

УДК 539.3

© 2001 г. А.Г. Соколов, В.В. Стружанов

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В УПРУГОМ ТЕЛЕ

Получено операторное уравнение, решением которого является тензор собственных (остаточных) напряжений, снижающий до нуля уровень напряжений от внешней нагрузки в заданной области упругого тела. Показано, что оператор этого уравнения обладает свойством сжатия. Решение ищется методом последовательных приближений. Приведены аналитический и численные примеры.

Одним из способов влияния на работоспособность элементов конструкций является создание в них при изготовлении полей собственных (остаточных) напряжений [1–3]. В зависимости от условий эксплуатации могут формулироваться различные требования, предъявляемые к характеристикам этих полей. В частности, возможна следующая задача оптимизации напряженного состояния: для заданной внешней нагрузки найти такие остаточные напряжения, которые, складываясь с напряжениями от нагрузки, позволяют в отдельных областях тела получить напряженное состояние, сколь угодно близкое к нулю.

1. Постановка задачи. После завершения многих технологических операций изготовления элементов конструкций в них появляются так называемые первоначальные деформации, не удовлетворяющие условиям совместности [4]. Другими словами, свободные от связей материальные объемы приобретают такую остаточную деформацию, которая не позволяет составить из них сплошное тело. Поэтому реакция материала, стремящегося сохранить сплошность, выражается в появлении в теле самоуравновешенных усилий, порождающих деформации, величина которых такова, что их сумма с первоначальными деформациями уже удовлетворяет условиям совместности, а тело сохраняет сплошность. Таким образом,

$$\varepsilon' = \varepsilon^* + \varepsilon'' \quad (1.1)$$

где ε^* , ε'' – симметричные тензоры второго ранга соответственно первоначальных деформаций и деформаций, порожденных самоуравновешенными усилиями, а $Jnk \varepsilon' = 0$ (Jnk – оператор несовместности [5]). Отметим, что упомянутые усилия определяются симметричным тензором напряжений второго ранга σ'' , компоненты которого и являются собственными или остаточными напряжениями. Очевидно, что они связаны с компонентами тензора ε'' законом Гука, а именно $\sigma'' = C \cdot \varepsilon''$ ($\varepsilon'' = S \cdot \sigma''$). Здесь C , S – симметричные, в общем случае анизотропные, тензоры четвертого ранга соответственно модулей упругости и податливости, двумя точками обозначено двойное скалярное произведение тензоров [5].

Для определения поля собственных напряжений в упругом теле при заданном поле первоначальных деформаций необходимо решить краевую задачу

$$\nabla \cdot \sigma'' = 0, \quad \varepsilon' = \text{def } u, \quad \sigma'' = C \cdot (\varepsilon' - \varepsilon^*), \quad \sigma'' \cdot n|_{\Gamma} = 0 \quad (1.2)$$

Первая группа уравнений – это уравнения равновесия, вторая – соотношения Коши, третья – определяющие соотношения, которые получены посредством разрешения равенства (1.1) относительно напряжений, последнее равенство – граничные условия при отсутствии внешних сил; n – вектор внешней нормали к достаточно гладкой границе Γ тела V .

Под действием внешней нагрузки в теле возникает напряженно-деформированное состояние, которое находится из решения краевой задачи

$$\nabla \cdot p' = 0, \quad e' = \text{def } u, \quad p' = C \cdot e', \quad p' \cdot n|_{\Gamma} = t \quad (1.3)$$

где p', e' – соответственно тензоры напряжений и деформаций, t – вектор внешних сил.

Если при этом в теле имеются и первоначальные деформации, то согласно принципу суперпозиции напряженное состояние в нем определяется суммой тензоров $p'(x) + \sigma''(x)$, $x \in V$.

Будем считать, что тензор $\sigma''(x)$ оптимизирует напряженное состояние в упругом теле, если в некоторой наперед заданной области $V_1 \subset V$ имеет место равенство

$$\chi(x)\sigma''(x) + \chi(x)p'(x) = 0, \quad \chi(x) = \{1, x \in V_1; 0, x \notin V_1\} \quad (1.4)$$

Отсюда следует, что задача формулируется следующим образом: требуется найти такое поле первоначальных деформаций (тензор $\varepsilon^*(x)$), при реализации которого возникают такие остаточные напряжения (тензор $\sigma''(x)$), что в области V_1 выполняется равенство (1.4).

2. Свойства основных уравнений. Для решения данной задачи выясним сначала некоторые свойства систем уравнений (1.2) и (1.3). Рассмотрим энергетическое гильбертово пространство T , состоящее из всевозможных тензоров напряжений, определенных в V [6]. Скалярное произведение и норма в нем заданы формулами

$$(p_1, p_2) = \int_V p_1 \cdot S \cdot p_2 dV, \quad \|p\|^2 = (p, p), \quad p, p_1, p_2 \in T$$

Пространство T является ортогональной суммой подпространств [6]

$$T_1 = \{p' : p' = C \cdot e', \text{Jnk } e' = 0\}, \quad T_2 = \{\sigma'' : \nabla \cdot \sigma'' = 0, \sigma'' \cdot n|_{\Gamma} = 0\}$$

Отметим, что решения краевой задачи (1.3) при различных t являются элементами подпространства T_1 , а решения задачи (1.2) для различных ε^* – элементами подпространства T_2 .

Представим краевую задачу (1.2) в виде операторного уравнения $\sigma'' = A\sigma^*$, где $\sigma^* = C \cdot \varepsilon^*$ тензор псевдонапряжений. Линейный оператор A является разностью операторов $A = B - \Lambda$, где Λ – тождественный оператор, а B определяется системой уравнений

$$\nabla \cdot \sigma' = \nabla \cdot \sigma^*, \quad \varepsilon' = \text{def } u, \quad \sigma' = C \cdot \varepsilon', \quad \sigma' \cdot n|_{\Gamma} = \sigma^* \cdot n|_{\Gamma} \quad (2.1)$$

т.е. $B\sigma^* = \sigma'$.

Теорема 1. Решение системы (2.1) единственно и является ортогональной проекцией элемента $\sigma^* \in T$ на подпространство T_1 .

Доказательство. Очевидно, что решением системы (2.1) служит некоторый тензор $\sigma' \in T_1$. Найдем коэффициенты разложения этого тензора в ряд Фурье по ортогональному базису $\{q_k\}$ подпространства T_1 . Используя формулу Остроградского–Гаусса, получаем

$$\begin{aligned} (\sigma', q_k) &= \int_V \sigma' \cdot S \cdot q_k dV = \int_V \sigma' \cdot \text{def } v_k dV = - \int_V \nabla \cdot \sigma' \cdot v_k dV + \int_{\Gamma} n \cdot \sigma' \cdot v_k d\Gamma = \\ &= - \int_V \nabla \cdot \sigma^* \cdot v_k dV + \int_{\Gamma} n \cdot \sigma^* \cdot v_k d\Gamma = \int_V \sigma^* \cdot \text{def } v_k dV = (\sigma^*, q_k) \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sigma' = \sum_{k=1}^{\infty} (\sigma', q_k) q_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\sigma^*, q_k) q_k = P_1 \sigma^*$$

где P_1 – оператор ортогонального проектирования на подпространство T_1 . Таким образом, $B = P_1$.

Далее, пусть существуют два решения $\sigma'_1 \in T_1$ и $\sigma'_2 \in T_1$. Тогда $\sigma = \sigma'_1 - \sigma'_2 \in T_1$, с другой стороны, $\sigma \in T_2$, так как $\nabla \cdot \sigma = 0$, $\sigma \cdot n|_\Gamma = 0$. Следовательно, $\sigma \in T_1 \cap T_2$. Но $T_1 \cap T_2 = 0$, отсюда $\sigma = 0$ и $\sigma'_1 = \sigma'_2$.

Теорема 2. Решение системы (1.2) есть взятая со знаком минус ортогональная проекция элемента $\sigma^* \in T$ на подпространство T_2 .

Доказательство. Имеем $A = B - \Lambda = P_1 - (P_1 + P_2) = -P_2$. Тогда $\sigma = -P_2\sigma^*$. Здесь P_2 – ортопроектор на подпространство T_2 .

Следствие 1. Так как $P_2 = \Lambda - P_1$, то

$$\sigma'' = -P_2\sigma^* = P_1\sigma^* - \sigma^* = \sum_{k=1}^{\infty} (\sigma^*, q_k) q_k - \sigma^*$$

Следствие 2. Для того чтобы тело было свободно от собственных напряжений, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma^* \in T_1$, т.е. $\text{Jnk } \varepsilon^* = 0$.

3. Метод решения. Теперь уравнение (1.4) можно записать в виде $\chi P_2\sigma^* = \chi p'$ или при учете того, что $P_2 = \Lambda - P_1$,

$$\chi\sigma^* = \chi P_1\sigma^* - \chi p'$$

Будем искать решение данного уравнения на множестве χT_1 . Если $\sigma^* \in \chi T_1$, то $\chi\sigma^*(\chi\chi = \chi)$. Тогда окончательно

$$\sigma^* = \chi P_1\sigma^* + \chi p' \quad (3.1)$$

Оценим норму оператора χP_1 . Имеем $\|\chi P_1\| \leq \|\chi\| \|P_1\|$. Известно [7], что $\|P_1\| = 1$. Далее

$$\|\chi p\|^2 = \int_V \chi p \cdot S \cdot \chi p dV = \int_{V_1} p \cdot S \cdot p dV < \int_V p \cdot S \cdot p dV = \|p\|^2$$

Здесь $p \cdot S \cdot p$ – положительно определенная квадратичная форма, p – некоторый элемент из множества $M \subset T$, которое составляют тензоры, определенные в области V' , где V' – любая область, входящая или совпадающая с V , причем $V_1 \subset V'$. Тогда, рассматривая χ как оператор, действующий из $M \subset T$ в χT , получаем $\|\chi\| < 1$. Если же χ действуют из χT в χT , то $\|\chi\| = 1$. Оператор P_1 отображает любые элементы из T в M , кроме элементов $\chi p' \in T_1$. Отсюда следует, что оператор χP_1 , определенный на множестве $\chi T_1 \setminus \chi T_1 \cap T_1$, имеет $\|\chi P_1\| < 1$. Поэтому он является оператором сжатия, и решение уравнения (3.1) представимо сходящимся рядом

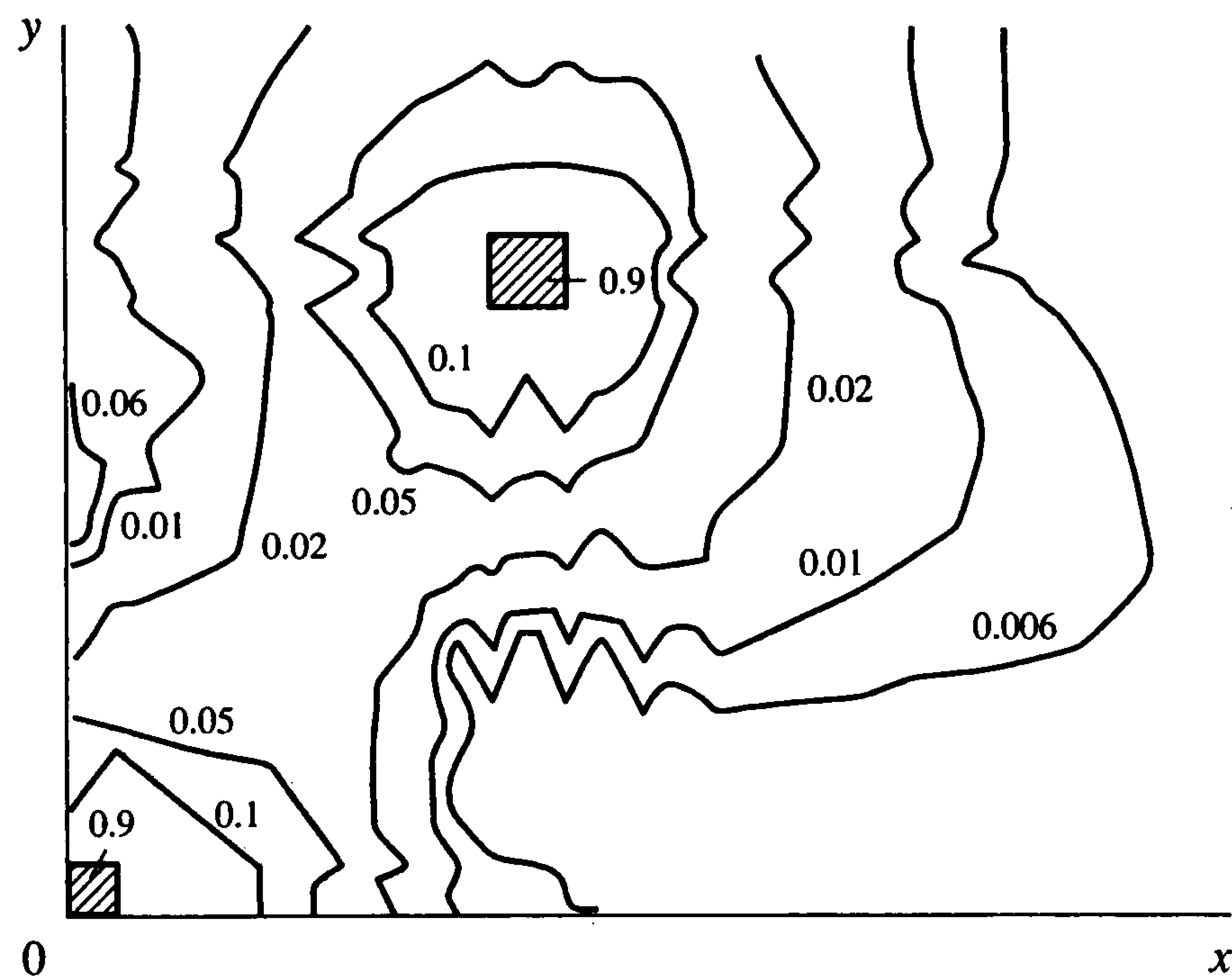
$$\sigma^* = \sum_{n=0}^{\infty} (\chi P_1)^n \chi p', \quad \sigma^* \in \chi T_1 \quad (3.2)$$

Далее искомое поле первоначальных деформаций определяется тензором $\varepsilon^* = S \cdot \sigma^*$.

Замечания. 1°. Условие $\chi p' \in T_1$ выполняется в том случае, когда область V_1 пересекает тело V , т.е. область $V \setminus V_1$ не является односвязной.

2°. Так как $P_2(\sigma^* + \sigma') = P_2\sigma^*$, где σ' – произвольный элемент из T_1 , то любой тензор $\varepsilon = \varepsilon^* + \varepsilon'$, где $\varepsilon' = S \cdot \sigma'$, также иницирует поле остаточных напряжений, обладающее свойством (1.4). Следовательно, имеется возможность корректировать поле первоначальных деформаций таким образом, чтобы его параметры было технологически проще реализовать.

3°. Если в теле требуется создать заданное поле остаточных напряжений $\sigma''(x)$, то поле первоначальных деформаций определяется тензором $\varepsilon^* = \varepsilon'' + \varepsilon'$, где $\varepsilon'' = S \cdot \sigma''$, ε' – произвольный тензор совместных деформаций.



Фиг. 1

4. Примеры. *Пример 1.* Пусть тонкий круглый диск растягивается равномерно распределенной по ободу нагрузкой q . Требуется найти первоначальные деформации, вызывающие появление таких остаточных напряжений, которые в сумме с напряжениями от внешней нагрузки дают нулевое напряженное состояние в центральной зоне радиусом R_1 .

Решения краевых задач (1.3) и (1.2) определяют соответственно формулы

$$p'_r = p'_\theta = q, \quad e'_r = e'_\theta = q \frac{1-\nu}{E} \quad (4.1)$$

$$\sigma''_r = \sigma''_\theta = -\frac{1}{2} \varepsilon^* E \frac{R^2 - R_1^2}{R^2}, \quad \varepsilon'_r = \varepsilon'_\theta = \frac{1}{2} \varepsilon^* \left[1 + \nu + (1-\nu) \frac{R_1^2}{R^2} \right], \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (4.2)$$

$$\sigma''_{\theta,r} = \frac{1}{2} \varepsilon^* E R_1^2 \left(\frac{1}{R^2} \pm \frac{1}{r^2} \right), \quad \varepsilon'_{\theta,r} = \frac{1}{2} \varepsilon^* R_1^2 \left[\frac{1-\nu}{R^2} \pm \frac{1+\nu}{r^2} \right], \quad R_1 \leq r \leq R$$

Индексами r, θ обозначены соответственно радиальные и тангенциальные напряжения и деформации, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $\varepsilon^* = \varepsilon_r^* = \varepsilon_\theta^*$ – первоначальные деформации в центральной зоне. Применяя методику, изложенную выше, при учете формул (4.1), (4.2) и равенства $P_1 = B$ получаем

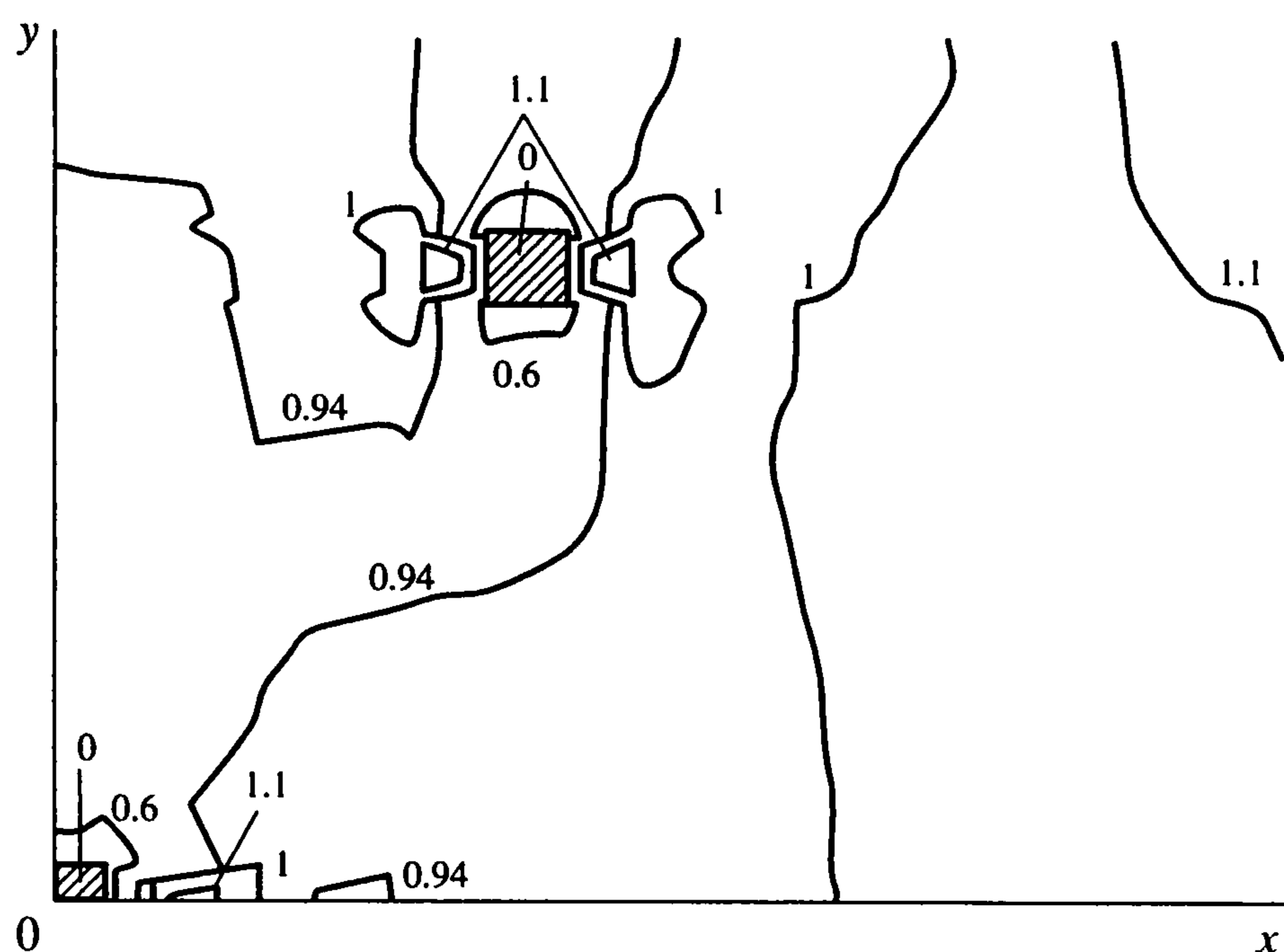
$$\chi \sigma^* = \chi \sigma_r^* = \chi \sigma_\theta^* = \chi q \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (1+\nu) + \frac{1}{2} (1-\nu) \frac{R_1^2}{R^2} \right]^n = 2 \chi q \left[(1-\nu) \left(1 - \frac{R_1^2}{R^2} \right) \right]^{-1}$$

Отсюда следует, что $\varepsilon^* = 2q(1 - R_1^2/R^2)^{-1} E^{-1}$. Тогда

$$\sigma''_r = \sigma''_\theta = -q, \quad 0 \leq r \leq R_1; \quad \sigma''_{\theta,r} = \frac{q R_1^2}{R^2 - R_1^2} \left(1 \pm \frac{R^2}{r^2} \right), \quad R_1 \leq r \leq R$$

и суммарные напряжения в центральной зоне равны нулю, а в кольце, окружающем эту область, получаем известное решение задачи Ламе [8].

Пример 2. Рассмотрим тонкую прямоугольную пластину шириной 160 мм, высотой 200 мм, растягиваемую вдоль оси y равномерно распределенной нагрузкой с единичной интенсивностью. На фиг. 1 изображена четверть пластинки. Требуется в пяти областях с размерами 5 мм $\times$ 5 мм, обозначенных цифрой 6 и расположенных в центре и симметрично относительно осей (фиг. 1), найти первоначальные деформации, инициирующие появление таких остаточных напряжений, которые в указанных областях в сумме с напряжениями от растяжения дают нулевое значение. Центр области 6, расположенной на фиг. 1 ближе к краям пластины, имеет координаты $x = 32$ мм, $y = 107$ мм.



Фиг. 2

Решения краевых задач (1.2) и (1.3) в данном примере находили методом конечных элементов. Производя вычисления по изложенной выше методике, получаем в центральной области $\epsilon_x^* = -1.241 \cdot 10^{-5}$, $\epsilon_y^* = 7.718 \cdot 10^{-5}$, $\epsilon_{xy}^* = -1.048 \cdot 10^{-6}$, а в остальных четырехугольниках $\epsilon_x^* = -1.365 \cdot 10^{-5}$, $\epsilon_y^* = 8.121 \cdot 10^{-5}$, $\epsilon_{xy}^* = -4.1 \cdot 10^{-6}$. Изолинии интенсивности собственных напряжений σ_i [8] показаны на фиг. 1, где числа у кривых отвечают изолиниям с соответствующим значением σ_i в кг/мм².

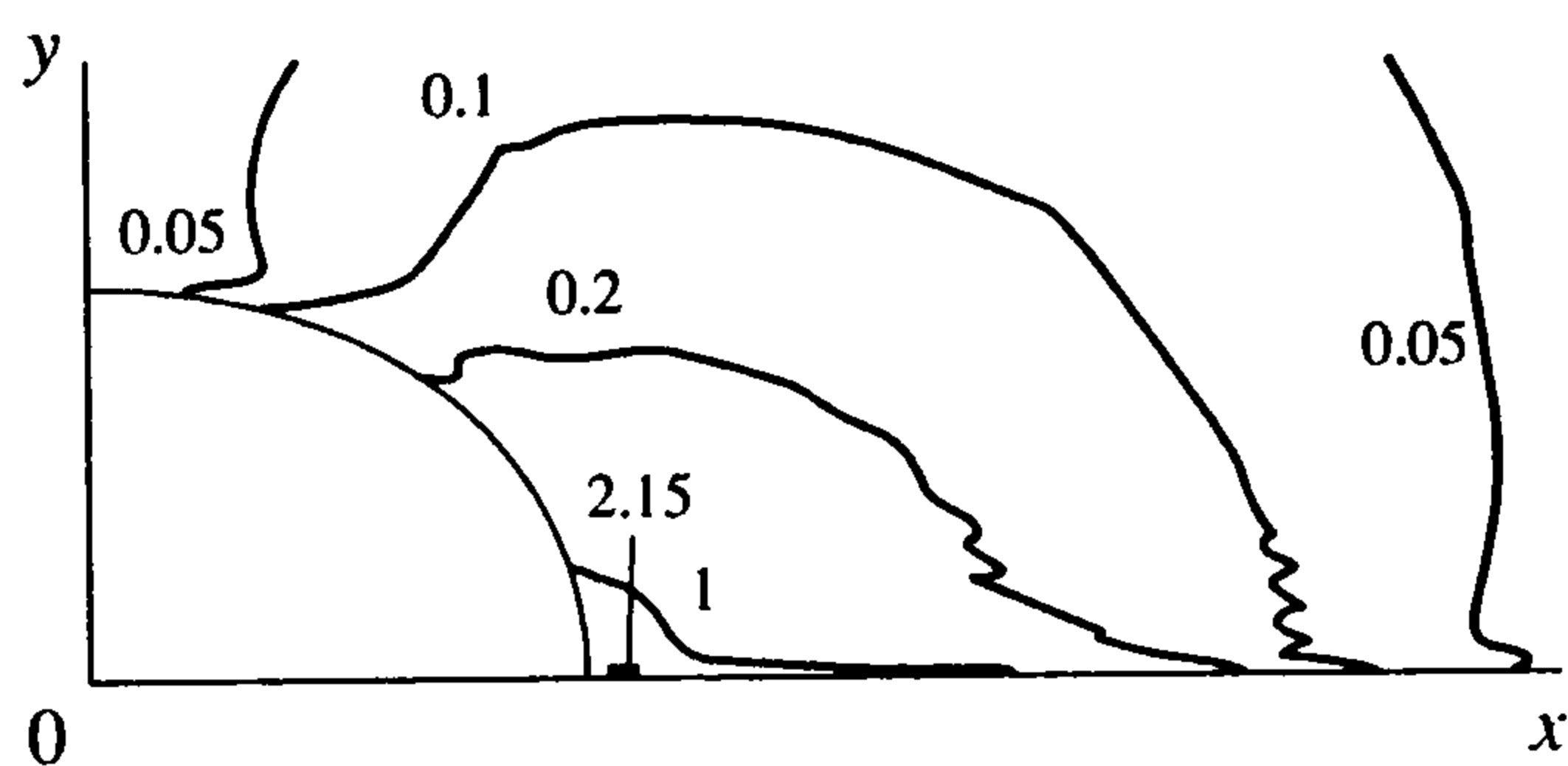
На фиг. 2 показаны изолинии интенсивности суммарных напряжений, где числа у кривых отвечают значениям σ_i в кг/мм².

Пример 3. Рассмотрим ту же пластину при том же нагружении, только с центральным круговым отверстием радиуса 3.5 мм. Фрагмент ее в области концентратора изображен на фиг. 3,4. Требуется в двух зонах, расположенных симметрично в местах концентраций напряжений (фиг. 4, область А шириной 9 мм, высотой 0.5 мм), рассчитать первоначальные деформации, инициирующие собственные напряжения, которые в сумме с напряжениями от внешней нагрузки дают нулевые значения в указанных зонах. Расчеты производим опять с использованием метода конечных элементов, причем область А разбивали на три равных четырехугольных элемента. В результате получаем в элементе, примыкающем к круговой границе, $\epsilon_x^* = -3.7194 \cdot 10^{-5}$, $\epsilon_y^* = 1.3215 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon_{xy}^* = 1.3598 \cdot 10^{-5}$, в среднем элементе $\epsilon_x^* = -1.9404 \cdot 10^{-5}$, $\epsilon_y^* = 1.0623 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon_{xy}^* = 2.4654 \cdot 10^{-5}$ и в последнем элементе $\epsilon_x^* = 4.2409 \cdot 10^{-6}$, $\epsilon_y^* = 5.6635 \cdot 10^{-6}$, $\epsilon_{xy}^* = 3.2819 \cdot 10^{-6}$.

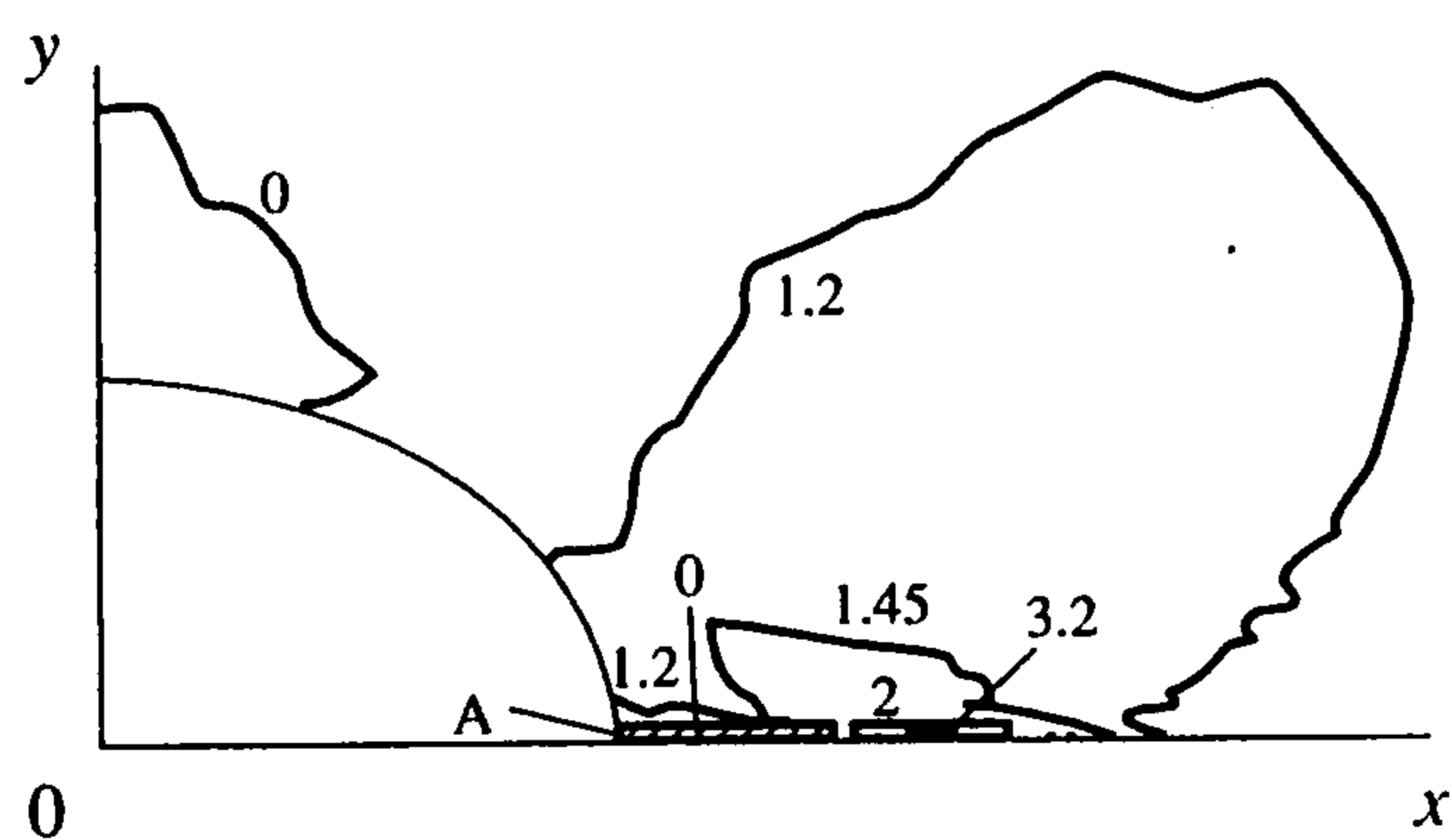
На фиг. 3 приведены изолинии интенсивности собственных напряжений, а на фиг. 4 – изолинии интенсивности суммарных напряжений. Числа у кривых отвечают значениям интенсивности напряжений в кг/мм².

На фиг. 5 показано изменение интенсивности суммарных напряжений вдоль оси x. Кривая 1 – исходное решение, кривые 2,3 – суммарные напряжения в случаях, когда для определения первоначальных деформаций использовали соответственно два и сорок членов ряда (3.2). Исходя из вида кривой 2, можно сделать вывод о том, что существует возможность для вычисления такого поля остаточных напряжений, которое способствует выравниванию напряжений и существенно уменьшает их концентрацию.

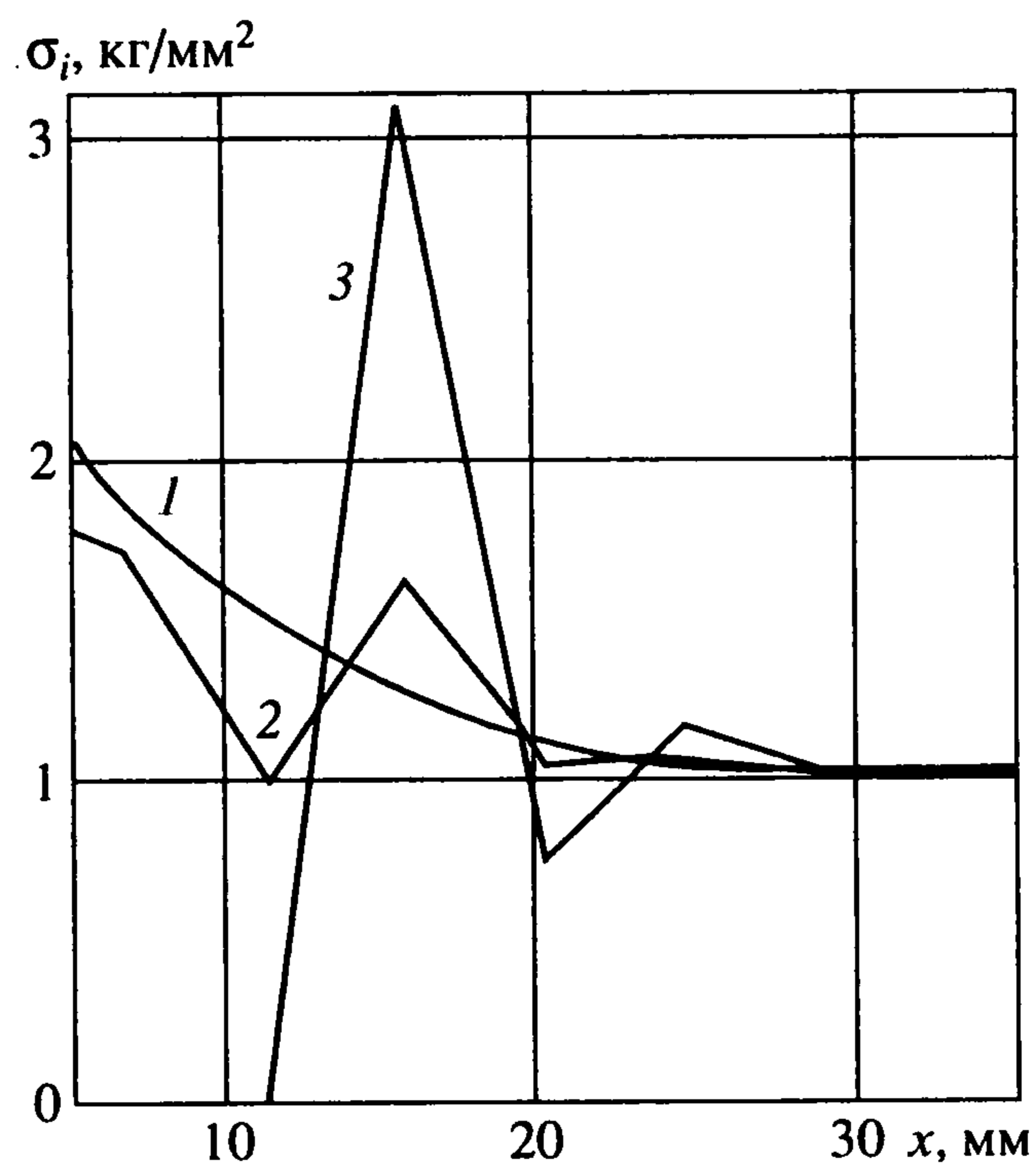
Замечание 4. Используя точное решение, можно определить компоненты тензора первоначальных деформаций, которые оказывают основное влияние на характеристики поля остаточных напряжений. Например, в задачах 2, 3 это компонента ϵ_y^* . Реализация положительных остаточных деформаций ϵ_y^* в зонах оптимизации, очевидно, приведет к появлению в них сжимающих остаточных напряжений, противоположных по знаку напряжениям от внешней нагрузки. В результате уровень напряжений там значительно снизится, хотя и не до нулевого значения.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

В практике хорошо известны методы создания таких деформаций. Один из них – метод поверхностного пластического деформирования, когда в заданном месте производится пластический наклеп. Например, для пластин с круглым отверстием применяется обкатка цилиндрическим инструментом поверхности отверстия с целью наведения пластической деформации, в результате которой появляются поверхностные сжимающие напряжения.

Замечание 5. Изолинии, приведенные на фиг. 1–4, служат для иллюстрации качественного характера распределения напряжений вне зон оптимизации. Их построение осуществлялось с использованием достаточно грубой кусочно-линейной аппроксимации. Сглаживающие алгоритмы не применялись. Поэтому в местах достаточно резкого изменения напряжений на изолиниях появляются изломы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусев П.В. Остаточные напряжения: Теория и приложения. М.: Наука, 1982. 112 с.
2. Биргер И.А. Остаточные напряжения. М.: Машгиз, 1963. 223 с.
3. Кудрявцев И.В. Внутренние напряжения как резерв прочности в машиностроении. М.: Машгиз, 1951. 278 с.
4. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of Elasticity. N. Y., etc.: McGraw-Hill, 1970. = Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
5. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
6. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
8. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высш.шк., 1968. 512 с.