

УДК 539.3:534.1

© 2001 г. И.В. Авдошка, Г.И. Михасев

**ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ
В ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ,
ПОДВЕРЖЕННОЙ НЕРАВНОМЕРНОЙ ОСЕВОЙ НАГРУЗКЕ**

Рассматривается задача о распространении локализованных семейств изгибно-плоскостных волн в тонкой цилиндрической оболочке, подверженной действию нестационарного, неравномерного по окружной координате осевого сжатия. Оболочка может быть некруговой, незамкнутой в окружном направлении. На краях, которые необязательно являются плоскими кривыми, заданы условия шарнирного опирания. Предполагается, что начальные возмущения оболочки (ненулевые начальные перемещения и скорости) – функции, локализованные в окрестности некоторой образующей. Решение строится с помощью комплексного ВКБ-метода, развитого в [1], в виде суперпозиции бегущих в окружном направлении оболочки пакетов изгибно-плоскостных волн. Отличием данной работы от [1] наряду с учетом влияния осевых усилий является предположение о большой изменяемости решения в направлении оси оболочки. Показана возможность использования полученных результатов для исследования свободных колебаний оболочки. В качестве примера рассмотрены нестационарные локализованные колебания цилиндрической оболочки, имеющей в сечении эллипс, под действием растущих по линейному закону от времени осевых сил.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку толщиной h . На срединной поверхности оболочки введем ортогональную систему координат x, φ , где x – осевая координата, φ – координата на направляющей, введенная таким образом, чтобы первая квадратичная форма имела вид $d\sigma^2 = R^2(dx^2 + d\varphi^2)$, где R – характерный размер срединной поверхности оболочки. Тогда $R_2 = R/k(\varphi)$ – радиус кривизны. Оболочка может быть незамкнутой в окружном направлении, иметь необязательно плоские края. Пусть срединная поверхность занимает область $x_1(\varphi) \leq x \leq x_2(\varphi)$ при $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$.

Предположим, что оболочка нагружена медленно меняющимся во времени и по окружной координате осевыми усилиями $T_1^\circ(\varphi, t)$, причем усилие сжатия не достигает своего критического значения, при котором оболочка теряет устойчивость [2, 3].

В предположении о большой изменяемости напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочки в направлении координат x, φ используем систему уравнений теории пологих оболочек, учитывающую наличие динамических напряжений, обусловленных осевыми силами [4],

$$\begin{aligned} \mu^2 \Delta^2 W + T_1(\varphi, t) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - k(\varphi) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= 0 \\ \mu^2 \Delta^2 F + k(\varphi) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \quad W = \mu^2 \frac{W_*}{R}, \quad F = \frac{\mu^{-2}F_*}{hE}$$

$$T_1^\circ = -Eh\mu^2 T_1, \quad t = t_* / t_c, \quad t_c^2 = \frac{R^2 \rho}{Eh\mu^2}$$

Здесь W_* , F_* – нормальный прогиб и функция напряжений, t_* – время, $0 < \mu$ – малый параметр, h – толщина оболочки, E , ν , ρ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки соответственно, T_1° – начальное продольное усилие, t_c – характерное время.

Предположим, что функции $x_1(\varphi)$, $x_2(\varphi)$, $T_1(\varphi, t)$, $k(\varphi)$ являются достаточное число раз дифференцируемыми по φ и t и вместе со своими производными имеют порядок единица при $\mu \rightarrow 0$.

На краях оболочки $x = x_1(\varphi)$, $x = x_2(\varphi)$ рассмотрим условия Навье [2], соответствующие шарнирному опиранию

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad (1.2)$$

Рассмотрим начальные условия

$$W|_{t=0} = W_0^*(x, \varphi, \mu)\Phi_0, \quad \dot{W}|_{t=0} = i\mu^{-1}V_0^*(x, \varphi, \mu)\Phi_0 \quad (1.3)$$

$$\Phi_0 = \Phi_0(\varphi, \mu) = \exp\left\{i\mu^{-1}\left(a_0\varphi + \frac{1}{2}b_0\varphi^2\right)\right\}, \quad \text{Im } b_0 > 0$$

где a_0 – вещественное число, а W_0^* , V_0^* – комплекснозначные функции, такие, что

$$\frac{\partial^m W_0^*}{\partial x^m}, \quad \frac{\partial^m V_0^*}{\partial x^m} \sim \mu^{-m} \quad \text{при } \mu \rightarrow 0, \quad m = 0, 1, \dots \quad (1.4)$$

имеющие в направлении φ конечное число осцилляций с изменяемостью $\mu^{-1/2}$ и удовлетворяющие граничным условиям (1.2). Вещественные и мнимые части функций в условиях (1.3) задают пару начальных волновых пакетов (ВП) с изменяемостью порядка μ^{-1} в направлении координат x , φ , которые сосредоточены в окрестности образующей $\varphi = 0$. Природа возникновения ВП типа (1.3) изучена ранее [5, 6] при исследовании параметрической неустойчивости цилиндрической оболочки с переменными параметрами под действием периодической осевой силы.

Цель работы – исследование реакции цилиндрической оболочки на начальные возмущения типа (1.3) в случае воздействия медленно изменяющихся во времени и по окружной координате осевых сил T_1 .

2. Метод решения. Учитывая большую изменяемость НДС в направлении продольной координаты x , выполним растяжение масштаба, положив

$$s = \mu^{-1}x \quad (2.1)$$

Для решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) воспользуемся методом, развитым [1] для случая малого числа волн в направлении оси оболочки.

Рассмотрим последовательность функций

$$z_n(s, \varphi) = \sin\{\lambda_n(\varphi)[s - s_1(\varphi)]\}, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{s_2(\varphi) - s_1(\varphi)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Здесь и ниже $s_i(\varphi) = \mu^{-1}x_i(\varphi)$, $i = 1, 2$.

Функции $\tilde{W}_0^*$, $\tilde{V}_0^*$, где $\tilde{W}_0^*(s, \varphi, \mu) = W_0^*(x, \varphi, \mu)$, $\tilde{V}_0^*(s, \varphi, \mu) = V_0^*(x, \varphi, \mu)$, для любого $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ можно разложить по системе функций $\{z_n\}$ в равномерно сходящиеся на отрезке $[s_1(\varphi), s_2(\varphi)]$ ряды [7]

$$\begin{aligned}\tilde{W}_0^* &= \sum_{n=1}^{\infty} W_{n0} z_n, & W_{n0} &= \int_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} \tilde{W}_0^* z_n ds \\ \tilde{V}_0^* &= \sum_{n=1}^{\infty} V_{n0} z_n, & V_{n0} &= \int_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} \tilde{V}_0^* z_n ds\end{aligned}\quad (2.3)$$

Пусть W_{n0} , V_{n0} – полиномы аргумента $\mu^{-1/2}\varphi$ с коэффициентами, регулярно зависящими от $\mu^{1/2}$. Тогда W_{n0} , V_{n0} представимы в виде рядов

$$W_{n0} = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^{m/2} w_{nm}^{\circ}(\zeta), \quad V_{n0} = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^{m/2} v_{nm}^{\circ}(\zeta); \quad \zeta = \mu^{-1/2}\varphi \quad (2.4)$$

где w_{nm}° , v_{nm}° – полиномы степеней M_{nm} с комплексными (в общем случае) коэффициентами.

Следуя описанному ранее подходу [1], решение будем искать в виде суперпозиции бегущих в окружном направлении ВП:

$$W = \sum_{n=1}^N W_n, \quad F = \sum_{n=1}^N F_n \quad (2.5)$$

где W_n , F_n – искомые функции, локализованные на некотором отрезке времени $t \in [0, T]$ в окрестности образующей $\varphi = q_n(t)$. Здесь $q_n(t)$ – центр n -го ВП, соответствующий паре функций W_n , F_n . Искомая функция $q_n(t)$ предполагается дважды дифференцируемой, такой, что $q_n(0) = 0$.

Каждый из n -х ВП подчиним начальным условиям

$$W_n|_{t=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^{m/2} w_{nm}^{\circ}(\zeta) z_n \Phi_0, \quad \dot{W}_n|_{t=0} = i\mu^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \mu^{m/2} v_{nm}^{\circ}(\zeta) z_n \Phi_0 \quad (2.6)$$

Перейдем к подвижной системе координат, связанной с центром n -го ВП:

$$\varphi = q_n(t) + \mu^{1/2} \xi_n \quad (2.7)$$

С учетом сделанных замен (2.1) и (2.7) систему уравнений (1.1) для n -го ВП запишем в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 W_n}{\partial s^4} + 2\mu \frac{\partial^4 W_n}{\partial s^2 \partial \xi_n^2} + \mu^2 \frac{\partial^4 W_n}{\partial \xi_n^4} + T_1 \frac{\partial^2 W_n}{\partial s^2} - k \frac{\partial^2 F_n}{\partial s^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 W_n}{\partial t^2} - \\ - 2\mu^{3/2} \dot{q}_n \frac{\partial^2 W_n}{\partial t \partial \xi_n} + \mu \dot{q}_n^2 \frac{\partial^2 W_n}{\partial \xi_n^2} - \mu^{3/2} \ddot{q}_n \frac{\partial W_n}{\partial \xi_n} = 0 \\ \frac{\partial^4 F_n}{\partial s^4} + 2\mu \frac{\partial^4 F_n}{\partial s^2 \partial \xi_n^2} + \mu^2 \frac{\partial^4 F_n}{\partial \xi_n^4} + k \frac{\partial^2 W_n}{\partial s^2} = 0\end{aligned}\quad (2.8)$$

Здесь и ниже точка сверху означает дифференцирование по времени.

Граничные условия на границах $s = s_1(\varphi)$, $s = s_2(\varphi)$ сохраняют вид (1.2).

Решение задачи (1.2), (2.6), (2.8) будем искать в виде разложения [1]

$$W_n = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^{m/2} w_{nm}(s, \xi_n, t) \Phi_n, \quad F_n = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^{m/2} f_{nm}(s, \xi_n, t) \Phi_n \quad (2.9)$$

$$\Phi_n = \exp \left\{ i \left[\mu^{-1} \int_0^t \omega_n(\tau) d\tau + \mu^{-1/2} p_n(t) \xi_n + \frac{1}{2} b_n(t) \xi_n^2 \right] \right\}$$

Здесь $\omega_n(t)$, $p_n(t)$, $b_n(t)$ – дважды дифференцируемые функции порядка единицы, $\text{Im } b_n(t) > 0$ для любого $t \in [0, T]$, а w_{nm}, f_{nm} – полиномы по ξ_n . Механический смысл параметров ω_n, p_n, b_n обсуждался ранее [1].

Разложим коэффициенты системы (2.8) в ряды Тейлора по степеням $\mu^{1/2} \xi_n$ в окрестности центра n -го ВП $\varphi = q_n(t)$. Подставляя анзац (2.9) в (2.8) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\mu^{1/2}$, приходим к последовательности уравнений

$$\sum_{j=0}^m \mathbf{L}_{nj} \mathbf{X}_{nm-j} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{n0} &= \begin{pmatrix} l_{n11} & l_{n12} \\ l_{n21} & l_{n22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_{nk} = (w_{nk}, f_{nk})^T \\ l_{n11} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - p_n^2 \right)^2 + T_1 \frac{\partial^2}{\partial s^2} - (\omega_n - \dot{q}_n p_n)^2 \\ l_{n12} &= -l_{n21} = -k \frac{\partial^2}{\partial s^2}, \quad l_{n22} = \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - p_n^2 \right)^2 \\ \mathbf{L}_{n1} &= b_n \xi_n \mathbf{L}_p + \xi_n \mathbf{L}_q + \dot{p}_n \xi_n \mathbf{L}_\omega - i \mathbf{L}_p \frac{\partial}{\partial \xi_n} \\ \mathbf{L}_{n2} &= \frac{b_n^2 \xi_n^2}{2} \mathbf{L}_{pp} + b_n \xi_n^2 \mathbf{L}_{pq} + \frac{\xi_n^2}{2} \mathbf{L}_{qq} + \frac{\dot{p}_n^2 \xi_n^2}{2} \mathbf{L}_{\omega\omega} + \dot{p}_n \xi_n^2 \mathbf{L}_{\omega q} + \dot{p}_n b_n \xi_n^2 \mathbf{L}_{\omega p} + \\ &+ \frac{\dot{b}_n \xi_n^2}{2} \mathbf{L}_\omega - \frac{1}{2} \mathbf{L}_{pp} \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2} - i b_n \xi_n \mathbf{L}_{pp} \frac{\partial}{\partial \xi_n} - i \xi_n \mathbf{L}_{pq} \frac{\partial}{\partial \xi_n} - i \dot{p}_n \xi_n \mathbf{L}_{\omega p} \frac{\partial}{\partial \xi_n} - \\ &- i \mathbf{L}_\omega \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i b_n}{2} \mathbf{L}_{pp} - \frac{i \dot{\omega}_n}{2} \mathbf{L}_{\omega\omega} - i \dot{p}_n \mathbf{L}_{\omega p} + \mathbf{S}_n, \quad \mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} -i \ddot{q}_n p_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Здесь и ниже индексы p, q, ω означают дифференцирование по p_n, q_n, ω_n , индекс T означает транспонирование. Функции k, T_1 и их производные берутся при $\varphi = q_n(t)$.

Подстановка рядов (2.9) в условия (1.2) и разложение функций $s_1(\varphi), s_2(\varphi)$ в ряды Тейлора по степеням $\mu^{1/2} \xi_n$ приводят к граничным условиям для вектор-функций $\mathbf{X}_{nm}$ при $s = s_i(q_n(t))$ ($i = 1, 2$)

$$\mathbf{X}_{n0} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{X}_{n0}}{\partial s^2} = 0 \quad (2.11)$$

$$\mathbf{X}_{n1} + \xi_n s'_i \frac{\partial \mathbf{X}_{n0}}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{X}_{n1}}{\partial s^2} + \xi_n s'_i \frac{\partial^3 \mathbf{X}_{n0}}{\partial s^3} = 0 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{n2} + \xi_n s'_i \frac{\partial \mathbf{X}_{n1}}{\partial s} + \frac{1}{2} \xi_n^2 \left(s''_i \frac{\partial \mathbf{X}_{n0}}{\partial s} + s'_i \frac{\partial^2 \mathbf{X}_{n0}}{\partial s^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{X}_{n2}}{\partial s^2} + \xi_n s'_i \frac{\partial^3 \mathbf{X}_{n1}}{\partial s^3} + \frac{1}{2} \xi_n^2 \left(s''_i \frac{\partial^3 \mathbf{X}_{n0}}{\partial s^3} + s'_i \frac{\partial^4 \mathbf{X}_{n0}}{\partial s^4} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь и ниже штрих означает производную по ϕ .

$$\begin{aligned} h_{n0}^{n0}(t) &= h_{n1}^{n1}(t) = 2i(b_n^{n1} H^{dp} + H^{pq}), \quad h_{n2}^{n2} = 2i \\ h_{n3}^{n3}(t) &= i H_{n1}^{n1} \left[b_n^{n1} H_{n1}^{n1} H^{dp} - 2 H_{n1}^{n1} H^{pq} - \dot{\omega}_n + \ddot{q}_n p_n + \frac{l'(q_n)}{l(q_n)} H_{n1}^{n1} H^{pq} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{s_2(q_n)} \int_{s_1(q_n)}^{s_1(q_n)} l(q_n) s_1(q_n) \left(\frac{\partial p_n}{\partial l_{n22}} V_n^2 - \frac{\partial p_n}{\partial l_{n11}} \right) z^b z^n ds \right], \quad l(q_n) = s_2(q_n) - s_1(q_n) \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $b_n(0) = b_0$, и амплитудное уравнение для определения P_{n0}

$$\dot{b}_n + H^{dp} b_n^2 + 2 H^{pq} b_n + H^{pq} = 0 \quad (3.6)$$

ти [1]

X_{n2}^{n2} , возникающей во втором приближении ($m = 2$), получаем уравнение Рунд-Рунд, а полиномы P_{n0}^{n0}, P_{n1}^{n1} остаются неизвестными.

$$X_{n1}^{n1}(p) = -i \frac{\partial(Y_{n2}^{n2})}{\partial P_{n0}^{n0}} \frac{\partial \xi_n}{\partial p_n} + \xi_n \left(b_n \frac{\partial(Y_{n2}^{n2})}{\partial(Y_{n2}^{n2})} + \frac{\partial p_n}{\partial q_n} \right) P_{n0}^{n0} \quad (3.5)$$

В данном приближении находим

$$q_n(0) = 0, \quad p_n(0) = a_0$$

с начальными условиями

$$\dot{q}_n = H^p(t, p_n, q_n), \quad \dot{p}_n = -H^q(t, p_n, q_n) \quad (3.4)$$

q_n [1]

При $m = 1$ имеем неоднородную краевую задачу относительно X_{n1}^{n1} . Условия существования решения данной задачи приводят к системе Гамильтона относительно p_n , шениях (3.3) вычисляются при $\phi = q_n(t)$.

где H_n — функция Гамильтона, соответствующая n -му ВП. Все функции в соотно-

$$H_n = \pm \sqrt{(\lambda_2^n + p_2^n)^2 - T_1 \lambda_2^n + \lambda_2^n}, \quad Y_n = (1, \lambda_n)^T; \quad \lambda_n = k \lambda_2^n (\lambda_2^n + p_2^n)^{-1} \quad (3.3)$$

$$\omega_n = q_n p_n - H_n(t, p_n, q_n) \quad (3.2)$$

Рассматривая нулевое приближение ($m = 0$), находим

$$\text{Заметим, что } X_{n0}^{n0} = (0, 0)^T.$$

где P_{nm}^{nm} — полином по ξ_n, Y_n — неизвестный вектор-столбец, $X_{n1}^{n1} = (w_{n1}^{n1}, f_{n1}^{n1})^T$ — не-

$$X_{nm}^{nm} = P_{nm}^{nm}(\xi_n, t) Y_n(q_n(t)) z_n(s, q_n(t)) + X_{n1}^{n1}(s, \xi_n, t), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

(2.10)–(2.13) будем искать в виде

3. Решение краевых задач. Решения полученной последовательности краевых задач

на подвижной образующей $\phi = q_n(t)$.

(2.6), (2.8) свелась к последовательности одномерных краевых задач, рассматриваемых на подвижной образующей, двумерная относительно координат начально-краевая задача (1.2),

4. Решение амплитудного уравнения. Решение амплитудного уравнения (3.7) в виде полинома

$$P_{n0} = \sum_{k=0}^{M_{n0}} A_{nk}(t) \xi_n^k$$

было приведено ранее [1]. Рассмотрим здесь другое представление решения через полиномы Эрмита, которое в частном случае будет удобно для описания свободных колебаний предварительно напряженной оболочки вблизи "слабой" образующей.

Выполним замену переменной $y_n = \Theta_n(t) \xi_n$, где

$$\Theta_n(t) = \frac{\exp[-\int (h_{n1} / h_{n2}) dt]}{\sqrt{4 \int (h_{n0} / h_{n2}) \exp[-2 \int (h_{n1} / h_{n2}) dt] dt}} \quad (4.1)$$

В результате уравнение (3.7) примет вид

$$\frac{\partial^2 P_{n0}}{\partial y_n^2} - 2y_n \frac{\partial P_{n0}}{\partial y_n} + \frac{h_{n2}}{h_{n0} \Theta_n^2} \frac{\partial P_{n0}}{\partial t} + \frac{h_{n3}}{h_{n0} \Theta_n^2} P_{n0} = 0 \quad (4.2)$$

Применяя метод разделения переменных к (4.2) и учитывая линейность уравнения (3.7), имеем

$$P_{n0}(\xi_n, t; c_{nm}) = \sum_{m=0}^{M_{n0}} c_{nm} \chi_{nm}(t) \mathbf{H}_{nm}[\Theta_n(t) \xi_n] \quad (4.3)$$

$$\chi_{nm}(t) = \frac{\{4 \int (h_{n0} / h_{n2}) \exp[-2 \int (h_{n1} / h_{n2}) dt] dt\}^{m/2}}{\exp[\int (h_{n3} / h_{n2}) dt]}$$

где $\mathbf{H}_{nm}$ – полином Эрмита степени m , c_{nm} – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

5. Анализ решения. Построенное решение является асимптотически главным приближением решения задачи с точностью до величин $O(\mu^{1/2})$ и представляет собой суперпозицию N ВП, бегущих в окружном направлении. Каждый n -й ВП в начальный момент времени распадается на n^+ -й и n^- -й ВП, имеющие при $t = 0$ равные по модулю и противоположные по знаку скорости $v_g = \dot{q}_n^\pm(t)$. Ширина ВП – величина порядка $\mu^{1/2} / \text{Im } b_n^\pm(t)$. Знаки $\pm$ соответствуют знаку в первом выражении (3.3).

Неизвестные постоянные $c_{nm}^\pm$ в (4.3) определяются по формуле

$$c_{nm}^\pm = \frac{1}{2^{m+1} m! \sqrt{\pi} \chi_{nm}(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2} \mathbf{H}_{nm}[\Theta_n(0) \zeta] \left[w_{n0}^\circ(\zeta) \mp \frac{v_{n0}^\circ(\zeta)}{\omega_n(0)} \right] d\zeta \quad (5.1)$$

Решение, полученное в данной работе, обобщает решение, полученное ранее [1], так как гамильтониан (3.3) не имеет особенности при $p_n = 0$, и ограничение $p_n(t) \neq 0$, необходимое в [1], отпадает.

Стационарный ВП. Предложенный метод содержит возможность отыскания собственных форм колебаний оболочки, сосредоточенных в окрестности "слабой" образующей [8], при стационарном осевом усилии. Пусть цилиндрическая оболочка переменной кривизны с прямыми краями $s_1(\varphi)$, $s_2(\varphi) = \text{const}$ подвержена действию стационарного неравномерного по окружной координате осевого сжатия $T_1(\varphi)$.

Рассмотрим систему

$$H_p = 0, \quad H_q = 0 \quad (5.2)$$

и уравнение

$$H_{pp} b^2 + 2H_{pq} b + H_{qq} = 0 \quad (5.3)$$

являющиеся вырожденными стационарными аналогами системы Гамильтона, и уравнения Риккати соответственно. Система (5.2) имеет два решения:

$$p = p_w = 0, \quad 2k(\varphi_w)k'(\varphi_w) - \lambda_n^2 T_1'(\varphi_w) = 0 \quad (5.4)$$

и

$$p = p_w = \sqrt{k^{1/2}(\varphi_w)\lambda_n - \lambda_n^2}, \quad 2k'(\varphi_w) - T_1'(\varphi_w) = 0 \quad (5.5)$$

Последние два уравнения в (5.4), (5.5) служат для определения "слабой" образующей $\varphi = \varphi_w$. При этом уравнениями (5.4) следует пользоваться в случае

$$\lambda_n > k^{1/2}(\varphi_w), \quad 2k'^2(\varphi_w) + 2k(\varphi_w)k''(\varphi_w) - T_1''(\varphi_w)\lambda_n^2 > 0 \quad (5.6)$$

а уравнениями (5.5) – при

$$\lambda_n < k^{1/2}(\varphi_w), \quad 4k''(\varphi_w) - 2T_1''(\varphi_w) > 0 \quad (5.7)$$

Решая уравнение (5.3), находим

$$b_w = \frac{i\lambda_n}{2} \sqrt{\frac{2k'^2(\varphi_w) + 2k(\varphi_w)k''(\varphi_w) - T_1''(\varphi_w)\lambda_n^2}{\lambda_n^4 - k^2(\varphi_w)}} \quad (5.8)$$

$$b_w = \frac{\lambda_n}{8} \frac{T_1'(\varphi_w)k^{-1/2}(\varphi_w) + i\sqrt{4k''(\varphi_w) - 2T_1''(\varphi_w)}}{\sqrt{k^{1/2}(\varphi_w)\lambda_n - \lambda_n^2}}$$

для случаев (5.6) и (5.7) соответственно. Далее, не умаляя общности, считаем $\varphi_w = 0$. Пусть теперь $p_n(0) = p_w$, $b_n(0) = b_w$. Тогда решение системы Гамильтона (3.4) и уравнения Риккати (3.6) останутся постоянными:

$$p_n(t) = p_w, \quad q_n(t) = 0, \quad b_n(t) = b_w, \quad \forall t \in [0, T].$$

Полином P_{n0} определяем согласно соотношению (4.3). В итоге получим

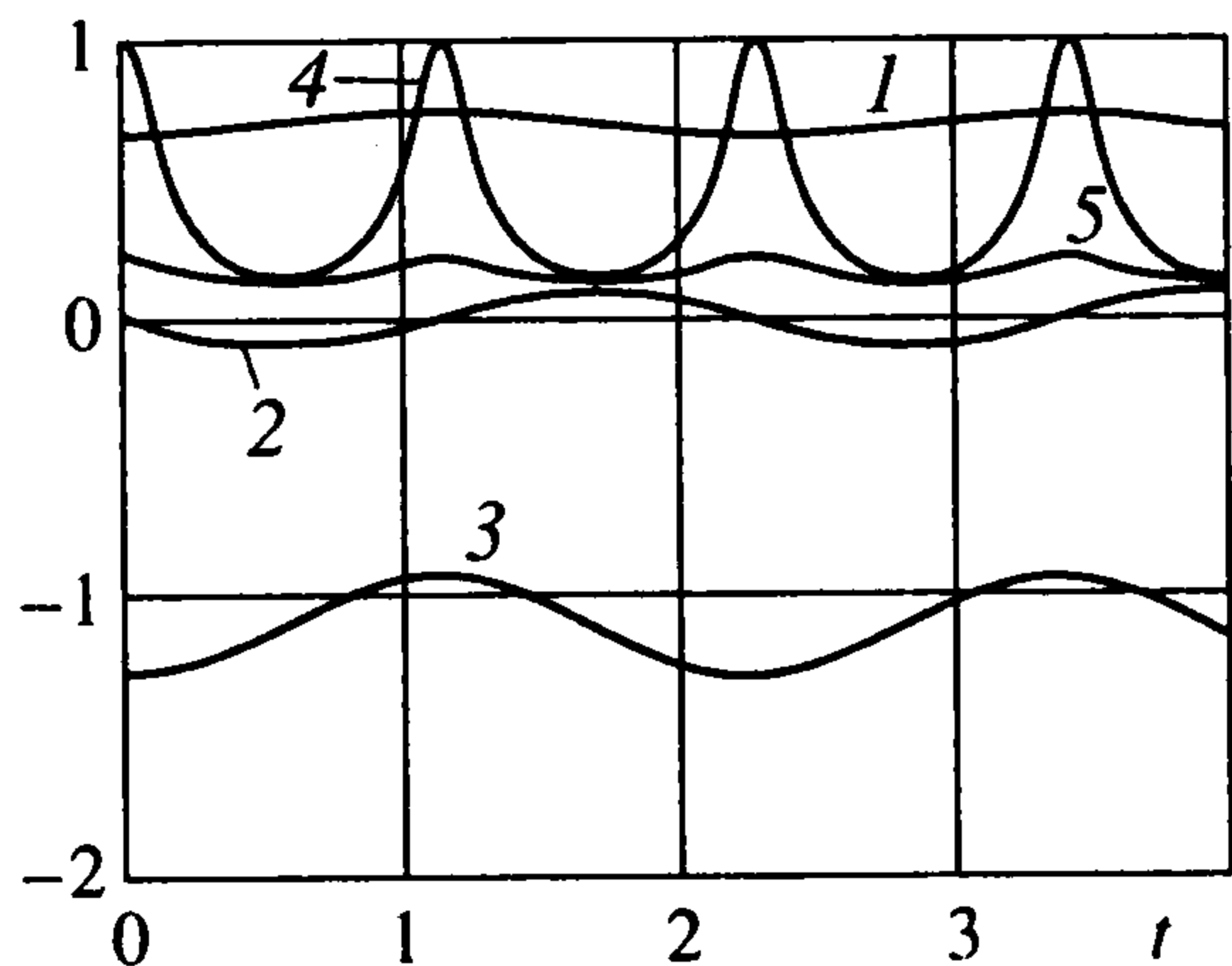
$$(W_n, F_n)^T = Y_n z_n \exp \left\{ i\mu^{-1} \left(\omega_w t + p_w \varphi + \frac{1}{2} b_w \varphi^2 \right) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{m=0}^{M_{n0}} (c_{nm}^+ + c_{nm}^-) \left(\frac{iH_{pp}}{b_w H_{pp} + H_{pq}} \right)^{m/2} \mathbf{H}_{nm} \left[\mu^{-1/2} \sqrt{\frac{b_w H_{pp} + H_{pq}}{H_{pp}}} \varphi \right] + O(\mu^{1/2}) \right\} \quad (5.9)$$

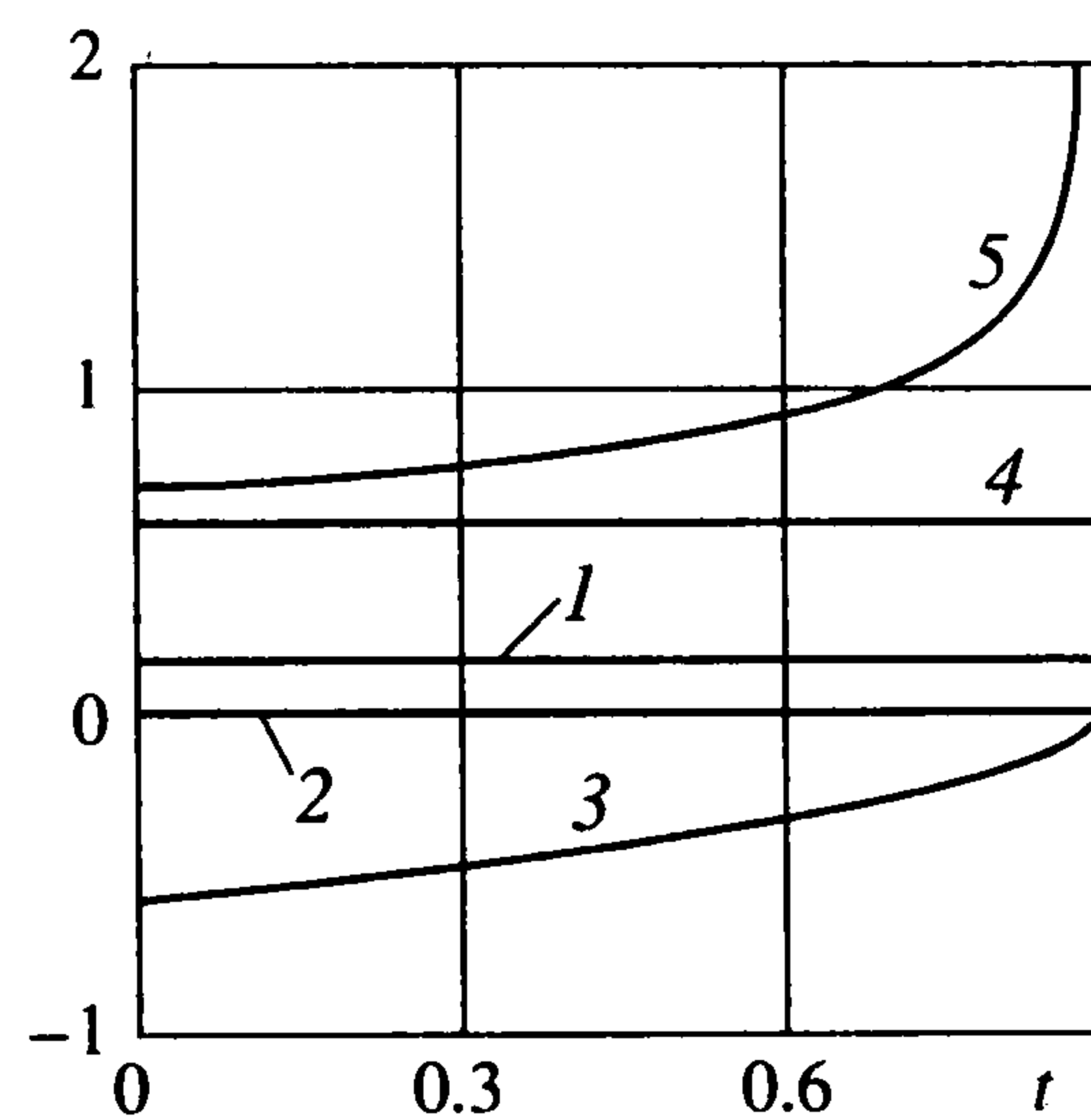
$$\omega_w = H_n(0, p_w, 0) - \mu \left(\left(m + \frac{1}{2} \right) b_w H_{pp} + m H_{pq} \right)$$

В (5.9) $c_{nm}^\pm$ находятся по формуле (5.1); все функции вычисляются при $p_n = p_w$, $q_n = 0$; M_{n0} – степень полиномов $w_{n0}^\circ(\zeta)$, $v_{n0}^\circ(\zeta)$ из начальных условий.

Функция (5.9) представляет собой суперпозицию $M_{n0} + 1$ числа собственных форм колебаний предварительно напряженной в осевом направлении цилиндрической оболочки [5]. Построенное решение представляет собой стационарный ВП с центром на "слабой" образующей $\varphi_w = 0$. Были построены [8] аналогичные решения, описывающие свободные колебания оболочки вблизи "слабой" образующей в случае малого числа волн вдоль образующей. Формула (5.9) справедлива, если $\lambda_n \neq k^{1/2}(0)$. Случай свободных колебаний при $\lambda_n \sim k^{1/2}(0)$ рассмотрен ранее [6].



Фиг. 1



Фиг. 2

Нестационарный ВП. Проанализируем решение в случае тонкой круговой цилиндрической оболочки с прямыми краями $s_1(\varphi), s_2(\varphi) = \text{const}$, нагруженной стационарным неравномерным по окружности осевым усилием $T_1(\varphi)$. Далее приводится лишь часть получаемых при этом выводов. Анализ системы Гамильтона показывает, что если

$$k^2 \lambda_n^4 > (a_0^2 + \lambda_n^2)^4, \quad T_1'(\varphi) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < \varphi < \varphi_2, \quad T_1(\varphi) = T_1(-\varphi) \quad (5.10)$$

$$\inf_{[0, \varphi_2]} T_1(\varphi) < A, \quad A = 2k - [H_n(0, a_0, 0)]^2 \lambda_n^{-2} \quad (5.11)$$

то существует такое t_r , что $v_g(0)v_g(t) > 0$ при $0 < t < t_r$, $v_g(t_r) = 0$, где $T_1[q_n(t_r)] = A$; $v_g(0)v_g(t) < 0$ при $t_r < t < 3t_r$, $v_g(3t_r) = 0$, причем $T_1[q_n(3t_r)] = A$, $q_n(3t_r) = -q_n(t_r)$; $v_g(0)v_g(t) > 0$ при $3t_r < t < 4t_r$ и $v_g(4t_r) = v_g(0)$. Здесь p_n, q_n, ω_n – периодические функции времени с периодом $4t_r$.

Отсюда следует вывод о периодичности коэффициентов уравнения Риккати (3.6) и возникает вопрос о характере решений как уравнения Риккати, так и амплитудного уравнения (3.7) при выполнении условий (5.10), (5.11).

6. Примеры 1°. Рассмотрим шарнирно опертую круговую цилиндрическую оболочку с прямыми краями, нагруженную стационарной неравномерной осевой нагрузкой. Пусть

$$T_1 = 1 + \cos 2\varphi, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 4, \quad k = 2, \quad a_0 = 2/3, \quad b_0 = i$$

$$\tilde{W}_0^* = w_{n0}^* z_n, \quad \tilde{V}_0^* = v_{n0}^* z_n$$

В данном случае начальный ВП расположен на "наиболее слабой" образующей, где сжатие T_1 максимально. Вычисления проводились для

$$h = 0,02, \quad R = 50, \quad \nu = 0,3, \quad w_{n0}^* = 1, \quad v_{n0}^* = 1, \quad n = 1 \quad (6.1)$$

При данных значениях параметров выполняются условия (5.10), (5.11).

На фиг. 1 графики функций $p_1^+(t), q_1^+(t), \omega_1^+(t)$ (кривые 1–3 соответственно) указывают на полное соответствие поведения 1+-го ВП результатам анализа; наблюдается многократное отражение ВП, функции p_1^+, q_1^+, ω_1^+ – периодические. Графики функций $\text{Im } b_1^+(t), \text{Re } w_{10\text{max}}^+$ (кривые 4, 5) показывают, что каждое отражение сопровождается фокусировкой ВП (ростом $\text{Im } b_1^+$) и возрастанием амплитуды колебаний. Приближенное вычисление матрицы монодромии [9] для линейной системы уравнений, равносильной (3.6), позволило установить, что в данном случае

функция $b_1^+(t)$ не является периодической, а промежуток между двумя четными (по номеру) максимумами функции $\text{Im } b_1^+(t)$ незначительно превосходит период $4t_*$ функций p_1^+ , q_1^+ , ω_1^+ .

2°. Рассмотрим шарнирно опертую цилиндрическую оболочку с прямыми краями, имеющую в качестве направляющей эллипс с полуосями e_1 , e_2 ($e_1 < e_2$). Пусть начальный ВП располагается на образующей, которой соответствует наименьшая кривизна, являющейся "наиболее слабой". Заметим, что таких образующих здесь будет две. Пусть оболочка нагружается медленно изменяющимся во времени по линейному закону осевым усилием $T_1 = t$. Вычисления проводились на промежутке $t \in [0, T_{\text{cr}})$, где T_{cr} – критическое значение осевого усилия [2], соответствующее потере устойчивости оболочки. В качестве начального ВП рассмотрим одну из собственных форм низкочастотных колебаний оболочки, свободной от напряжений ($T_1 = 0$). Положим

$$e_1 = 1, \quad e_2 = 1.5, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 5$$

$$a_0 = \sqrt{k^{1/2}(0)\lambda_n - \lambda_n^2}, \quad b_0 = \frac{i\lambda_n}{4} \frac{\sqrt{k''(0)}}{\sqrt{k^{1/2}(0)\lambda_n - \lambda_n^2}}$$

$$\tilde{W}_0^* = w_{n0}^* z_n, \quad \tilde{V}_0^* = v_{n0}^* z_n$$

Значение остальных параметров совпадает с (6.1).

На фиг. 2 приняты те же обозначения, что и на фиг. 1. Видим, что функции p_1^+ , q_1^+ , $\text{Im } b_1^+$ постоянны, т.е. растущее осевое усилие T_1 не влияет на формы колебаний, а приводит к уменьшению частоты колебаний $|\omega_1^+|$ и неограниченному возрастанию амплитуд. Это указывает на возможность динамической потери устойчивости при значениях $T_1(t)$, меньших критического T_{cr} , и необходимость дальнейшего исследования задачи в нелинейной постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михасев Г.И. Локализованные семейства изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке с косыми краями // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 4. С. 635–643.
2. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: Асимптотические методы. М.: Наука. Физматлит, 1995. 319 с.
3. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
4. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
5. Mikhasev G.I. Free and parametric vibrations of cylindrical shells under static and periodic axial loads // Techn. Mech. 1997. Bd 17. N. 3. P. 209–216.
6. Kuntsevich S.P., Mikhasev G.I. Parametric vibrations of viscoelastic cylindrical shell under static and periodic axial loads // Techn. Mech. 1999. Bd 19. N. 3. P. 187–197.
7. Courant R., Helbert D. Methoden der mathematischen Physik. В.: Springer, 1931. = Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
8. Товстик П.Е. Двумерные задачи устойчивости и колебаний оболочек нулевой гауссовой кривизны // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 1. С. 69–71.
9. Богданов Ю.С., Сыроид Ю.Б. Дифференциальные уравнения. Минск: Вышэйш. шк., 1983. 239 с.