

УДК 539.3:534.1

© 2001 г. С.В. Кузнецов

ДОЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ ЛЭМБА В АНИЗОТРОПНЫХ СЛОЯХ

Разработан шестимерный комплексный формализм для анализа волн Лэмба, распространяющихся с дозвуковой скоростью в анизотропных слоях. Приведен пример упругого слоя из материала с кубической симметрией и однородными граничными условиями, в котором при определенных значениях фазовой скорости отсутствуют некоторые из волн Лэмба, распространяющиеся в направлениях упругой симметрии.

Начиная с работы Лэмба [1], в которой получены основные уравнения для описания распространения упругих волн в изотропном слое, во всех последующих исследованиях гармонических волн с изменяющейся по толщине слоя амплитудой предполагалось, что такая волна состоит из нескольких парциальных волн (ПВ), имеющих вид

$$\mathbf{u}_k(x) = \mathbf{m}_k e^{ir\gamma_k x \cdot \mathbf{v}} e^{ir(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)} \quad (0.1)$$

где $\mathbf{u}_k$ – поле смещений, вызываемое k -й ПВ, $\mathbf{m}_k$ – векторная, в общем случае, комплексная амплитуда, определяемая из уравнения Кристоффеля, γ_k – корень уравнения Кристоффеля, r – волновое число, $\mathbf{v}$ – вектор единичной нормали к срединной поверхности слоя, $\mathbf{n}$ – вектор волновой нормали, лежащий в срединной плоскости и задающий направление распространения фронта волны, c – фазовая скорость. Для существования волны Лэмба необходимо, чтобы все составляющие ее ПВ имели одно и то же волновое число и одинаковую фазовую скорость.

Представление (0.1) для ПВ, помимо волн Лэмба, использовалось также для волн Релея [2] и Стоунли [3]. Последние представляют собой волны, распространяющиеся по плоской границе между двумя различными упругими полупространствами. В некоторых исследованиях, например [4, 5], посвященных анализу волн Лэмба в изотропных слоях, решение строилось в комплексных потенциалах Папковича – Нейбера, а сами потенциалы выбирались в виде, обеспечивавшим выполнение представления (0.1). В случае анизотропных слоев для ПВ, составляющих волну Лэмба, также использовалось представление (0.1), см., например, [6–10].

Ниже показано, что в случае волн Лэмба, распространяющихся с дозвуковой скоростью в анизотропных слоях (фазовая скорость волны Лэмба не превышает минимальную скорость объемной волны, распространяющейся в том же направлении), представление (0.1) нуждается в корректировке – в некоторых случаях, зависящих от вида анизотропии, соотношений между компонентами тензора упругости и фазовой скорости, волна Лэмба может состоять из меньшего числа ПВ, чем предполагалось в подходах, восходящих к Лэмбу. Результатом этого служит доказательство существования запрещенных направлений и скоростей, при которых волна Лэмба распространяться не может.

1. Основные соотношения. Уравнения движения анизотропной среды могут быть записаны в виде

$$\mathbf{A}(\partial_x, \partial_t) \mathbf{u} \equiv \operatorname{div}_x \mathbf{C} \cdot \nabla_x \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad (1.1)$$

где ρ – плотность среды, $\mathbf{C}$ – четырехвалентный тензор упругости. Предполагается, что этот тензор положительно определен:

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \equiv \sum_{i,j,m,n} B_{ij} C^{ijmn} B_{mn} > 0, \quad \forall \mathbf{B} \in \operatorname{sym}(R^3 \otimes R^3), \mathbf{B} \neq 0 \quad (1.2)$$

Подстановка выражения для ПВ (0.1) в уравнение движения дает уравнение Кристоффеля:

$$((\gamma_k \mathbf{v} + \mathbf{n}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} + \gamma_k \mathbf{v}) - \rho c^2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{m}_k = 0 \quad (1.3)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица. Уравнение (1.3) может быть записано в эквивалентном виде

$$\det((\gamma_k \mathbf{v} + \mathbf{n}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} + \gamma_k \mathbf{v}) - \rho c^2 \mathbf{I}) = 0 \quad (1.4)$$

Уравнение Кристоффеля в форме (1.4) может рассматриваться как полиномиальное уравнение шестой степени относительно γ_k . Так как коэффициенты полинома (1.4) действительны, его комплексные корни входят в множество всех корней комплексно-сопряженными парами.

Можно показать (см., например, [11]), что уравнение (1.4) не имеет действительных корней, если фазовая скорость меньше так называемой низшей предельной скорости $c_3^{\lim}$. В свою очередь $c_3^{\lim}$ не превышает наименьшей скорости объемной волны, распространяющейся в том же направлении. В дальнейшем предполагается выполнение условия

$$c < c_3^{\lim} \quad (1.5)$$

обеспечивающее отсутствие действительных корней в уравнении Кристоффеля.

2. Шестимерный формализм. Поскольку заранее неизвестно, является ли представление (0.1) для ПВ единственным возможным, рассмотрим следующее (наиболее общее) представление для гармонической волны с плоским фронтом и неоднородной амплитудой:

$$\mathbf{v}(x'') e^{ir(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{v}(x'')$ – неоднородная, вообще говоря, комплексная векторная амплитуда, $x'' = ir \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$, так что x'' – безразмерная (мнимая) координата в направлении, определяемом вектором $\mathbf{v}$. Экспоненциальный множитель в (2.1) отвечает движению плоского волнового фронта с фазовой скоростью c в направлении $\mathbf{n}$. Никаких априорных ограничений на гладкость векторной амплитуды $\mathbf{v}(x'')$ не накладывается.

Подстановка представления (2.1) в уравнения движения (1.1) дает матричное дифференциальное уравнение (ДУ) второго порядка

$$((\mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}) \partial_{x''}^2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}) \partial_{x''} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} - \rho c^2 \mathbf{I}) \mathbf{v}(x'')) = 0 \quad (2.2)$$

Непосредственный анализ уравнения (2.2) довольно сложен. Ситуацию можно упростить, если ввести дополнительную вектор-функцию

$$\mathbf{w}(x'') = \partial_{x''} \mathbf{v}(x'') \quad (2.3)$$

Тогда, учитывая положительную определенность тензора $\mathbf{C}$, уравнение (2.2) сводим к матричному ДУ первого порядка

$$\partial_{x''} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_6 \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

где

$$\mathbf{R}_6 = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M} & -\mathbf{N} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v})^{-1} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} - \rho c^2 \mathbf{I}) \\ \mathbf{N} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v})^{-1} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}) \quad (2.5)$$

($\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ – действительные матрицы третьего порядка).

Принимая во внимание структуру матрицы $\mathbf{R}_6$, ее шестимерные собственные векторы удобно представить в виде

$$\mathbf{m}_6 \equiv (\mathbf{m}; \mathbf{m}'), \quad \mathbf{m}, \mathbf{m}' \in C^3$$

Для дальнейшего потребуется отображение $F: C^6 \rightarrow C^3$, такое, что

$$F(\mathbf{m}_6) = \mathbf{m} \quad (2.6)$$

Замечания. 2.1. Учитывая соотношения (2.4), (2.5), определитель матрицы $\mathbf{R}_6$ можно представить в виде

$$\det \mathbf{R}_6 = (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\nu})^{-1} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} - \rho c^2 \mathbf{I}) \quad (2.7)$$

Правая часть этого равенства показывает, что ввиду положительной определенности тензора $\mathbf{C}$ матрица $\mathbf{R}_6$ – невырожденная при любых фазовых скоростях, за исключением случаев, когда $\rho c^2 = \lambda_k (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n})$ ($k = 1, 2, 3$; λ_k означает собственное число соответствующей матрицы), т.е. вырождение наступает, когда фазовая скорость c совпадает со скоростью одной из объемных волн, распространяющихся в направлении вектора $\mathbf{n}$. Ясно, что в случае дозвуковых волн Лэмба матрица $\mathbf{R}_6$ – невырожденная.

2.2. Поскольку матрица $\mathbf{R}_6$ – не симметрическая, ее правый и левый собственные векторы, вообще говоря, различны. В дальнейшем для краткости под "собственным вектором" будут пониматься правые собственные векторы матрицы $\mathbf{R}_6$.

2.3. Матрица $\mathbf{R}_6$ по своей структуре близка к матрице, использующейся для построения "фундаментального тензора упругости". Этот тензор и соответствующая матрица введены ранее [12] и находят применение в работах, связанных с исследованием волн Релея в анизотропных упругих полупространствах, см., например, [11, 13–15].

Теорема 2.1. 1°. Множество корней характеристического полинома уравнения Кристоффеля (1.4) совпадает с множеством характеристических чисел матрицы $\mathbf{R}_6$.

2°. Спектральное пространство уравнения Кристоффеля (1.3) совпадает с сюръекцией (2.6) спектрального пространства матрицы $\mathbf{R}_6$.

Доказательство. Пусть γ_k – корень характеристического полинома уравнения Кристоффеля (1.4), а $\mathbf{m}_k$ – соответствующий собственный вектор, удовлетворяющий уравнению (1.3). Подстановка функций $\mathbf{v}(x'') = \mathbf{m}_k e^{\gamma_k x''}$ и $\mathbf{w}(x'') = \gamma_k \mathbf{m}_k e^{\gamma_k x''}$, отвечающих этим γ_k и $\mathbf{m}_k$, в уравнение (2.4) дает

$$\gamma_k \begin{pmatrix} \mathbf{m}_k \\ \gamma_k \mathbf{m}_k \end{pmatrix} = \mathbf{R}_6 \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{m}_k \\ \gamma_k \mathbf{m}_k \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Таким образом, каждый корень уравнения Кристоффеля является также характеристическим числом матрицы $\mathbf{R}_6$, а соответствующий собственный вектор уравнения Кристоффеля совпадает с вектором $F(\mathbf{m}_6)$.

Пусть теперь γ_k – характеристическое число, а $(\mathbf{m}_k; \mathbf{m}'_k)$, $\mathbf{m}_k, \mathbf{m}'_k \in C^3$ – соответствующий собственный вектор матрицы $\mathbf{R}_6$, т.е.

$$\gamma_k \begin{pmatrix} \mathbf{m}_k \\ \mathbf{m}'_k \end{pmatrix} = \mathbf{R}_6 \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{m}_k \\ \mathbf{m}'_k \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Соотношение (2.9) вместе с (2.4), (2.5) дает равенство

$$(\gamma_k^2 (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \gamma_k (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} - \rho c^2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{m}_k = 0$$

совпадающее с уравнением (1.3).

В силу сказанного в конце разд. 1 имеем

Следствие. При выполнении условия (1.5) все характеристические числа матрицы $\mathbf{R}_6$ комплексны и входят в ее спектр комплексно-сопряженными парами.

3. Представление для волн Лэмба. Структура общего решения системы ДУ первого порядка (2.4) в C^6 определяется жордановой нормальной формой матрицы $\mathbf{R}_6$ [16]. В силу следствия из теоремы 2.1 при дозвуковых фазовых скоростях, удовлетворяющих, кроме того, условию (1.5), возможны только три вида жордановых нормальных форм матрицы $\mathbf{R}_6$

$$\mathbf{J}_6^{(I)} = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_6), \quad \mathbf{J}_6^{(II)} = \text{diag}(\Gamma_1^2, \Gamma_2^2, \gamma_3, \gamma_4), \quad \mathbf{J}_6^{(III)} = \text{diag}(\Gamma_1^3, \Gamma_2^3) \quad (3.1)$$

$$\Gamma_j^2 = \begin{pmatrix} \gamma_j & 1 & 0 \\ 0 & \gamma_j & 1 \\ 0 & 0 & \gamma_j \end{pmatrix}, \quad \Gamma_j^3 = \begin{pmatrix} \gamma_j & 1 & 0 \\ 0 & \gamma_j & 1 \\ 0 & 0 & \gamma_j \end{pmatrix}; \quad j=1, 2$$

Замечание 3.1. В выражениях (3.1) можно положить

$$\gamma_{2k-1} = \overline{\gamma_{2k}}, \quad k=1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Равенства (3.2) возможны в силу следствия и теоремы 2.1. Далее, поскольку матрица $\mathbf{R}_6$ действительная, соотношения, аналогичные (3.2), выполняются и для ее собственных векторов

$$(\mathbf{m}_{2k-1}; \mathbf{m}'_{2k-1}) = (\overline{\mathbf{m}_{2k}}; \overline{\mathbf{m}'_{2k}}) \quad (3.3)$$

Предложение 3.1. В случае, когда матрица $\mathbf{R}_6$ нормальна и подобна (над C) жордановой матрице $\mathbf{J}_6^{(I)}$, выполняется условие: либо $\gamma_k = \pm i$, либо $\mathbf{m}_k \cdot \mathbf{m}_k = 0$ ($\mathbf{m}_k$ – комплексный трехмерный образ при отображении F соответствующего шестимерного собственного вектора матрицы $\mathbf{R}_6$).

Доказательство. Заметим, что в условиях предложения 3.1 все собственные векторы матрицы $\mathbf{R}_6$ могут быть выбраны ортонормальными (это, вообще говоря, не так для матриц, подобных $\mathbf{J}_6^{(II)}$ или $\mathbf{J}_6^{(III)}$ ([17], гл. VII, § 5)).

Пусть $(\mathbf{m}_k; \mathbf{m}'_k)$, $\mathbf{m}_k, \mathbf{m}'_k \in C^3$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{R}_6$, соответствующий характеристическому числу γ_k . Условие ортогональности собственных векторов $(\mathbf{m}_{2k-1}; \mathbf{m}'_{2k-1})$ и $(\mathbf{m}_{2k}; \mathbf{m}'_{2k})$ в силу соотношения (3.3) имеет вид

$$\mathbf{m}_{2k-1} \cdot \mathbf{m}_{2k-1} = -\mathbf{m}'_{2k-1} \cdot \mathbf{m}'_{2k-1} \quad (3.4)$$

Видно, что аналогичное соотношение имеет место и для векторов с четными индексами. Далее, из соотношения (2.9) при учете выражения (2.4), задающего структуру матрицы $\mathbf{R}_6$, вытекает

$$\gamma_k \mathbf{m}_k = \mathbf{m}'_k, \quad \forall k \quad (3.5)$$

Соотношения (3.4), (3.5) дают

$$(1 + \gamma_k^2) \mathbf{m}_k \cdot \mathbf{m}_k = 0 \quad (3.6)$$

что завершает доказательство.

Переход от системы первого порядка (2.4) к исходной системе (2.2) при учете результатов общей теории матричных ДУ ([16], гл. 4) позволяет представить соответствующие общие решения (матрицу фундаментальных решений) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(I)}(x'') &= \sum_{k=1}^6 C_k \mathbf{m}_k e^{\gamma_k x''} \\ \mathbf{v}^{(II)}(x'') &= \sum_{k=1}^2 (C_{2k-1} + C_{2k} x'') \mathbf{m}_k e^{\gamma_k x''} + \sum_{k=3}^4 C_{k+2} \mathbf{m}_k e^{\gamma_k x''} \\ \mathbf{v}^{(III)}(x'') &= \sum_{k=1}^2 (C_{3k-2} + C_{3k-1} x'' + C_{3k} x''^2) \mathbf{m}_k e^{\gamma_k x''} \end{aligned} \quad (3.7)$$

где C_k – подлежащие определению комплексные коэффициенты.

Замечание 3.2. В случае скалярных ДУ неизвестные коэффициенты C_k независимы и определяются, как правило, из граничных условий; в случае матричных ДУ, аналогичных (3.4), эти коэффициенты могут быть зависимы ([16], гл. 4) – возможные соотношения между ними определяются подстановкой соответствующего решения в исходное уравнение.

Предложение 4.2. 1°. В представлении для $\mathbf{v}^{(I)}$ все коэффициенты C_k независимы.

2°. В представлении для $\mathbf{v}^{(II)}$ коэффициенты C_2 и C_4 равны нулю.

3°. В представлении для $\mathbf{v}^{(III)}$ коэффициенты C_2 , C_3 и C_5 , C_6 равны нулю.

Доказательство. Утверждение 1° очевидно, поскольку матрица $\mathbf{R}_6$ не содержит жордановых блоков.

Для доказательства утверждения 2° подставим решение, отвечающее одному из жордановых блоков (например, блоку, содержащему γ_1), в уравнение (2.4), это дает

$$(C_1 \mathbf{A} + x C_2 \mathbf{A} + C_2 \mathbf{B}) \cdot \mathbf{m}_1 e^{\gamma_1 x''} = 0$$

$$\mathbf{A} = \gamma_1^2 \mathbf{I} + \gamma_1 \mathbf{N} + \mathbf{M}, \quad \mathbf{B} = 2\gamma_1 \mathbf{I} + \mathbf{N}$$
(3.8)

Матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ определены формулами (2.5). Из равенства (3.8) вытекает, что

$$\mathbf{m}_1 \in \ker \mathbf{A}$$
(3.9)

и либо $C_2 = 0$, либо выполняется условие

$$\mathbf{m}_1 \in \ker \mathbf{B}$$
(3.10)

Покажем, что при комплексном γ_1 выполнение последних двух соотношений невозможно. Условие (2.9) при учете (2.5) дает

$$\overline{\mathbf{m}}_1 \cdot (2\gamma_1 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v})) \cdot \mathbf{m}_1 = 0$$
(3.11)

Условие (3.11), однако, при учете положительной определенности тензора $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v})$ несовместно с условием $\text{Im}(\gamma_1) \neq 0$.

Для доказательства утверждения 3° подставим решение, отвечающее жорданову блоку, содержащему γ_1 , в уравнение (2.4). Это дает

$$((C_1 + x C_2 + x^2 C_3) \mathbf{A} + (C_2 + 2x C_3) \mathbf{B} + 2C_3 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{m}_1 e^{\gamma_1 x''} = 0$$

Дальнейший анализ показывает, что условие (3.9) выполнено, откуда при учете равенства (3.11) вытекает утверждение 3°.

В силу предложения 3.2 структура волны Лэмба зависит от наличия и ранга жордановых блоков в жордановой нормальной форме матрицы $\mathbf{R}_6$. При учете соотношений (3.7) представление для волны Лэмба запишем в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^p C_k \mathbf{m}_k e^{ir\gamma_k \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}} e^{ir(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)}, \quad p = \begin{cases} 6 & \text{для } \mathbf{J}_6^{(I)} \\ 4 & \text{для } \mathbf{J}_6^{(II)} \\ 2 & \text{для } \mathbf{J}_6^{(III)} \end{cases}$$
(3.12)

В (3.12) теперь уже произвольные коэффициенты C_k , отвечающие $\mathbf{J}_6^{(II)}$ и $\mathbf{J}_6^{(III)}$, перенумерованы по сравнению с нумерацией в соотношениях (3.7).

4. Дисперсионное уравнение. На поверхностях слоя предполагаются выполненными однородные граничные условия в усилиях ($2h$ – толщина слоя)

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \pm h: \quad \mathbf{t} \equiv \pm \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = 0$$
(4.1)

Подстановка поля смещений (3.12) в граничные условия (4.1) и переход к безразмерным координатам $x'' = ir(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})$ дают

$$\sum_{k=1}^p C_k \mathbf{t}_k e^{\pm \gamma_k \xi} = 0$$

$$\mathbf{t}_k = (\gamma_k \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m}_k, \quad \xi = irh$$
(4.2)

(параметр p определен группой равенств в 3.12).

Граничные условия в форме (4.2) можно трактовать как нетривиальное решение системы (4.2) относительно неизвестных коэффициентов C_k ($k = 1, \dots, p$); последнее эквивалентно обращению в нуль всех комплексных определителей порядка p :

$$\delta_p \equiv \det_p \begin{vmatrix} t_1 e^{+\gamma_1 \xi} & \dots & t_p e^{+\gamma_p \xi} \\ t_1 e^{-\gamma_1 \xi} & \dots & t_p e^{-\gamma_p \xi} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.3)$$

Уравнения (4.3) являются искомыми дисперсионными соотношениями, задающими посредством предварительного решения ДУ (2.4), связь между фазовой скоростью c и волновым числом r или фазовой скоростью и круговой частотой $\omega = rc$.

В случае произвольной анизотропии вопрос о разрешимости уравнений (4.3) не исследован, однако справедливы следующие утверждения.

Предложение 4.1. Допустим, что $\operatorname{Re}(\gamma_k) = 0$ при каком-либо k . Тогда волна Лэмба, фазовая скорость которой удовлетворяет условию (1.5), не может состоять только из соответствующей ПВ.

Доказательство. Пусть соответствующая ПВ удовлетворяет уравнениям (4.3), это эквивалентно равенству

$$t_k = 0 \quad (4.4)$$

Домножая обе части этого равенства на вектор $\bar{m}_k$, получим

$$\gamma_k \nu \otimes \bar{m}_k \cdot C \cdot m_k \otimes \nu + \nu \otimes \bar{m}_k \cdot C \cdot m_k \otimes n = 0 \quad (4.5)$$

Далее остается заметить, что при $\operatorname{Im}(\gamma_k) \neq 0$ мнимая часть выражения в левой части равенства (4.5) также отлична от нуля в силу положительной определенности тензора упругости. Таким образом, равенство нулю левой части этого равенства невозможно.

Предложение 4.2. В условиях предложения 4.1 волна Лэмба не может формироваться двумя ПВ, отвечающими сопряженным собственным числам (корням характеристического полинома).

Доказательство. Допустим, что при каких-либо сопряженных собственных числах, например γ_1 и $\bar{\gamma}_1$, существует нетривиальное решение системы (4.2). В этом случае следует положить $p = 2$, а условия (4.3) обращения в нуль определителей второго порядка сводятся к двум уравнениям. Первое уравнение может быть представлено в виде

$$t_1 \times \bar{t}_1 = 0 \quad (4.6)$$

причем $\operatorname{Im}(\gamma_1) \neq 0$ в силу условия (1.5), так что $\operatorname{Im}(t_1) \neq 0$. Уравнение (5.6) выражает собой условие коллинеарности векторов t_1 и $\bar{t}_1$:

$$t_1 = \alpha e, \quad \bar{t}_1 = \bar{\alpha} e \quad (4.7)$$

где α – некоторая отличная от нуля комплексная постоянная и $e \in R^3$. При учете условия (4.7) второе уравнение, вытекающее из (4.3), запишем в виде

$$\delta_2 \equiv \det_2 \begin{vmatrix} \alpha e^{+\gamma_1 \xi} & \bar{\alpha} e^{+\bar{\gamma}_1 \xi} \\ \alpha e^{-\gamma_1 \xi} & \bar{\alpha} e^{-\bar{\gamma}_1 \xi} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.8)$$

Ясно, что при $\operatorname{Im}(\gamma_1) \neq 0$ и $\alpha \neq 0$ обращение в нуль левой части равенства (5.8) невозможно.

Следствие. В условиях предложения 4.2 не существует волны Лэмба, отвечающей жордановой нормальной форме $J_6^{(III)}$.

5. Слой из материала с кубической симметрией. Ниже показано, что жордановы блоки (второго ранга) в жордановой нормальной форме матрицы R_6 появляются даже

в слоях из материалов с кубической симметрией при совпадении срединной плоскости с плоскостью упругой симметрии и направлениях распространения, совпадающих с одной из кристаллографических осей. Пусть тензор упругости кубически симметричного кристалла в кристаллографических осях, заданных векторами $\mathbf{e}_k$ ($k = 1, 2, 3$), имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = & \eta \sum_k \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k + \lambda \sum_{k \neq m} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_m + \\ & + 4\mu \sum_{k < m} \text{sym}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m) \otimes \text{sym}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m) \\ \text{sym}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m) = & \frac{1}{2}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_k) \end{aligned} \quad (5.1)$$

(η, λ, μ – упругие константы).

Условие положительной определенности (1.2), накладываемое на тензор $\mathbf{C}$, дает

$$\eta - \lambda > 0, \quad \eta + 2\lambda > 0, \quad \mu > 0 \quad (5.2)$$

Пусть единичные векторы $\mathbf{v}$ – нормали к срединной плоскости слоя и $\mathbf{n}$ – направления распространения волны Лэмба ориентированы вдоль кристаллографических осей рассматриваемого кристалла. Подстановка тензора упругости (5.1) в последние два равенства (2.5) дает

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & \left(\frac{\mu - \rho c^2}{\eta} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \frac{\eta - \rho c^2}{\mu} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{\mu - \rho c^2}{\mu} \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \right), \quad \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{n} \\ \mathbf{N} = & \left(\frac{\lambda + \mu}{\eta} \mathbf{v} \otimes \mathbf{n} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \mathbf{n} \otimes \mathbf{v} \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Анализ структуры матрицы $\mathbf{R}_6$ при учете равенств (5.3) приводит к заключению о справедливости следующего утверждения.

Предложение 5.1. 1°. Соотношение между фазовой скоростью, плотностью и упругими постоянными кубического кристалла

$$\rho c^2 = 2 \frac{|\lambda + \mu|}{(\eta - \mu)^2} \sqrt{\eta \mu (\eta + \lambda) (\lambda + 2\mu - \eta)} - \frac{(\eta + \mu)(\eta + \lambda)(\lambda + 2\mu - \eta)}{(\eta - \mu)^2} \quad (5.4)$$

необходимо и достаточно для появления жордановой нормальной формы $\mathbf{J}_6^{(II)}$.

2°. Собственные числа матрицы $\mathbf{R}_6$, отвечающие равенству (5.4), представимы в виде

$$\begin{aligned} \gamma_1 = i \psi_\mu^{1/4} \psi_\eta^{1/4}, \quad \gamma_2 = -\gamma_1, \quad \gamma_3 = i \psi_\mu^{1/2}, \quad \gamma_4 = -\gamma_3 \\ \psi_\mu = 1 - \rho c^2 / \mu, \quad \psi_\eta = 1 - \rho c^2 / \eta \end{aligned} \quad (5.5)$$

где γ_1 и γ_2 отвечают жордановым блокам.

3°. Амплитуды $\mathbf{m}_k$, соответствующие собственным числам γ_k , имеют вид (p – нормализующий множитель)

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1 = p(i \mathbf{v} \psi_\eta^{1/4} + \mathbf{n} \psi_\mu^{1/4}), \quad \mathbf{m}_2 = \overline{\mathbf{m}_1}, \quad \mathbf{m}_3 = \mathbf{m}_4 = \mathbf{w} \\ p = (\psi_\mu^{1/2} + \psi_\eta^{1/2})^{-1/2} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Подстановка выражений (5.5), (5.6) в дисперсионное уравнение (4.3) при учете равенства (5.1) показывает, что уравнение (4.3) не удовлетворяется ни при каких значениях параметра ξ . Фактически, подстановка амплитуд (5.6) в дисперсионное уравне-

ние после преобразований приводит к двум независимым уравнениям с (6×2) -матрицами, уже встречавшимися при доказательстве предложения (4.2). Таким образом, получаем следующую теорему о существовании запрещенных направлений и скоростей для волн Лэмба.

Теорема 5.1. В условиях предложения 5.1 не существует волны Лэмба, распространяющейся в направлении кристаллографических осей кубического кристалла.

Замечание 5.1. В формулировке теоремы 5.1 речь идет о невозможности распространения волны Лэмба при вполне определенном значении фазовой скорости, удовлетворяющей условию (5.4). При других значениях фазовой скорости, когда условие (5.4) нарушено, волны Лэмба вполне могут существовать.

С практической точки зрения интересен тот факт, что исчезновение волн Лэмба при определенных фазовых скоростях наблюдается у всех кубических кристаллов, компоненты тензора упругости которых удовлетворяют условию

$$\lambda + 2\mu > \eta$$

Действительно, при выполнении этого и условия положительной определенности (5.2) фазовая скорость, определяемая по (5.4), положительна и удовлетворяет условию (1.5).

Рассмотренному эффекту исчезновения волн Лэмба, распространяющихся в направлениях упругой симметрии кубических кристаллов, можно дать простую физическую интерпретацию, если заметить, что при фиксированных значениях констант упругости и плотности и значениях фазовой скорости, незначительно отличающихся от определенных по (5.4), жорданова нормальная форма матрицы $\mathbf{R}_6$ уже не содержит жордановых блоков, и волна Лэмба формируется шестью ПВ. При этом дисперсионное уравнение (4.3) распадается на уравнение, содержащее определитель четвертого порядка, и уравнение с определителем второго порядка, аналогичное уравнению (4.8). Последнее уравнение, как было установлено в предложении 4.2, не имеет нетривиальных решений. Более детальное рассмотрение первого уравнения показывает, что оно имеет нетривиальные решения всюду, за исключением точки c_0 , где фазовая скорость удовлетворяет условию (5.4), однако в окрестности этой точки при $c \rightarrow c_0$ собственные числа матрицы $\mathbf{R}_6$ и соответствующие амплитуды удовлетворяют условиям

$$\gamma_3 \rightarrow \gamma_1, \quad \gamma_4 \rightarrow \gamma_2 \tag{5.7}$$

$$m_3 \rightarrow m_1, \quad m_4 \rightarrow m_1$$

Здесь в соответствии с обозначениями (3.2) $\gamma_2 = \bar{\gamma}_1$ и $\gamma_4 = \bar{\gamma}_3$; аналогичные равенства имеют место для амплитуд. В то же время соответствующие корневые решения уравнения (4.2) при $c \rightarrow c_0$ удовлетворяют условиям

$$C_3 \rightarrow -C_1, \quad C_4 \rightarrow -C_2 \tag{5.8}$$

Объединение соотношений (5.7) и (5.8) показывает, что при $c \rightarrow c_0$, ПВ, домноженные на соответствующие коэффициенты, взаимно уничтожаются, что и приводит к исчезновению результирующей волны Лэмба.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lamb H. On waves in an elastic plate // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1917. V. 93. № 648. P. 114–128.
2. Strutt J.W. (Lord Rayleigh). On wave propagated along the plane surface of an elastic solid // Proc. London Math. Soc. 1885. V. 17. № 253. P. 4–11.
3. Stoneley R. Elastic waves at the surface of separation of two solids // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1924. V. 106. № 738. P. 416–428.

4. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 502 с.
5. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
6. Chimenti D.E. Lamb waves in microstructured plates // Ultrasonics. 1994. V. 32. № 4. P. 255–260.
7. Guo N., Cawley P. Lamb wave propagation in composite laminates and its relationship with acousto-ultrasonics // NDT & E Int. 1993. V. 26. № 2. P. 75–84.
8. Ermolov V., Luukkala M. Lamb wave propagation in magnetostrictive polycrystalline ferrite plates // J. Appl. Phys. 1993. V. 73. № 8. P. 4110–4112.
9. Zhu Q., Mayer W.G. On the crossing points of Lamb wave velocity dispersion curves // J. Acoust. Soc. America. 1993. V. 93. № 4. Pt 1. P. 1893–1895.
10. Freedman A. Comment on the crossing points of Lamb wave velocity dispersion curves // J. Acoust. Soc. America. 1995. V. 98. № 4. P. 2363–2364.
11. Chadwick P., Smith G.D. Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials // Advances in Applied Mechanics. N.Y.: Acad. Press, 1977. V. 17. P. 303–376.
12. Stroh A.N. Steady state problems in anisotropic elasticity // J. Math. Phys. 1962. V. 41. № 2. P. 77–103.
13. Barnett D.M., Lothe J. Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations, Greens functions, and surface waves in anisotropic elastic solids // Phys. Norv. 1973. V. 7. № 1. P. 13–19.
14. Gundersen S.A., Barnett D.M., Lothe J. Rayleigh wave existence theory: a supplementary remark // Wave Motion. 1987. V. 9. № 4. P. 319–321.
15. Ting T.C.T., Barnett D.M. Classifications of surface waves in anisotropic elastic materials // Wave Motion. 1997. V. 26. № 3. P. 207–218.
16. Hartman P. Ordinary Differential Equations. N.Y. etc.: Wiley, 1964. = Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
17. Bourbaki N. Elements de Mathématique. Livre II. Algèbre. Paris: Hermann, 1958. = Бурбаки Н. Элементы математики. Кн. 2. Алгебра. Модули, кольца, формы. М.: Наука, 1966. 555 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.VIII.2000