

УДК 539.3:545.1

© 2001 г. Н.Н. Рогачева

ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СВЯЗИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ОТ ПОЛОЖЕНИЯ И РАЗМЕРА ЭЛЕКТРОДОВ

На примерах круглой пьезокерамической пластины и пьезокерамической цилиндрической оболочки, совершающих гармонические колебания, изучается зависимость коэффициента электромеханической связи (КЭМС) от размера электродов и их положения на лицевых поверхностях рассматриваемых тел. Показано, что КЭМС зависит от частоты колебаний и условий закрепления краев сложным образом. Для рассматриваемых пьезоэлектрических элементов найдены положение и размер электродов, при которых КЭМС существенно больше, чем при полностью электродированных лицевых поверхностях.

Эффективность преобразования энергии является важнейшей характеристикой работы пьезоэлектрического элемента. Общепринятое название этой характеристики – коэффициент электромеханической связи (КЭМС), к определению которого в современной теории электроупругости до сих пор нет единого подхода. Данная работа является продолжением исследований КЭМС, выполненных ранее [1–3], где на примерах балок, пластин, цилиндрических оболочек проанализированы три различных метода вычисления КЭМС.

1. Обсуждаемые методы определения КЭМС. Наиболее популярна следующая (см., например, [4, 5]) формула для вычисления КЭМС, который обозначим как k_s :

$$k_s^2 = U_m^2 / (U_e U_d) \quad (1.1)$$

где U_e , U_d и U_m – упругая, электрическая и взаимная энергии соответственно. Эта формула широко используется для определения пьезоэлектрических характеристик пьезоэлектрического материала, традиционно обозначаемых как k_{33} , k_{31} , Они находятся путем решения задач статики электроупругих тел простейшей геометрии, причем решения не зависят ни от координат точек тела, ни от времени. В дальнейшем такие электроупругие состояния условимся называть однородными, а КЭМС k_s , найденный по формуле (1.1), статическим КЭМС.

Электроупругое состояние реального пьезоэлектрического элемента, как правило, неоднородное. В случае неоднородных электроупругих состояний КЭМС зависит от многих параметров: частоты колебаний, геометрии пьезоэлектрического элемента и его электродов, механических и электрических граничных условий. Значения КЭМС для реальных пьезоэлектрических элементов часто меньше табличных значений КЭМС k_s для однородных состояний. Однако некоторые авторы используют формулу (1.1) для неоднородных электроупругих состояний, для которых она непригодна [6, 7].

Для определения КЭМС в динамических задачах при колебаниях на частотах, близких к резонансным, часто используется формула Мэсона [4]. КЭМС, найденный по этой формуле, будем называть динамическим, обозначая его через k_d :

$$k_d^2 = (\omega_a^2 - \omega_r^2) / \omega_a^2 \quad (1.2)$$

где ω_r – резонансная частота колебаний, ω_a – соответствующая ей антирезонансная частота колебаний.

Третья из исследуемых формул – энергетическая, найденное с ее помощью значение КЭМС будем называть энергетическим, обозначая его через k_e :

$$k_e^2 = (U^{(d)} - U^{(sh)}) / U^{(d)} \quad (1.3)$$

где $U^{(d)}$ – внутренняя энергия пьезоэлектрического элемента с разомкнутыми электродами, а $U^{(sh)}$ – внутренняя энергия того же элемента с короткозамкнутыми электродами. Чтобы вычислить k_e , следует сначала решить исходную задачу, затем, считая деформации известными, вычислить внутреннюю энергию элемента с разомкнутыми электродами $U^{(d)}$ и внутреннюю энергию элемента с короткозамкнутыми электродами. При вычислении $U^{(d)}$ разность потенциалов на разомкнутых электродах находится из интегрального условия на разомкнутых электродах

$$\int_s \dot{D}_3^{(d)} ds = 0 \quad (1.4)$$

где s – поверхность электрода, $D_3^{(d)}$ – нормальная к поверхности электрода компонента вектора электрической индукции, точка над $D_3^{(d)}$ означает производную по времени.

На короткозамкнутых электродах электрический потенциал $\Psi^{(sh)}$ должен быть равен нулю:

$$\Psi^{(sh)} = 0 \quad (1.5)$$

Энергетический метод определения КЭМС обсуждался ранее [8–11]. Метод был впервые использован [10, 11] для вычисления КЭМС в одномерных задачах – для определения КЭМС стержня с толщинной поляризацией с частично электродированными боковыми поверхностями и стержня с продольной поляризацией с заглубленными электродами. Этим методом был исследован [1] КЭМС пьезокерамической круглой пластины и пьезокерамической цилиндрической оболочки. Для типовых пьезоэлектрических элементов, выпускаемых промышленностью, был выполнен [2] анализ трех перечисленных выше способов определения КЭМС, который подтвердил ранее полученное [1] заключение об области применимости формул (1.1)–(1.3). Энергетическим методом был проанализирован [3] КЭМС трехслойной балки.

2. Анализ КЭМС круглой пьезокерамической пластины. Рассмотрим гармонические колебания круглой пластины радиуса R и толщины $2h$ с толщинной поляризацией. На лицевых поверхностях пластины симметрично относительно ее срединной плоскости расположена пара электродов, которые покрывают полностью либо частично лицевые поверхности. Пластина совершает вынужденные колебания под действием электрической нагрузки. Было показано [1], что уравнения состояния для пластины с электродами на лицевых поверхностях и для пластины без электродов различны.

Так как рассматриваемые колебания гармонические, то будем записывать все уравнения относительно амплитудных значений искомых величин.

В полярных координатах r, φ соотношения электроупругости пластины с лицевыми поверхностями, полностью покрытыми электродами, на которых задан электрический потенциал, записываются в виде

$$\begin{aligned} T_1^e &= \frac{2h}{s_{11}^E(1-\nu^2)}(\epsilon_1^e + \nu\epsilon_\varphi^e) + \frac{2d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu)}V \\ T_\varphi^e &= \frac{2h}{s_{11}^E(1-\nu^2)}(\epsilon_\varphi^e + \nu\epsilon_1^e) + \frac{2d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu)}V \\ D_3^e &= -\epsilon_{33}^T \frac{V}{h} + \frac{d_{31}}{2h}(T_1^e + T_\varphi^e), \quad E_3^e = -\frac{V}{h} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Соотношения электроупругости для пластины без электродов на лицевых поверхностях имеют вид

$$T_1^n = 2hB(\epsilon_1^n + \sigma\epsilon_\phi^n), \quad T_\phi^n = 2hB(\epsilon_\phi^n + \sigma\epsilon_1^n) \quad (2.2)$$

$$E_3^n = -\frac{d_{31}}{2h\epsilon_{33}^T}(T_1^n + T_\phi^n)$$

где

$$B = \frac{2 - (1 - \nu)k_p^2}{2s_{11}^E(1 - \nu^2)(1 - k_p^2)}, \quad \sigma = \frac{2\nu + (1 - \nu)k_p^2}{2 - (1 - \nu)k_p^2}$$

$$k_p^2 = \frac{2k_{31}^2}{1 - \nu}, \quad k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E\epsilon_{33}^T}, \quad \nu = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}$$

Верхними индексами e и n помечены искомые величины для пластины с электродами и без них на лицевых поверхностях соответственно.

Уравнения равновесия

$$\frac{dT_1^a}{dr} + \frac{T_1^a - T_\phi^a}{r} + 2h\rho\omega^2 u^a = 0 \quad (2.3)$$

и формулы деформации – перемещения

$$\epsilon_1^a = \frac{du^a}{dr}, \quad \epsilon_\phi^a = \frac{u^a}{r} \quad (2.4)$$

не зависят от электрических условий. Они такие же, как в теории упругих пластин. В уравнениях (2.3), (2.4) и далее верхний индекс a следует заменить на e для пластины с электродированными лицевыми поверхностями и на n для пластины без электродов.

В уравнениях (2.1)–(2.4) $2V$ – заданная на электродах разность электрического потенциала, T_1^a и T_ϕ^a , ϵ_1^a и ϵ_ϕ^a – усилия и компоненты тензора деформаций в окружном и угловом направлении соответственно, E_3^a и D_3^a – нормальные к лицевой поверхности пластины компоненты векторов напряженности электрического поля и электрической индукции соответственно, s_{11}^E , s_{12}^E – упругие податливости при постоянном электрическом поле, d_{31} – пьезоэлектрический модуль, ϵ_{33}^T – диэлектрическая проницаемость при постоянных напряжениях.

Подставляя первые два выражения (2.1), а также (2.2) и (2.4) в уравнение (2.3), получим разрешающее уравнение относительно перемещения u

$$r^2 \frac{d^2 u^a}{dr^2} + r \frac{du^a}{dr} + [(\lambda_i \xi)^2 - 1]u^a = 0, \quad \xi = \frac{r}{R}, \quad i = 1, 2 \quad (2.5)$$

$$\lambda_1^2 = \rho\omega^2 s_{11}^E R^2 (1 - \nu^2), \quad \lambda_2^2 = \rho\omega^2 B R^2$$

где λ_1 и λ_2 – безразмерные частоты для пластины с электродами на лицевых поверхностях ($a = e$) и для пластины без электродов ($a = n$) соответственно.

Задача 1. Лицевые поверхности круглой пластины полностью покрыты электродами.

Решение этой задачи известно. Здесь оно приводится с целью анализа КЭМС. Так как решение в центре пластины должно быть ограничено, оно имеет вид

$$u^e = C_1 J_1(\lambda_1 \xi) \quad (2.6)$$

Постоянная C_1 находится из условия на крае пластины.

На свободном от закреплений и нагрузки крае пластины радиальное усилие равно нулю:

$$r = R: T_1^e = 0 \quad (2.7)$$

Постоянная C_1 , найденная из условия (2.7), равна

$$C_1 = \frac{(1 + \nu) R d_{31}}{\lambda_1 J_0(\lambda_1) - (1 - \nu) J_1(\lambda_1)} \frac{V}{h} \quad (2.8)$$

Амплитудное значение электрического тока находится следующим образом:

$$I = -i\omega \int_s D_3^{(e)} ds = i\omega R^2 \epsilon_{33}^T \left[(1 - k_p^2) \frac{V}{h} - \frac{k_p^2}{R d_{31}} C_1 J_1(\lambda_1) \right]$$

Согласно формуле (2.8), уравнение для определения резонансных частот имеет вид

$$\lambda_1 J_0(\lambda_1) - (1 - \nu) J_1(\lambda_1) = 0$$

Антирезонансные безразмерные частоты, при которых ток, проходящий через электроды, обращается в нуль, определяются из уравнения

$$\lambda_1 J_0(\lambda_1) - \left[1 - \nu - (1 + \nu) \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \right] J_1(\lambda_1) = 0$$

Приведем первые четыре безразмерные резонансные частоты для круглой пластины, сделанной из пьезокерамики PZT-5: 2,08, 5,40, 8,58, 11,34. Соответствующие им антирезонансные безразмерные частоты таковы: 2,46, 5,54, 8,67, 11,80. Воспользовавшись формулой (1.2), вычислим по найденным резонансным и антирезонансным частотам значения КЭМС k_d : 0,282, 0,051, 0,021, 0,011 [1].

Используя полученное для пластины решение, вычислим КЭМС k_s по формуле (1.1), где

$$U_m = \frac{d_{31}}{2} \int_s (T_1^e + T_\phi^e) E_3^e ds, \quad U_d = 2h \epsilon_{33}^T \int_s (E_3^e)^2 ds$$

$$U_e = \frac{s_{11}^E}{4h} \int_s [(T_1^e)^2 + (T_\phi^e)^2 - 2\nu T_1^e T_\phi^e] ds$$

Вычисление КЭМС k_e для круглой пластины детально описано ранее [1]. Энергия $U^{(d)}$ и $U^{(sh)}$ вычисляется по формулам

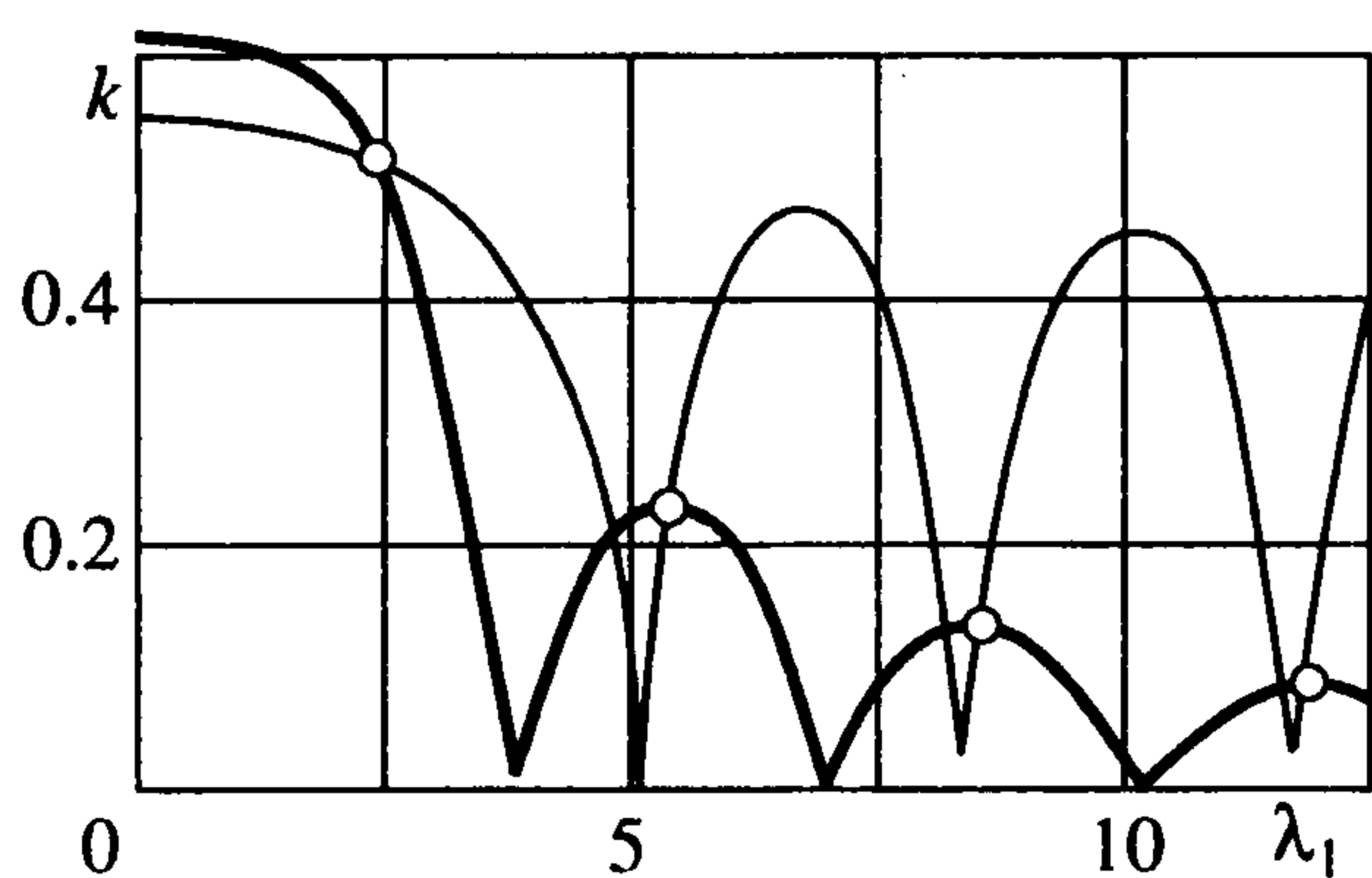
$$U^{(d)} = \int_s (T_1^{(d)} \epsilon_1^{(d)} + T_\phi^{(d)} \epsilon_\phi^{(d)} + 2h E_3^{(d)} D_3^{(d)}) ds$$

$$U^{(sh)} = \int_s (T_1^{(sh)} \epsilon_1^{(sh)} + T_\phi^{(sh)} \epsilon_\phi^{(sh)}) ds$$

причем $E_3^{(d)}$ определяется из условия (1.4), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{2d_{31}(1 - k_p^2)}{k_p^2} E_3^{(d)} = \int_s (\epsilon_1 + \epsilon_\phi) ds \quad (2.9)$$

Формулу для $U^{(d)}$ можно упростить, воспользовавшись тем, что $E_3^{(d)}$ – постоянная, а



Фиг. 1

лыми точками показаны значения k_d . Так как для вычисления k_d используются резонансная λ_r и антирезонансная λ_a частоты, будем считать, что формула (1.2) дает значение КЭМС k_d для частоты, равной полусумме резонансной и антирезонансной частот. Из фиг. 1 видно, что значения k_d соответствуют точкам пересечения линий k_s и k_e . Но линия k_s не выглядит достоверной, так как ее максимумы почти не убывают с ростом частоты колебаний.

Существенная разница между значениями k_e , k_d и k_s наблюдается в случае, когда край пластины жестко зашпемлен. На жестко зашпемленном крае перемещение равно нулю:

$$r = R: u^e = 0 \quad (2.10)$$

и решение задачи записывается в виде

$$u^e = 0, \quad \varepsilon_1^e = \varepsilon_\phi^e = 0, \quad T_1^e = T_\phi^e = \frac{2d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu)} V \quad (2.11)$$

Пользуясь формулами (1.1)–(1.3), получим следующие значения КЭМС для пластины с жестко зашпемленным краем:

$$k_e = k_d = 0, \quad k_s = k_p \quad (2.12)$$

При заданной электрической нагрузке пластина с жестко зашпемленным краем не деформируется, а значит, электрическая энергия не обращается в механическую энергию. Очевидно, что значения k_e , k_d правильные, значения k_s неверны.

Отметим, что формула (1.3) для k_e более общая, чем формула (1.2) для k_d : формула для k_d справедлива только для конкретных значений частот, близких к резонансным, формула для k_e верна для любых задач статики и динамики.

Задача 2. Электроды покрывают часть лицевой поверхности пластины $0 \leq r \leq R_0 < R$. Решение для центральной части пластины, покрытой электродами, имеет вид (2.6). Для кольцевой части пластины, не имеющей электродов на лицевых поверхностях, решение записывается в виде

$$u^n = C_2 J_1(\lambda_2 \xi) + C_3 Y_1(\lambda_2 \xi) \quad (2.13)$$

где C_2 , C_3 – произвольные постоянные.

Постоянные C_1 , C_2 , C_3 определяются из условий равенства радиальных перемещений и усилий на линии $r = R_0$, разделяющей пластину на части, покрытые электродами и без них

$$r = R_0: T_1^e = T_1^n, \quad u^e = u^n$$

и условия (2.7), если край пластины свободный, или (2.10), если край жестко зашпемлен.

интеграл от $D_3^{(d)}$ равен нулю согласно уравнению (1.4). В результате получим

$$U^{(d)} = \int_s (T_1^{(d)} \varepsilon_1^{(d)} + T_\phi^{(d)} \varepsilon_\phi^{(d)}) ds$$

Результаты вычисления КЭМС как функции безразмерной частоты представлены на фиг. 1. Здесь и в дальнейшем расчеты выполнены для пьезокерамики PZT-5. Тонкая линия изображает k_s , жирная линия соответствует k_e , светлыми точками показаны значения k_d .

После преобразований получим следующую систему уравнений для определения постоянных C_1, C_2, C_3 в случае пластины со свободным краем:

$$\sum_{i=1}^3 C_i a_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, 3$$

где

$$a_{11} = J_1(\lambda_1 \xi_0), \quad a_{12} = -J_1(\lambda_2 \xi_0), \quad a_{13} = -Y_1(\lambda_2 \xi_0)$$

$$a_{21} = \frac{1}{1-\nu^2} \left[\lambda_1 J_0(\lambda_1 \xi_0) - \frac{1-\nu}{\xi_0} J_1(\lambda_1 \xi_0) \right]$$

$$a_{22} = -Bs_{11}^E \left[\lambda_2 J_0(\lambda_2 \xi_0) - \frac{1-\sigma}{\xi_0} J_1(\lambda_2 \xi_0) \right]$$

$$a_{23} = -Bs_{11}^E \left[\lambda_2 Y_0(\lambda_2 \xi_0) - \frac{1-\sigma}{\xi_0} Y_1(\lambda_2 \xi_0) \right]$$

$$a_{31} = 0, \quad a_{32} = \lambda_2 J_0(\lambda_2) - (1-\sigma)J_1(\lambda_2)$$

$$a_{33} = \lambda_2 Y_0(\lambda_2) - (1-\sigma)Y_1(\lambda_2)$$

$$b_1 = 0, \quad b_2 = -\frac{d_{31}}{1-\nu} \frac{R}{h} V, \quad b_3 = 0, \quad \xi_0 = \frac{R_0}{R}$$

Для пластины с жестко зашечленным краем приведенные выше формулы сохраняют силу. Исключение представляют формулы для коэффициентов a_{32}, a_{33} , которые следует взять в виде

$$a_{32} = J_1(\lambda_2), \quad a_{33} = Y_1(\lambda_2)$$

КЭМС k_e вычисляется по формуле (1.3), в которой $U^{(d)}$ и $U^{(sh)}$ определяются следующим образом:

$$U^{(c)} = \int_{s_1} (T_1^{(c)} \varepsilon_1 + T_\varphi^{(c)} \varepsilon_\varphi) ds_1 + \int_{s_2} (T_1 \varepsilon_1 + T_\varphi \varepsilon_\varphi) ds_2, \quad (c) = (d), (sh)$$

Здесь s_1 и s_2 — области одной из лицевых поверхностей пластины, покрытые электродами и без электродов соответственно.

Приведенные на фиг. 2–4 зависимости соответствуют пластине со свободным краем (сплошные линии) и с жестко зашечленным краем (штриховые линии).

Зависимость КЭМС k_e от радиуса электрода R_0 вблизи первой резонансной частоты представлена на фиг. 2. Видно, что КЭМС достигает максимума для пластины со свободным краем при $R_0 \approx 0,85R$, а для пластины с жестко зашечленным краем при $R_0 \approx 0,4R$.

На фиг. 3 показана зависимость первой безразмерной резонансной частоты λ_1 от радиуса электродов. Видно, что для пластины из материала PZT-5 первая резонансная частоты пластины без электродов примерно на 20% больше, чем у пластины с лицевыми поверхностями, полностью покрытыми электродами.

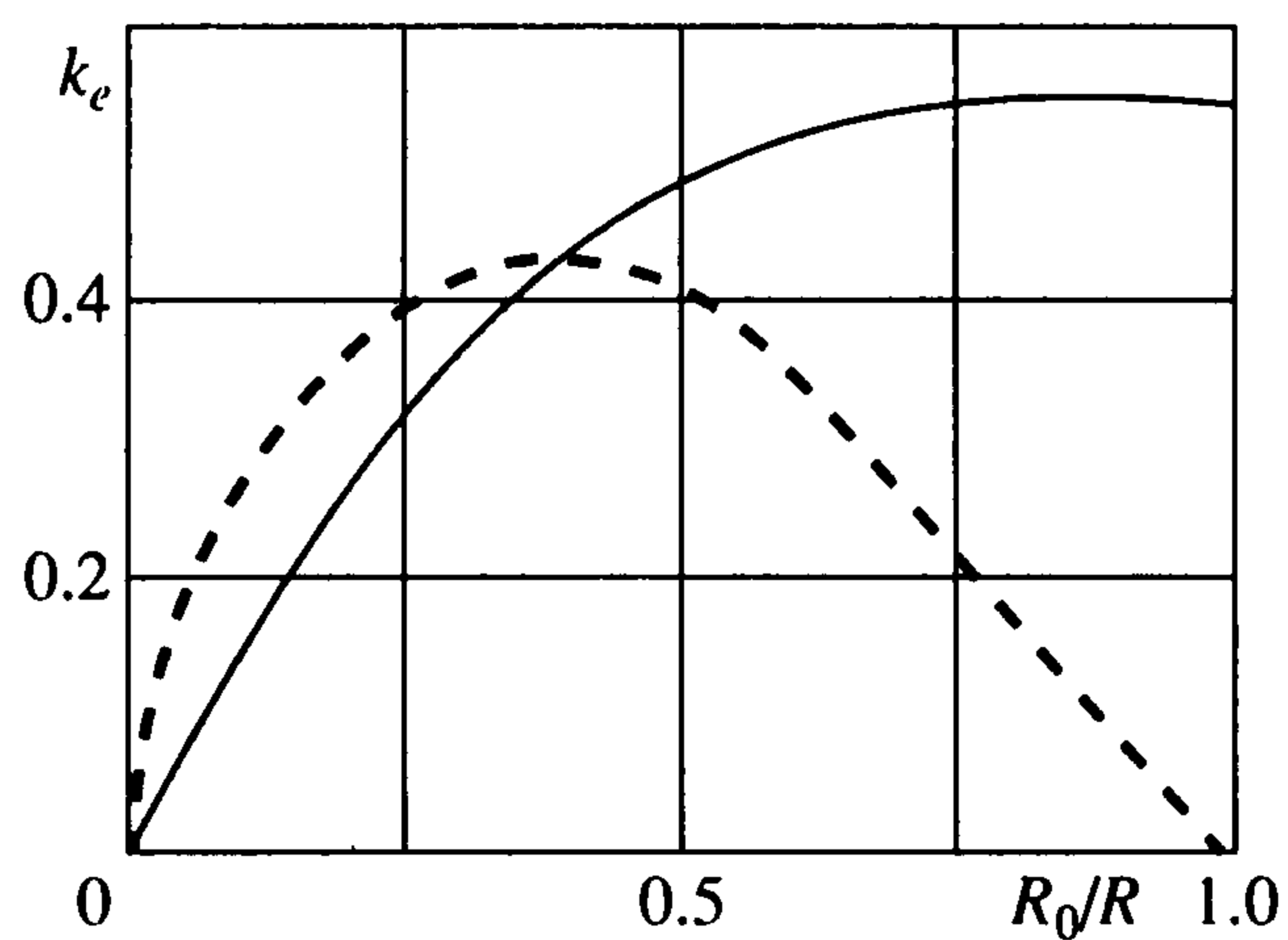
Задача 3. Электроды на каждой лицевой поверхности пластины имеют форму кольца $0 < R_0 \leq r \leq R_1 < R$.

Как отмечено выше, перемещения части пластины, покрытой электродами, и части без электродов описываются разными формулами. Имеем

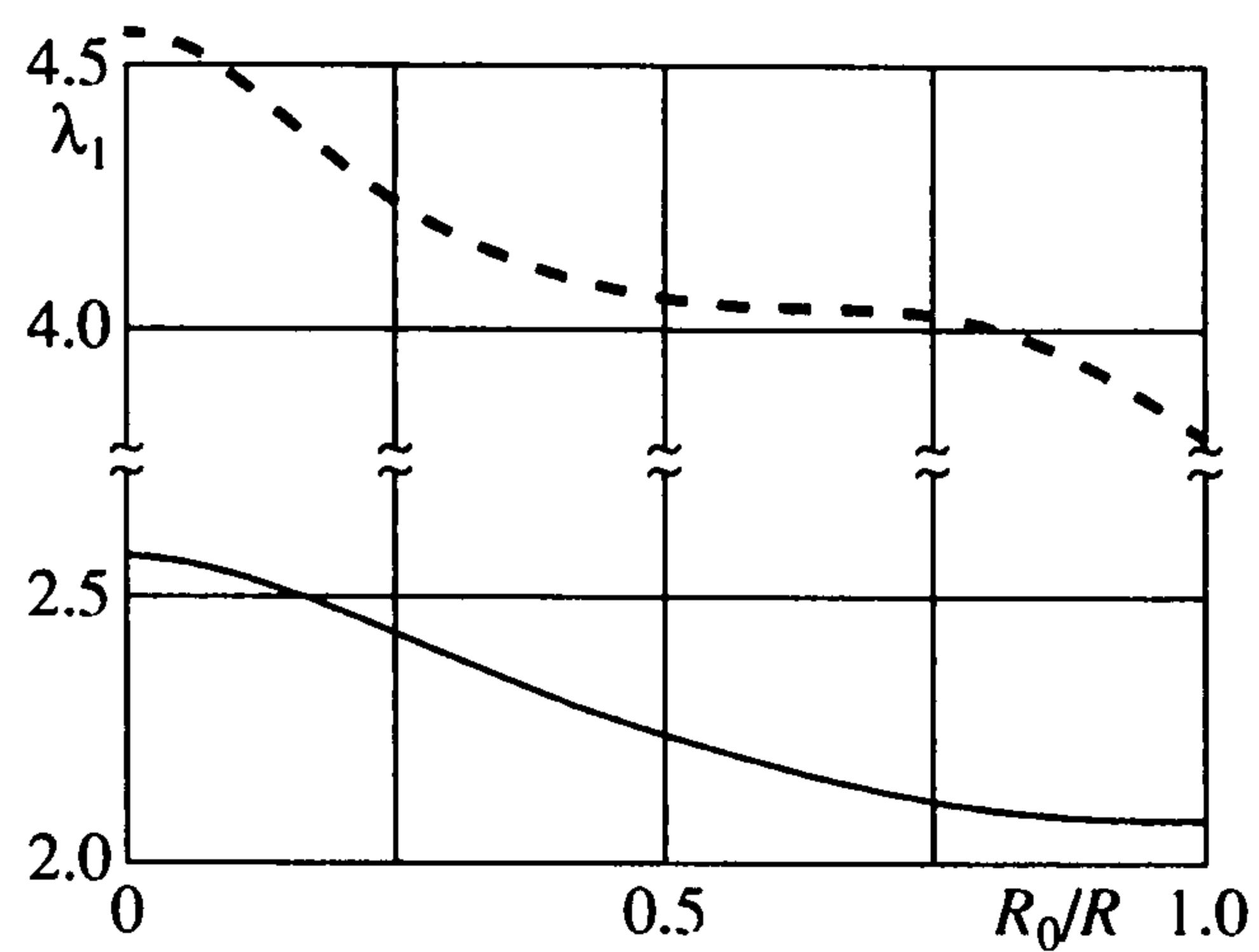
$$0 \leq r \leq R_0 : \quad u^n = C_1 J_1(\lambda_2 \xi)$$

$$R_0 \leq r \leq R_1 : \quad u^e = C_2 J_1(\lambda_1 \xi) + C_3 Y_1(\lambda_1 \xi)$$

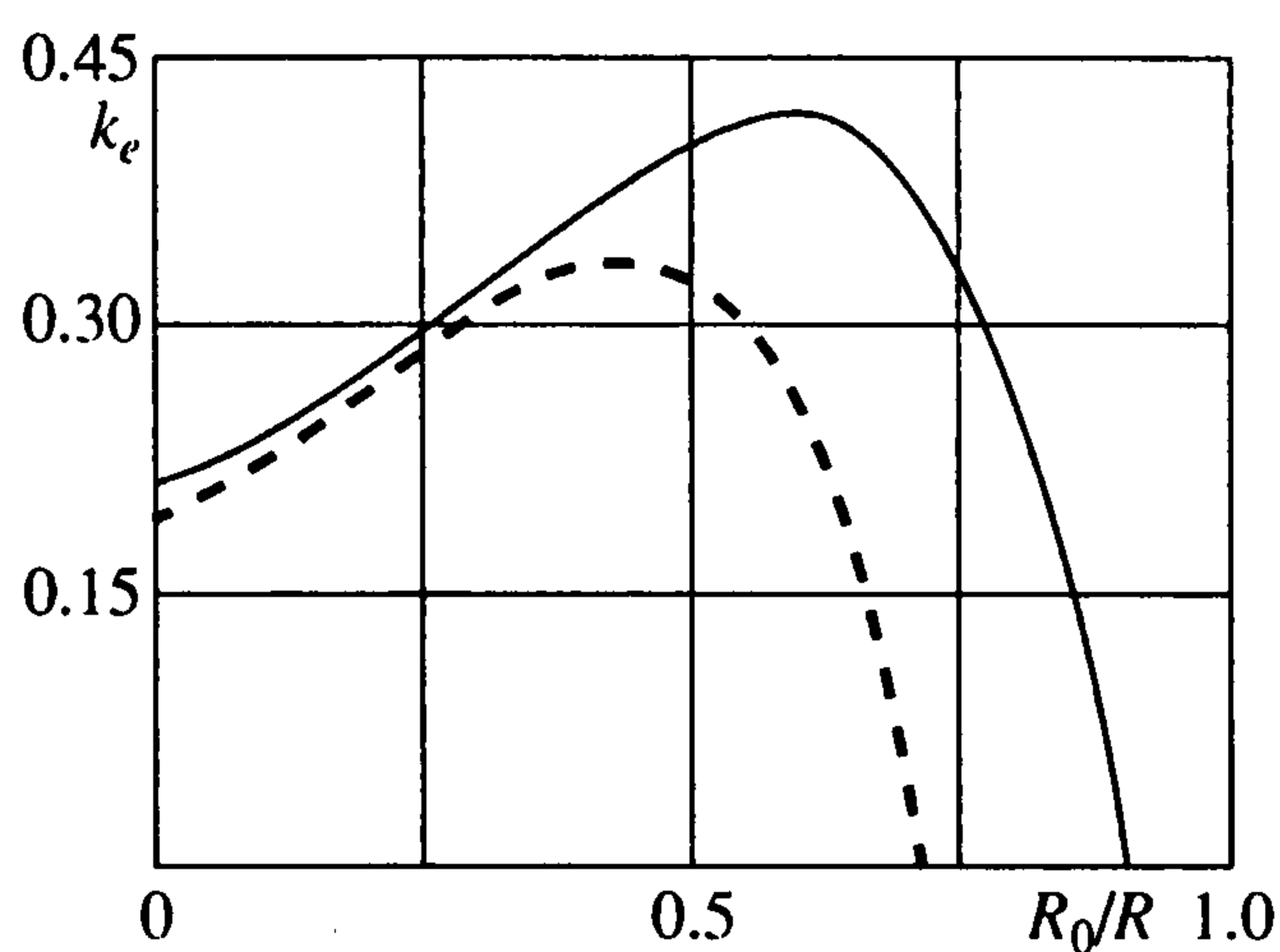
$$R_1 \leq r \leq R : \quad u^n = C_4 J_1(\lambda_2 \xi) + C_5 Y_1(\lambda_2 \xi)$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

для центральной части пластины без электродов на лицевых поверхностях, для кольцевой, покрытой электродами, части пластины, для кольцевой внешней части пластины без электродов соответственно.

Произвольные постоянные $C_1, \dots, C_5$ найдем, удовлетворяя условиям контакта на линиях, разделяющих участки пластины с электродами и без электродов, и граничным условиям на краю пластины. Рассмотрим два вида граничных условий: свободный край и жестко заземленный край. Расчет КЭМС k_e выполним таким же образом, как в задаче 2.

На фиг. 4 представлена зависимость КЭМС k_e от положения и размера электродов при частоте колебаний пластины, близкой ко второй резонансной частоте. Видно, что вблизи второй резонансной частоты КЭМС k_e достигает наибольшего значения, когда электроды располагаются в области $0,6R \leq r \leq 0,9R$ для пластины со свободным краем ($\max k_e = 0,413$) и в области $0,4R \leq r \leq 0,7R$ для пластины с жестко заземленным краем ($\max k_e = 0,348$). Вблизи второго резонанса значения КЭМС k_e для пластины с электродами, полностью покрывающими лицевые поверхности, в случае свободного края равняется 0,228, а в случае жестко заземленного края равняется нулю. Существенное увеличение КЭМС достигнуто в результате надлежащего выбора электродов.

Отметим, что, вероятно, можно было бы получить большее увеличение КЭМС, если на каждой лицевой поверхности пластины поместить по паре кольцевых электродов.

3. Анализ КЭМС круговой цилиндрической пьезокерамической оболочки. Круговая цилиндрическая оболочка радиуса R и длиной $2L$ колеблется под действием электрической нагрузки, приложенной к электродам. Чтобы описать цилиндрическую поверхность $r = R$, $|x| \leq L$, используются цилиндрические координаты r, φ, x . Для решения задачи воспользуемся безмоментной теорией оболочек.

Соотношения электроупругости для усилий имеют такой же вид, как для пластины. Они записываются в виде (2.1), (2.2), где T_1^a, T_ϕ^a и $\varepsilon_1^a, \varepsilon_\phi^a$ – усилия и компоненты деформаций в направлении координатных линий x и ϕ соответственно.

Выпишем уравнения равновесия безмоментной теории и формулы деформации – перемещения

$$\frac{dT_1^a}{dx} + 2h\rho\omega^2 u^a = 0, \quad \frac{T_2^a}{R} + 2h\rho\omega^2 w^a = 0 \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_1^a = \frac{du^a}{dx}, \quad \varepsilon_\phi^a = -\frac{w^a}{r} \quad (3.2)$$

Здесь u^a – тангенциальное перемещение в направлении x -линий, а w^a – прогиб цилиндрической оболочки.

Преобразуя уравнения (3.1) при помощи первых двух формул (2.1) и формул (2.2), (3.2), получим разрешающее уравнение относительно u^a

$$\frac{d^2 u^a}{d\xi^2} + \mu_i^2 u^a = 0, \quad \mu_i = \sqrt{\frac{1 - \lambda_i^2}{1 - \lambda_i^2 - \nu^2}}, \quad \xi = \frac{x}{R}, \quad i = 1, 2 \quad (3.3)$$

Прогиб w^a можно выразить через тангенциальное перемещение u^a таким образом:

$$w^a = \frac{\nu}{1 - \lambda_i^2} \frac{du^a}{d\xi} + d_{31} \frac{1 + \nu}{1 - \lambda_i^2} \frac{R}{h} V \quad (3.4)$$

Безразмерные частоты λ_1 и λ_2 определяются теми же формулами, которые получены для пластины: λ_1 используется для части оболочки, покрытой электродами, а λ_2 – для части оболочки, не имеющей электродов.

Задача 1. Лицевые поверхности оболочки полностью покрыты электродами. Решение уравнения (3.3) записывается в виде

$$u^e = C_1 \sin \mu_1 \xi \quad (3.5)$$

Рассмотрим оболочку со свободными краями

$$x = L, \quad x = -L: \quad T_1^e = 0 \quad (3.6)$$

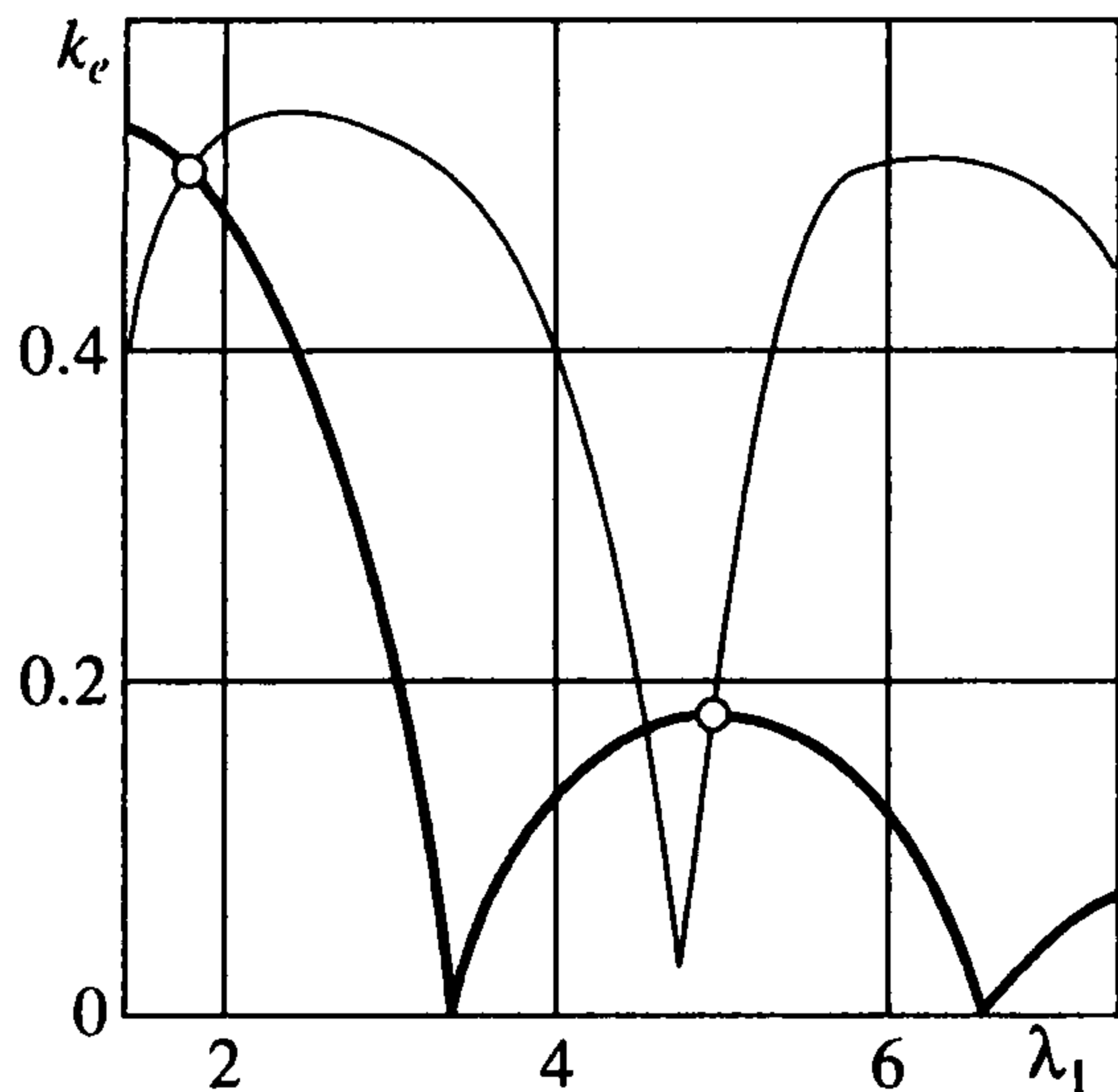
Произвольную постоянную C_1 найдем, удовлетворяя условию (3.6). Имеем

$$C_1 = -\frac{1 - \lambda_1^2 - \nu}{1 - \lambda_1^2 - \nu^2} \frac{R}{\mu_1 \cos \mu_1 \xi_0} V, \quad \xi_0 = \frac{L_0}{L} \quad (3.7)$$

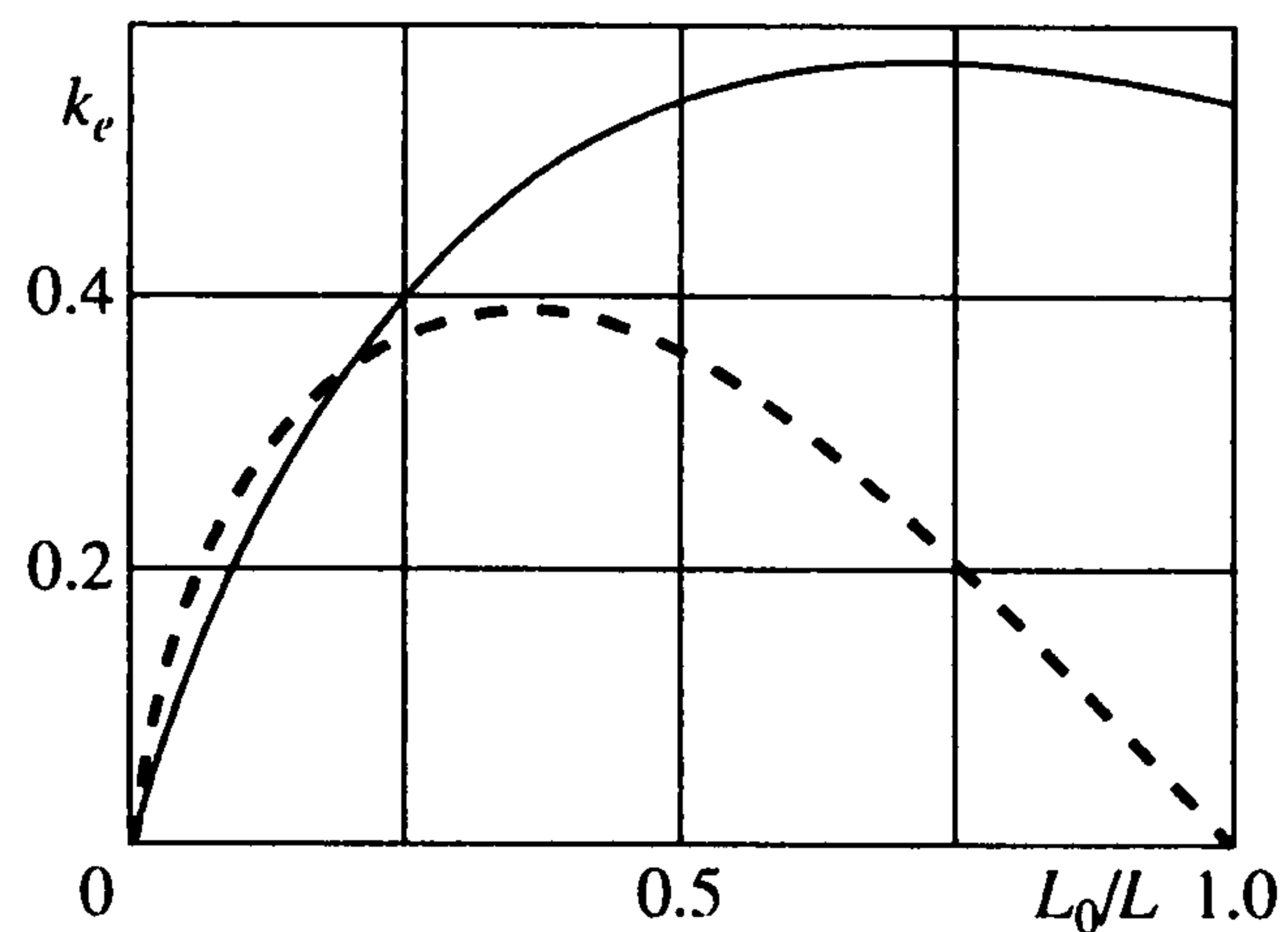
КЭМС k_e, k_d и k_s для цилиндрической оболочки определяются точно так же, как для круглой пластины.

Результат вычисления КЭМС для оболочки длиной $2L = 2R$ представлен на фиг. 5. Тонкая линия изображает k_s , жирная линия соответствует k_e , светлыми точками показаны значения k_d . Вычисления приводят к тем же выводам, что были получены для круглой пластины: значения k_d совпадают с точками пересечения кривых k_e и k_s , но значения k_s с ростом безразмерной частоты не убывают, что не соответствует физическому смыслу явления.

Приведем еще один факт, подтверждающий справедливость энергетической формулы (1.3). Из фиг. 1, 5 видно, что КЭМС k_e равняется нулю при некоторых частотах колебаний. Для тех же частот КЭМС k_s принимает значения, близкие к максимумам кривой k_s . Представим, что рассматриваемый элемент (пластина или оболочка) покрыт тонким пьезоэлектрическим слоем (например, слоем полимера PVDF), который



Фиг. 5



Фиг. 6

используется для измерения деформаций. Полагаем, что лицевые поверхности слоя покрыты электродами, которые электрически изолированы от электродов исходного пьезоэлектрического элемента. Считаем, что слой такой тонкий, что его влияние на электроупругое состояние пьезоэлектрического элемента незначительно и им можно пренебречь. Это означает, что слой повторяет перемещения и деформации пьезоэлектрического элемента. КЭМС k_e равен нулю, когда (см. уравнение (1.3))

$$U^{(d)} = U^{(sh)} \quad (3.8)$$

Из уравнения (2.9) следует, что равенство (3.8) выполняется, только когда

$$E_3^{(d)} = 0 \quad (3.9)$$

Из закона Ома следует, что при этом

$$\int_s (\epsilon_1 + \epsilon_\varphi) ds = 0 \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) справедливо и для слоя, используемого для измерения деформаций, так как его деформации равны соответствующим деформациям рассматриваемого элемента. Измеряемая разность потенциалов, возникшая на электродах этого слоя, пропорциональна интегралу по поверхности электрода от суммы деформаций $(\epsilon_1 + \epsilon_\varphi)$. Эта разность потенциалов равна нулю, когда интеграл от суммы деформаций равен нулю. Отметим, что в то время, когда снимаемая разность потенциалов равна нулю, приложенная разность потенциалов отлична от нуля. Это значит, что пьезоэлектрический элемент для некоторых частот, при которых $k_e = 0$, не преобразует один вид энергии в другой. В этом случае формула (1.1) k_s дает для этих частот неверные, отличные от нуля значения КЭМС.

Задача 2. Электроды покрывают центральную часть поверхности оболочки $|x| \leq L_0 < L$.

Так же как в случае пластины, будем пользоваться различными уравнениями состояния (2.1) и (2.2) для областей оболочки с электродами и без электродов.

Решение для области оболочки $|x| \leq L_0 < L$, покрытой электродами, возьмем в виде (3.5). Для области оболочки без электродов решение содержит две произвольные постоянные C_2 и C_3 :

$$-L \leq x \leq -L_0, \quad L_0 \leq x \leq L: \quad u'' = C_2 \sin \mu_2 \xi + C_3 \cos \mu_2 \xi \quad (3.11)$$

Три произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 найдем, удовлетворяя условиям контакта на границе между частями оболочки с электродами и без электродов

$$|x| = L_0: \quad T_1^e = T_1^n, \quad u^e = u^n \quad (3.12)$$

и условию (2.7) на свободных краях или (2.10) на жестко заземленных краях.

Зависимость КЭМС k_e от длины части оболочки L_0 ($0 \leq L_0 \leq L$, $L = R$), покрытой электродами, на первой резонансной частоте показана на фиг. 6. КЭМС для оболочки со свободными краями достигает максимума при $L_0 \approx 0,7R$, а для оболочки с жестко заземленными краями при $L_0 \approx 0,3R$.

Графики зависимости первой резонансной частоты оболочки от размера электродов аналогичны соответствующим зависимостям для круглой пластины (фиг. 3).

Факт зависимости резонансных частот пьезокерамической цилиндрической оболочки от электрических граничных условий на ее лицевых поверхностях оболочки был замечен ранее [12] в результате анализа, полученного методом дискретной ортогонализации решения трехмерной задачи. Согласно этим данным, резонансные частоты для оболочки с электродами на лицевых поверхностях существенно ниже резонансных частот такой же оболочки без электродов.

4. Выводы. Результаты выполненного анализа подтверждают [1–3] следующие выводы, сделанные ранее при анализе КЭМС других пьезоэлектрических элементов:

1) энергетическая формула (1.3) для определения КЭМС универсальна: она применима к любым электроупругим конструкциям и в статике, и в динамике;

2) формула (1.1), первоначально рекомендованная как общая формула, справедлива только для тел простейшей геометрии, поверхности которых свободны от механических закреплений, а электроупругое состояние не зависит ни от координат, ни от времени;

3) формула (1.2), которой пользуются для определения КЭМС на резонансных частотах, в действительности определяет КЭМС на частоте, равной среднеарифметическому значению резонансной и ближайшей к ней антирезонансной частот.

Новый результат, полученный в данной работе, заключается в том, что на примере тел сложной геометрии показано, каким образом КЭМС зависит от положения и размера электродов на поверхностях, ограничивающих тело. Показано, что за счет надлежащего выбора расположения и размера электродов можно существенно увеличить КЭМС электроупругого тела.

Заметим, что увеличить КЭМС можно, изменяя не только электроды, но и другие параметры, например геометрию тела. Так, КЭМС круглой пластины фиксированного радиуса для заданной нагрузки можно увеличить путем надлежащего выбора переменной толщины пластины. Отметим, что выбор расположения и размера электродов предпочтительнее, так как производство пьезокерамических пластин переменной толщины для каждого определенного типа нагрузки затруднительно, в то время как нанести на поверхность пластины электроды требуемой формы чрезвычайно просто.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01123) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS-96-2113).

ЛИТЕРАТУРА

1. Rogacheva N. The Theory of Piezoelectric Shells and Plates. Boca Raton: CRC Press, 1994. 260 p.
2. Chang S.H., Rogacheva N.N., Chou C.C. Analysis of methods for determining electromechanical coupling coefficients of piezoelectric elements // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr. and Freq. Contr. 1995. V. 42. № 4. P. 630–640.
3. Rogacheva N.N., Chang S.H., Chou C.C. Electromechanical analysis of a symmetric piezoelectric / elastic laminate structure: theory and experiment // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr. and Freq. Contr. 1998. V. 45. № 2. P. 285–294.
4. Берлинкур Д., Керран Д., Жафффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. Мезона. М.: Мир, 1966. Т. 1. Ч. А. С. 204–326.
5. IEEE Standard on Piezoelectricity, ANSI-IEEE Std. 176, 1987. IEEE: New York; 1987.

6. *Brissaud M.* Characterization of piezoceramics // *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr. and Freq. Contr.* 1991. V. 38. № 6. P. 603–617.
7. *Балабаев С.М., Ивина Н.Ф.* Анализ собственных колебаний пьезокерамических цилиндров произвольных размеров // *Прикл. механика.* 1989. Т. 25. № 10. С. 37–41.
8. *Toulis W.J.* Electromechanical coupling and composite transducers // *J. Acoust. Soc. America.* 1963. V. 35. № 1. P. 74–80.
9. *Woollett R.S.* Comments on "Electromechanical coupling and composite transducers" // *J. Acoust. Soc. America.* 1963. V. 35. № 11. P. 1837–1838.
10. *Улитко А.Ф.* К теории электромеханического преобразования энергии в неравномерно деформируемых пьезокерамических телах // *Прикл. механика.* 1977. Т. 13. № 10. С. 115–123.
11. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость // (Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5). Киев: Наук. думка, 1989. 276 с.
12. *Болкисев А.М.* Особенности напряженного состояния цилиндрического пьезокерамического преобразователя в резонансном режиме работы // *Прикл. механика.* 1988. Т. 24. № 2. С. 38–43.

Москва
e-mail: nrogache@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
6.VI.2000