = 3 (i, k = 1, 2, 3)$
$\bar{U}_i^k$	$(4\pi\mu)^{-1} \{(1-c^2)r_{,i}r_{,k} - \ln r \delta_i^k (1+c^2)\}$	$(8\pi\mu r)^{-1} \{(1-c^2) r_{,i}r_{,k} + \delta_i^k (1+c^2)\}$
$\bar{U}_i^{N+1}$	$-(4\pi\kappa)^{-1} m r_{,i} r \ln r$	$(8\pi\kappa)^{-1} m r_{,i}$
$\bar{U}_{N+1}^k$	$-(4\pi(\lambda+2\mu))^{-1} \eta p r_{,k} r \ln r$	$(8\pi(\lambda+2\mu))^{-1} \eta p r_{,k}$
$\bar{U}_{N+1}^{N+1}$	$-(2\pi\kappa)^{-1} \ln r$	$(4\pi\kappa r)^{-1}$

3. Постановка краевых задач и единственность решений. Пусть среда занимает область S^- , ограниченную замкнутой поверхностью Ляпунова S с внешней нормалью n . Известны начальные и краевые условия

$$u_i(x, 0) = u_i^0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta^0(x), \quad x \in (S^- + S); \quad \dot{u}_i(x, 0) = \dot{u}_i^0(x), \quad x \in S^-$$

$$u^0 \in C(S + S^-), \quad \dot{u}^0 \in C(S + S^-) \quad (3.1)$$

Задача 1. На границе ($x \in S$) заданы нагрузка и тепловой поток

$$\sigma_{ij}(x, t) n_j(x) = q_i^S(x, t), \quad q_i^S \in C'(S \times [0, \infty)) \quad (3.2)$$

$$\partial\theta(x, t)/\partial n = q^S(x, t), \quad q^S \in C(S \times [0, \infty)) \quad (3.3)$$

Задача 2. На границе ($x \in S$) заданы перемещения и температура

$$u_i(x, t) = u_i^S(x, t), \quad u_i^S(x, 0) = u_i^0(x); \quad u_i^S \in C(S \times [0, \infty)) \quad (3.4)$$

$$\theta(x, t) = \theta^S(x, t), \quad \theta^S(x, 0) = \theta^0(x); \quad \theta^S \in C(S \times [0, \infty)) \quad (3.5)$$

Задача 3. На границе ($x \in S$) заданы перемещения (условия (3.4)) и тепловой поток (условия (3.3)).

Задача 4. На границе ($x \in S$) заданы нагрузка (условия (3.2)) и температура (условия (3.5)).

Здесь $C(\dots)$ – класс непрерывных на указанном множестве функций, $C'(\dots)$ – класс кусочно-непрерывных ограниченных функций. На фронтах решений удовлетворяются условия непрерывности (1.7) – (1.9).

Требуется построить определяющие соотношения и ГИУ для поставленных задач.

Далее для удобства выкладок удобно представить σ_{ij} в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{kl} u_{k,l} - \gamma \delta_{ij} \theta \quad (3.6)$$

где C_{ij}^{kl} – компоненты тензора упругих постоянных, вообще говоря, анизотропной термоупругой среды, удовлетворяющего условиям симметрии

$$C_{ij}^{kl} = C_{ji}^{kl} = C_{ij}^{lk} = C_{kl}^{ij} \quad (3.7)$$

В изотропном случае он имеет вид

$$C_{ij}^{kl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

Теорема 3.1. Если решение краевой задачи существует, то оно единственно.

Доказательство. Обозначим

$$2W(u, \theta, t) = \sigma_{ij} u_{i,j} + \rho \|\dot{u}\|^2 + \gamma \theta u_{j,j} + \gamma (\eta \kappa)^{-1} \theta^2 =$$

$$= C_{ij}^{kl} u_{i,j} u_{k,l} + \rho \|\dot{u}\|^2 + \gamma (\eta \kappa)^{-1} \theta^2, \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

Умножим первое уравнение системы (1.3) скалярно на $\dot{u}_i$, а второе – на $\gamma\eta^{-1}\theta$ и просуммируем. Группируя члены и используя равенство

$$\dot{u}_{i,j}\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij}^{kl}u_{i,j}u_{k,l})_{,t} - \gamma\theta\dot{u}_{i,j}$$

получим

$$(\dot{u}_i\sigma_{ij} + \gamma\eta^{-1}\theta\theta_{,j})_{,j} - W_{,t} - \gamma\eta^{-1}\|\text{grad } \theta\|^2 + \dot{u}_jF_j + \gamma\kappa\eta^{-1}\theta F_{N+1} = 0$$

Проинтегрируем по $S^- \times (0, t)$, используя теорему Остроградского–Гаусса. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt \int_S (\dot{u}_{i,j}\sigma_{ij} + \gamma\eta^{-1}\theta\theta_{,j})n_j dS(y) - \int_{S^-} (W(u, \theta, t) - W(u, \theta\theta))dV(x) - \\ & - \gamma\eta^{-1} \int_0^t dt \int_{S^-} \|\text{grad } \theta\|^2 dV(x) + \sum_F \int_F [(\dot{u}_i\sigma_{ij} + \gamma\eta^{-1}\theta\theta_{,j})v_j - W(u, \theta, t)v_t]_F dF(x) + \\ & + \int_0^t dt \int_{S^-} (\dot{u}_jF_j + \gamma\kappa\eta^{-1}\theta F_{N+1})dV(x) = 0 \end{aligned}$$

Здесь dF – дифференциал площади характеристической поверхности F в $R^N \times t$, соответствующей волновому фронту F_t в R^N . Интегрируем по поверхностям всех волновых фронтов, попадающих в область интегрирования. Вычислим полученный интеграл. Используя условия на фронтах (1.7) – (1.10), преобразуем

$$\begin{aligned} & (\dot{u}_i\sigma_{ij} + \gamma\eta^{-1}\theta\theta_{,j})v_j - W(u, \theta, t)\gamma_t = \frac{1}{2}[\dot{u}_i(\sigma_{ij}v_j - \rho\dot{u}_iv_t)] - \frac{1}{2}[\sigma_{ij}(v_tu_{i,j} - \dot{u}_iv_j)] + \\ & + \gamma\eta^{-1}\left[\theta\theta_{,j}v_j - \frac{1}{2}v_t(\eta\theta u_{j,j} + \kappa^{-1}\theta^2)\right] = \frac{1}{2}\dot{u}_i^-[\sigma_{ij}v_j - \rho\dot{u}_iv_t]\dot{u}_i^- + \frac{1}{2}\sigma_{ij}^-v_j[\dot{u}_i] - \\ & - \frac{1}{2}v_tu_{i,j}^-C_{ij}^{kl}[u_{k,l}] + \frac{1}{2}v_tu_{i,j}^-\gamma[\theta]\delta_{ij} + \gamma\eta^{-1}\theta[\theta_{,j}v_j] - \frac{1}{2}\gamma\theta v_t[u_{j,j}] = \\ & = \gamma\eta^{-1}\theta[(\theta_{,j} - \eta\dot{u}_j)v_j + \eta(\dot{u}_jv_j - v_tu_{j,j})] = 0 \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt \int_S (\dot{u}_{i,j}\sigma_{ij} + \gamma\eta^{-1}\theta\theta_{,j})n_j dS(y) + \int_0^t dt \int_{S^-} (F_j\dot{u}_j + \gamma\eta^{-1}\kappa\theta F_{N+1})dV(x) = \\ & = \int_{S^-} (W(u, \theta, t) - W(u, \theta, 0))dV(x) + \int_0^t dt \int_{S^-} \|\text{grad } \theta\|^2 dV(x) \end{aligned}$$

Это равенство выражает закон сохранения энергии. Из него следует единственность решения краевой задачи.

Действительно, допустим, что существуют два решения $u^k(x, t)$ ($k = 1, 2$). Тогда разность $u = u^1 - u^2$ удовлетворяет нулевым краевым и начальным условиям и соответствующие ей функции $F_i = 0$, $Q = 0$. Для u имеем $\int_{S^-} W(u, \theta, t)dV(x) + \int_0^t dt \int_{S^-} \|\text{grad } \theta\|^2 dV(x) = 0$. В силу положительности подынтегрального выражения следует $u \equiv 0$, т.е. $u^1 = u^2$.

Перейдем к постановке задач в пространстве преобразования Лапласа по времени, поскольку ядра ГИУ удастся построить только в нем. Уравнения движения (1.1) в

этом пространстве с учетом условий на фронтах запишем в виде

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij,j} - \rho p^2 \bar{u}_i + \rho \bar{F}_i + \bar{G}_i &= 0 \\ \bar{\theta}_{,jj} - \rho \kappa^{-1} \bar{\theta} - \eta p \bar{u}_{j,j} + \bar{F}_{N+1} + \bar{G}_{N+1} &= 0 \\ \bar{G}_i &= (\rho \dot{u}_i^0(x) + \rho p u_i^0(x)) H_S^-(x) \\ \bar{G}_{N+1} &= (\kappa^{-1} \theta^0(x) - \eta u_{j,j}^0) H_S^-(x) + \eta u_j^0 n_j \delta_S(x)\end{aligned}\quad (3.8)$$

В пространстве преобразования Лапласа начальные условия трансформируются в асимптотические

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow +\infty} p \bar{u}(x, p) &= u^0(x), \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} p \bar{\theta}(x, p) \rightarrow \theta^0(x), \quad x \in (S^- + S) \\ \lim_{p \rightarrow +\infty} p^2 \bar{u}(x, p) &= \dot{u}^0(x), \quad x \in S^-\end{aligned}\quad (3.9)$$

Граничные условия имеют вид, аналогичный (3.2)–(3.5), однако только для трансформант Лапласа.

Далее построим определяющие соотношения и граничные интегральные уравнения, используя аппарат теории обобщенных функций, следуя методике работы [6].

4. Аналог формулы Сомильяны в пространстве обобщенных функций. Обозначим через $H_S^-(x)$ характеристическую функцию множества S^- , которая для гладкой поверхности S имеет вид

$$H_S^-(x) = \begin{cases} 1, & x \in S^- \\ 1/2, & x \in S \\ 0, & x \notin S^- + S \end{cases}\quad (4.1)$$

Доопределим функции, заданные на S^- , на R^N введением функций

$$\hat{u}(x, p) = \bar{u}(x, p) H_S^-(x), \quad \hat{F}(x, p) = \bar{F} H_S^-(x)$$

которые будем рассматривать как обобщенные функции из $D'_{N+1}(R^N)$. Заметим, что

$$\partial_j \hat{f} = H_S^-(x) \partial_j f - n_j f \delta_S(x)\quad (4.2)$$

где $n_j f \delta_S(x)$ – сингулярная обобщенная функция – простой слой на S . Не нарушая общности, положим что точка $x = 0$ принадлежит S^- .

Теорема 4.1. Если $u(x, p)$ – классическое решение краевой задачи, то

$$\begin{aligned}\hat{u}_m(x, p) &= \bar{U}_m^i * (\rho \hat{F}_i + \hat{G}_i) + \bar{U}_m^i * \bar{q}_i^S \delta_S(x) + C_{ij}^{kl} \bar{U}_{m,j}^i * (\bar{u}_k^S n_l \delta_S(x)) + \\ &+ \bar{U}_m^{N+1} * (\kappa^{-1} \hat{F}_{N+1} + \hat{G}_{N+1}) + \bar{U}_m^{N+1} * (\bar{q}^S - \eta p \bar{u}_j^S n_j) \delta_S(x) + \bar{U}_{m,j}^{N+1} * (\bar{\theta}^S n_j \delta_S) \\ i, j, k, l &= 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, \dots, N+1\end{aligned}$$

Доказательство. Используя правила дифференцирования обобщенных функций и соотношение (4.2), получим уравнения для $\hat{u}(x, p)$ в $D'_N(R^N)$

$$L_{ij}(\partial_x, p) \hat{u}_j + \Psi_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N+1\quad (4.3)$$

$$\bar{\Psi}_i = \hat{F}_i + \hat{G}_i + n_j \bar{\sigma}_{ij} \delta_S(x) + C_{ij}^{kl} (\bar{u}_k n_l \delta_S(x))_{,j}, \quad i = 1, 2, \dots, N\quad (4.4)$$

$$\bar{\Psi}_{N+1} = \hat{F}_{N+1} + \hat{G}_{N+1} + (\bar{\theta}_{,j} - \eta p \bar{u}_j) n_j \delta_S(x) + (\bar{\theta} n_j \delta_S)_{,j}$$

На основе свойства тензора Грина U_i^j рассмотрим обобщенное решение уравнений (4.3), которое представляется в виде свертки

$$\hat{w}_i = \bar{U}_i^j * \hat{\Psi}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N+1 \quad (4.5)$$

Пусть $\text{supp } \varphi \notin S + S^-$, тогда

$$(U_i^j * \hat{\Psi}_j, \varphi_i) = (U_i^j * L_{jk} \hat{u}_k, \varphi_i) = (L_{jk} U_i^j * \hat{u}_k, \varphi_i) = (\delta_{ik} \delta(x) * \hat{u}_k, \varphi_i) = (\hat{u}_i, \varphi_i) = 0 \quad (4.6)$$

т.е. $\hat{w} = 0$ для $x \notin S + S^-$. Следовательно $(\hat{w} - \hat{u})$ – решение однородной краевой задачи (с нулевыми краевыми условиями и правой частью уравнений) тоже равно нулю для $x \notin S^-$. Отсюда в силу регулярности $(\hat{w} - \hat{u})$ и единственности решения краевой задачи следует $\hat{w} = \hat{u}$.

Подставляя в соотношение (4.6) выражение (4.4) и используя правила дифференцирования свертки, с учетом введенных обозначений получим указанную в теореме формулу. Все свертки существуют в силу ограниченности S . Теорема доказана.

Формула теоремы выражает перемещения и температуру внутри области через их граничные значения, а также значения нагрузки и теплового потока на границе. Она является аналогом формулы Соммильяны статической теории упругости, которая выражает перемещения упругой среды через граничные значения нагрузки и перемещений.

Поскольку лишь часть граничных функций известна, формула не дает решения краевой задачи. Покажем, что она верна и для $x \in S$ в смысле определения $H_S^-(x)$ и дает граничные интегральные уравнения для решения поставленных краевых задач.

5. Тензоры с компонентами T_i^j и G_r^j , их свойства. Для записи формулы (4.5) в удобном интегральном виде введем тензор с компонентами $T_i^j(x, n, t)$ ($i, j, k, l = 1, 2, \dots, N, m = 1, 2, \dots, N+1$)

$$\bar{T}_m^k(x, n, p) = C_{ij}^{kl} \bar{U}_{m,j}^i n_l - \eta p \bar{U}_m^{N+1} n_k, \quad \bar{T}_m^{N+1} = \bar{U}_{m,j}^{N+1} n_j \quad (5.1)$$

В изотропном случае тензор с компонентами $\bar{T}_i^k(x, p)$ получен в диссертации, указанной в сноске 1.

Теорема 5.1. Тензор с компонентами $\bar{T}_m^k$ при фиксированном k является фундаментальным решением уравнений (3.6), (1.1), соответствующим сосредоточенной массовой силе и тепловому источнику мультипольного типа

$$\bar{F}_S = (C_{sj}^{[kl]} n_l \partial_j - \eta p n_k \delta_S^{N+1}) \delta(x), \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$\bar{F}_S = \delta_S^{[N+1]} n_j \delta_{,j}, \quad k = N+1$$

Доказательство. Фиксируем k . Подействуем на $\bar{T}_m^k$ ($k, m = 1, 2, \dots, N+1$) оператором $L_{ij}(\partial_x, p)$ и воспользуемся уравнением для $\bar{U}_m^k$. Получим:

для $k = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned} L_{sm}(\partial_x, p) T_m^k &= \sum_{m=1}^{N+1} L_{sm} C_{ij}^{kl} U_{m,j}^i n_l - L_{sm} \eta p n_k U_m^{N+1} = \sum_{m=1}^{N+1} n_l C_{ij}^{kl} L_{sm} U_{m,j}^i - \eta p n_k L_{sm} U_m^{N+1} = \\ &= - \sum_{m=1}^{N+1} n_l C_{ij}^{kl} \delta_S^i \delta_{,j}(x) + \eta p n_k \delta_S^{N+1} \delta(x) \end{aligned}$$

для $k = N + 1$

$$L_{sm}(\partial_x, p)T_m^{N+1} = \sum_{m=1}^{N+1} L_{sm}n_j \partial_j U_m^{N+1} = -\delta_S^{N+1} n_j \delta_{,j}$$

$$s = 1, 2, \dots, N + 1, \quad j, l = 1, 2, \dots, N$$

Теорема доказана.

Введем тензоры с компонентами $\bar{\Sigma}_{ij}^m$ и $\bar{G}_i^m$, порождаемые U_i^m :

$$\bar{\Sigma}_{ij}^m = C_{ij}^{kl} \bar{U}_{k,l}^m - \gamma \bar{\theta}^m \delta_{ij}; \quad \theta^m = U_{N+1}^m, \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, N, \quad m = 1, 2, \dots, N + 1$$

$$\bar{G}_i^m(x, n, p) = \bar{\Sigma}_{ij}^m n_j, \quad \bar{G}_{N+1}^m(x, n, p) = (\bar{\theta}_{,j}^m(x, p) - \eta p \bar{U}_{j,j}^m(x, p)) n_j$$

Σ – тензор напряжений, порождаемых импульсными воздействиями; тензор с компонентами G_i^m для $i = 1, 2, \dots, N$ описывает напряжения на площадке с нормалью n , а для $i = N + 1$ – приток тепла на этой площадке в совокупности с потерями на объемное расширение.

Введем обозначения

$$O_\varepsilon(x) = \{y \in S; \|x - y\| < \varepsilon\}, \quad \text{Sph}_\varepsilon(x) = \{y \in R^N; \|x - y\| < \varepsilon\}$$

$$\text{Sph}_\varepsilon^\pm = \text{Sph}_\varepsilon \cap S^\pm, \quad S_\varepsilon = S - O_\varepsilon, \quad S_\varepsilon^- = S^- - \text{Sph}_\varepsilon^-, \quad \Gamma_\varepsilon^\pm = \{y: \|x - y\| = \varepsilon, y \in S^\pm\}$$

соответственно знаку; $x \in S$.

Теорема 5.2 (динамический аналог формулы Гаусса). Если S – поверхность Ляпунова, то

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_S \bar{G}_i^m(x - y, n(y), p) dS(y) + \rho p^2 \int_{S^-} \bar{U}_i^m(x - y, p) dV(y) &= \rho \delta_i^m H_S^-(x) \\ \text{v.p.} \int_S \bar{G}_{N+1}^m(x - y, n(y), p) dS(y) + \rho \kappa^{-1} \int_{S^-} \bar{U}_{N+1}^m(x - y, p) dV(y) &= \delta_{N+1}^m H_S^-(x) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Доказательство. Свернем уравнения для тензора Грина

$$\bar{\Sigma}_{ij,j}^m(x, p) - p^2 \rho \bar{U}_i^m + \delta_i^m \delta(x) = 0$$

$$\bar{\theta}_{,jj}^m - \rho \kappa^{-1} \bar{\theta}^m - \eta p \bar{U}_{j,j}^m + \delta_{N+1}^m \delta(x) = 0$$

с $H_S^-(x)$. С учетом правил дифференцирования свертки и формулы (4.1) получим

$$\begin{aligned} -\bar{\Sigma}_{ij}^m(x, p) * n_j \delta_S(x) - p^2 \rho \bar{U}_i^m * H_S^-(x) + \rho \delta_i^m H_S^-(x) &= 0, \\ -\bar{\theta}_{,j}^m * n_j \delta_S(x) - \rho \kappa^{-1} \bar{\theta}^m * H_S^-(x) + \eta p \bar{U}_{j,j}^m * n_j \delta_S(x) + \delta_{N+1}^m H_S^-(x) &= 0 \end{aligned}$$

Интегральное представление этой свертки, с учетом введенных обозначений, имеет вид (5.2), причем все интегралы существуют в обычном смысле в силу непрерывности подынтегральных функций для $x \notin S$.

Покажем, что формулы (5.2) верны и для $x \in S$ в смысле определения 2.1.

Трансформируем контур в окрестности точки x , обходя ее по ε -окружности Γ_ε^- в S^- и Γ_ε^+ в $S^+ = R_N - (S^- + S)$. Обозначим $S_\varepsilon^\pm = S^\pm \pm \text{Sph}_\varepsilon^\pm$. Запишем каждое из равенств (5.2) для областей S_ε^+ и S_ε^- :

$$A_i^m + B_i^{m+} + \rho p^2 C_i^{m+} = \delta_i^m, \quad A_i^m + B_i^{m-} + \rho p^2 C_i^{m-} = 0$$

$$A_{N+1}^m + B_{N+1}^{m+} + \frac{p}{\kappa} C_{N+1}^{m+} = \delta_i^{N+1}, \quad A_{N+1}^m + B_{N+1}^{m-} + \frac{p}{\kappa} C_{N+1}^{m-} = 0$$

$$A_j^m = \int_{S_\varepsilon} \bar{G}_j^m(x-y, n(y), p) dS(y), \quad B_j^{m\pm} = \int_{\Gamma_\varepsilon^\pm} \bar{G}_j^m(x-y, n(y), p) dS(y)$$

$$C_j^{m\pm} = \int_{S_\varepsilon^\pm} \bar{U}_j^m(x-y, p) dV(y), \quad j = 1, 2, \dots, N+1$$

Сложим попарно уравнения в каждой строке и перейдем к пределу по $\varepsilon \rightarrow 0$. Объемные интегралы $C_j^{m\pm}$ стремятся к интегралу по всей области в силу слабой особенности по r подынтегральной функции (см. таблицу). Выделим части тензора с компонентами $\bar{G}_i^k$, имеющие сильную особенность по r :

$$\tilde{G}_i^m = C_{ij}^{kl} \bar{U}_{k,l}^m n_j, \quad \tilde{G}_{N+1}^m(x, n, p) = \bar{U}_{N+1,j}^m n_j, \quad m = 1, 2, \dots, N+1, i, j, k, l = 1, 2, \dots, N \quad (5.3)$$

Поскольку $\tilde{G}_i^m(x, n, p) = -\tilde{G}_i^m(-x, n, p)$ и в противоположных точках y^+ и y^- шара Sph_ε $y^+ - x = -(y^- - x)$, $n(y^+) = n(y^-)$, имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\bar{B}_j^{m+} + \bar{B}_j^{m-}\} = 0, \quad j, m = 1, 2, \dots, N+1$$

В результате получим доказываемое.

Если в (5.2) положить $S^- = \{y : \|x - y\| < \varepsilon\}$ и воспользоваться слабой асимптотикой $\bar{U}_i^m(x, p)$ при $\|x\| \rightarrow 0$, то получим

Следствие 5.1. Для всех x

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} \bar{G}_i^m\left(x-y, \frac{y-x}{\varepsilon}, p\right) dS(y) = \delta_i^m$$

6. Граничные интегральные уравнения краевых задач связанной термоэластодинамики.

Теорема 6.1. Если классическое решение $u(x, t)$ краевой задачи существует, $\bar{u}(x, p) \in C(S^- + S)$ и удовлетворяет условию Гёльдера на S для любого фиксированного $p(\text{Re } p > 0)$, то

$$\bar{u}_m H_S^-(x) = \bar{U}_m^j * (\hat{F}_j + \hat{G}_j) + \int_S (\bar{U}_m^k(x-y, p) \bar{q}_k^S(y, p) + \bar{T}_m^k(x-y, p, n(y)) \bar{u}_k^S(y, p)) dS(y) \quad (6.1)$$

$\bar{q}_{N+1}^S = \bar{q}^S(x, p)$, $\bar{u}_{N+1}^S = \bar{\theta}^S(x, p)$. Для $x \in S$ интеграл сингулярный берется в смысле главного значения.

Доказательство. Вернемся к аналогу формулы Сомильяны (2.7), интегральная запись которого в силу единственности решения имеет указанный вид. Поскольку U_m^k и соответственно T_m^k – решение системы (1.1) и имеют особенности лишь при $x - y = 0$, т.е. на S , то интегралы в правой части равенства (6.1) существуют для всех $x \notin S$. Следовательно, (2.7) – решение системы (1.1) в S^- .

Для доказательства равенства (6.1) на границе рассмотрим асимптотики $\bar{T}_m^k$ и $\bar{G}_k^m$ при $r \rightarrow 0$. Согласно соотношениям (5.1), имеем

$$\bar{T}_m^k(x, n, p) \sim C_{ij}^{kl} \bar{U}_{m,j}^i n_l, i, j, k, l = 1, 2, \dots, N; \quad \bar{T}_m^{N+1} \sim \bar{U}_{m,j}^{N+1} n_j, \quad m = 1, 2, \dots, N+1$$

Из свойств симметрии (3.7) следует, что

$$\bar{G}_k^m \sim C_{kj}^{il} \bar{U}_{i,l}^m n_j = C_{kl}^{ij} \bar{U}_{m,j}^i n_l = C_{ij}^{kl} \bar{U}_{m,j}^i n_l \sim \bar{T}_m^k$$

$$\bar{G}_{N+1}^{N+1} \sim \bar{U}_{N+1,j}^{N+1} n_j = \bar{T}_{N+1}^{N+1}, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, N$$

При $r \rightarrow 0$ имеем

$$\bar{U}_{N+1}^k = O_N, \quad \bar{U}_k^{N+1} = O_N,$$

$$\bar{G}_{N+1}^j(x, n, p) \sim \bar{U}_{N+1,j}^k n_j = O_N, \quad \bar{G}_k^{N+1}(x, n, p) \sim C_{kl}^{ij} \bar{U}_{i,j}^{N+1} n_j O_N,$$

$$\bar{T}_{N+1}^k(x, n, p) = O_N, \quad \bar{T}_k^{N+1} = O_N, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$O_2 = O(\ln r), \quad O_3 = O(r^{-1})$$

Следствием этого являются равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} \bar{T}_i^m(x-y, n(y), p) dS(y) = \delta_i^m \quad (6.2)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} \bar{T}_i^{N+1}(x-y, n(y), p) dS(y) = \delta_i^{N+1} \quad (6.3)$$

справедливы для $N = 2, 3$.

Пусть $x \in S$. Рассмотрим область $S^- = \text{Sph}_\varepsilon^-(x)$ с границей $S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^-$. Записывая аналог формулы Соммильяны для этой области, так как $x \notin S^- = \text{Sph}_\varepsilon^-$, получим

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{S_\varepsilon} \bar{U}_i^k(x-y) f_k(y) dS_\varepsilon(y) + \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \bar{U}_i^k(x-y) f_k(y) d\Gamma_\varepsilon^-(y) + \\ & + \int_{S_\varepsilon} \bar{T}_i^k(x-y, n(y), p) u_k(y) dS_\varepsilon(y) + \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \bar{T}_i^k(x-y, n(y), p) u_k(y) d\Gamma_\varepsilon^-(y) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеем

$$\begin{aligned} 0 = & \text{v.p.} \int_S \left\{ \sum_{m=1}^{N+1} [\bar{T}_i^m(x-y, n(y), p) u_m(y) + \bar{U}_i^m(x-y) f_m(y)] \right\} dS(y) + \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \bar{T}_i^m(x-y, n'(y), p) u_m(y, p) dS(y), \quad n'(y) = \frac{x-y}{\|x-y\|} \end{aligned}$$

Интеграл в смысле главного значения существует в силу указанной асимптотики тензора с компонентами $\bar{T}_i^m(x, p)$ и свойств антисимметрии сильной особенности. Вычислим последние пределы, используя условие Гёльдера и равенства (6.2), (6.3):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \bar{T}_i^m(x-y, n'(y), p) u_m(y) dS(y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \bar{T}_i^m(x-y, n'(y), p) (u_m(y) - u_m(x)) dS(y) + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_m(x) \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \bar{T}_i^m(x-y, n'(y), p) dS(y) = u_m(x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^-} (\bar{T}_i^m(x-y, n'(y), p) - \\ &- \bar{G}_m^i(x-y, n'(y), p)) dS(y) + u_m(x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \bar{G}_m^i(x-y, n'(y), p) dS(y) = -\frac{1}{2} u_m(x) \end{aligned}$$

Переносим последнее слагаемое из равенства в левую часть равенства (6.4), получим соотношение (6.1), где интегралы, содержащие $\bar{T}_m^k$, сингулярные, берутся в смысле главного значения. Теорема доказана.

7. Заключение. Формулы (6.3) для $x \in S$ являются граничными интегральными уравнениями, которые позволяют решать четыре краевые задачи. Все построенные уравнения поддаются численному решению на основе интерполяции границы и ис-

комых функций сплайнами, порядок которых выбирается в зависимости от требуемой точности решения задачи. В случае первой краевой задачи алгоритм численного решения ГИУ хорошо разработан для решения подобных статических задач теории упругости. Для остальных краевых задач решение требует использования различных методов регуляризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alexeyeva L.A., Dadaeva A.N. Boundary element method for transient problems of uncoupled thermoelastodynamics // Boundary Element XIX. Computational Mechanics Publication. 1997. P. 118–125.
2. Алексеева Л.А., Дадаева А.Н., Жанбырбаев Н.Б. Метод граничных интегральных уравнений в нестационарных краевых задачах несвязанной термоупругости // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 852–858.
3. Suh I., Tosaka N. Boundary element analysis of linear coupled thermoelasticity problems by using Laplace transformation // Boundary Element. Methods in Appl. Mech.: Proc 1st Joint Jap. – US Symp. Boundary Element Methods, Tokyo; Oxford etc.: Pergamon Press, 1988. P. 535–544.
4. Sharp S., Crouch S.L. Boundary integral methods for thermoelasticity problems // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1986. V. 53. № 2. P. 298–302.
5. Fleurier J., Predeleanu M. On the use of coupled fundamental solutions in boundary element method for thermoelastic problems // Eng. Anal. 1987. V. 4. № 2. P. 70–74.
6. Алексеева Л.А. Аналогии формул Кирхгофа и Сомильяны в плоских задачах эластодинамики // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 298–308.
7. Nowacki W. Dynamiczne Zagadnienia Termosprezystosci. Warszawa: Pol. Akad. Nauk, 1966. = Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
8. Kupessova B.N. Fundamental solutions of coupled thermoelastodynamics // Rep. Nat. Acad. Sci., RK. 1995. № 4. P. 15–23.

Алма-Ата
e-mail: alexeeva@math.kz
kupesova@math.kz

Поступила в редакцию
11.XI.1999