

УДК 531.36:534.113

© 2001 г. И.Ш. Ахатов, А.М. Ахтямов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДА ЗАКРЕПЛЕНИЯ СТЕРЖНЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ЕГО ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Рассматривается обратная задача отыскания характера закрепления одного из концов стержня, недоступного для непосредственного наблюдения, по собственным частотам его изгибных колебаний. Доказывается теорема единственности решения этой обратной задачи, и указывается метод восстановления неизвестных краевых условий. Получена приближенная формула для определения краевых условий по конечному набору собственных частот (допускается, что собственные частоты так же могут быть заданы приближенно с некоторой степенью точности); при этом использование именно первых отличных от нуля собственных частот оказывается существенным.

Рассматриваемая задача принадлежит к классу обратных задач и является вполне естественной задачей акустической диагностики, однако в такой постановке она не ставилась (см. [1–3]). Ранее [4] предлагалась близкая постановка задачи: можно ли, зная все собственные значения λ_n задачи

$$\Delta U + \lambda_n U = 0, \quad x \in \Omega; \quad U|_{\partial\Omega} = 0$$

определить форму области Ω ? В отличие от этого в настоящей работе ищется не форма области, а характер закрепления.

Сходные по постановке задачи возникали также в спектральной теории дифференциальных операторов, где требовалось восстановить коэффициенты дифференциального уравнения и краевых условий по набору собственных значений (подробнее см. [5–8]). Однако в этих работах в качестве данных восстановления краевых условий использовался не один спектр (как в предлагаемой работе), а несколько спектров или же другие дополнительные спектральные данные (например, спектральная функция, функция Вейля, или так называемые весовые числа). К тому же основной целью этих работ было восстановление коэффициентов в уравнении, а не в краевых условиях. Цель данной статьи – при известном дифференциальном уравнении восстановить часть краевых условий спектральной задачи по ее спектру.

Ранее [9] была рассмотрена задача определения краевого условия по конечному набору собственных значений. В отличие от этой задачи в настоящей работе требуется определить не одно, а два краевых условия, что требует других методов решения.

1. Постановка обратной задачи. Задача об изгибных колебаниях стержня с жестко защемленным правым концом заменой $u(x, t) = y(x) \cos(\omega t)$ сводится (см., например, [10] или [11]) к следующей спектральной задаче:

$$(\alpha y'')'' = \rho F \omega^2 y, \quad U_1(y, \omega) = 0, \quad U_2(y, \omega) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0 \quad (1.1)$$

Здесь $U_i(y, \omega) = \sum_{j=1}^4 a_{ij} y^{(j-1)}(0)$ ($i = 1, 2$) – линейные формы, характеризующие закрепление в точке $x = 0$ (на левом конце), а коэффициенты $a_{ij} = a_{ij}(\omega)$ полиномиально зависят от ω ; α – жесткость на изгиб, ρ – плотность, F – площадь сечения стержня.

Поставим к этой спектральной задаче обратную: по собственным частотам изгибных колебаний стержня найти неизвестные линейные формы $U_1(y, \omega)$, $U_2(y, \omega)$.

Переформулируем теперь обратную задачу в другой, более точной форме, считая α , ρ и F постоянными. Обозначим $\rho F \omega^2 / \alpha$ через λ^4 . В новых обозначениях задача (1.1) записывается следующим образом:

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \quad U_1(y, \lambda) = 0, \quad U_2(y, \lambda) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0 \quad (1.2)$$

где $U_i(y, \lambda) = \sum_{j=1}^4 a_{ij} y^{(j-1)}(0)$ ($i = 1, 2$), а коэффициенты $a_{ij} = a_{ij}(\lambda)$ полиномиально зависят от λ .

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов a_{ij} форм $U_1(y, \lambda)$ и $U_2(y, \lambda)$, через A , а ее миноры – через M_{ij} :

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}, \quad M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}$$

Отыскание форм $U_1(y, \lambda)$, $U_2(y, \lambda)$ равносильно нахождению линейной оболочки $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$, построенной на векторах $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})^T$ ($i = 1, 2$).

Были приведены различные случаи закрепления конца стержня [3, 10]: жесткое защемление

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

свободное опирание

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

свободный конец

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

плавающая заделка

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

пять разных видов упругого закрепления

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -c_2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -c_2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

сосредоточенный инерционный элемент на конце

$$A = \begin{vmatrix} -m\lambda^4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -c\lambda^4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Заметим, что во всех десяти случаях

$$M_{14} \equiv 0, \quad M_{23} \equiv 0 \quad (1.3)$$

Поэтому в терминах спектральной задачи (1.2) поставленная выше обратная задача формулируется следующим образом: коэффициенты a_{ij} форм $U_1(y, \lambda)$ и $U_2(y, \lambda)$ задачи

(1.2) – неизвестны; ранг матрицы A , составленной из этих коэффициентов, равен двум, миноры M_{14} и M_{23} этой матрицы тождественно равны нулю; известны отличные от нуля собственные значения λ_k задачи (1.2); требуется восстановить линейную оболочку $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ векторов $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})^T$ ($i = 1, 2$).

Условия (1.3) не ограничивают физическую постановку задачи, но они необходимы, поскольку без них нарушается единственность решения рассматриваемой обратной задачи (одному и тому же набору собственных значений в этом случае могут соответствовать различные линейные оболочки).

2. Единственность решения обратной задачи. Наряду с задачей (1.2) рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \quad \tilde{U}_1(y, \lambda) = 0, \quad \tilde{U}_2(y, \lambda) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0 \quad (2.1)$$

где $\tilde{U}_i(y, \lambda) = \sum_{j=1}^4 b_{ij} y^{(j-1)}(0)$ ($i = 1, 2$), $b_{ij} = b_{ij}(\lambda)$ – полиномы λ .

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов b_{ij} форм $\tilde{U}_1(y, \lambda)$ и $\tilde{U}_2(y, \lambda)$, через B , а ее миноры – через $\tilde{M}_{ij}$:

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{vmatrix}, \quad \tilde{M}_{ij} \equiv \begin{vmatrix} b_{1i} & b_{1j} \\ b_{2i} & b_{2j} \end{vmatrix}$$

Через $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, обозначим линейную оболочку векторов $\mathbf{b}_i = (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, b_{i4})^T$ ($i = 1, 2$).

Теорема о единственности решения обратной задачи. Пусть выполнены следующие условия:

$$\text{rank } A = \text{rank } B = 2 \quad (2.2)$$

$$M_{14} \equiv M_{23} \equiv \tilde{M}_{14} \equiv \tilde{M}_{23} \equiv 0 \quad (2.3)$$

Если отличные от нуля собственные значения $\{\lambda_k\}$ задачи (1.2) и отличные от нуля собственные значения $\{\tilde{\lambda}_k\}$ задачи (2.1) совпадают с учетом их кратностей, то совпадают и линейные оболочки $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ и $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$.

Доказательство. Заметим, что функции

$$\begin{aligned} y_1(x, \lambda) &= (\cos \lambda x + \text{ch } \lambda x) / 2 \\ y_2(x, \lambda) &= (\sin \lambda x + \text{sh } \lambda x) / (2\lambda) \\ y_3(x, \lambda) &= (-\cos \lambda x + \text{ch } \lambda x) / (2\lambda^2) \\ y_4(x, \lambda) &= (-\sin \lambda x + \text{sh } \lambda x) / (2\lambda^3) \end{aligned} \quad (2.4)$$

являются линейно независимыми решениями уравнения

$$y^{(4)}(x, \lambda) = \lambda^4 y(x, \lambda) \quad (2.5)$$

удовлетворяющими условиям

$$y_j^{(r-1)}(0, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq r, \\ 1 & \text{при } j = r, \end{cases} \quad j, r = 1, 2, 3, 4 \quad (2.6)$$

(другими словами, решения $y_j(x, \lambda)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) образуют фундаментальную систему Коши и выражаются через функции Крылова [3]).

Характеристическим определителем краевой задачи при $\lambda \neq 0$ является следующая функция:

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ y_1(1, \lambda) & y_2(1, \lambda) & y_3(1, \lambda) & y_4(1, \lambda) \\ y'_1(1, \lambda) & y'_2(1, \lambda) & y'_3(1, \lambda) & y'_4(1, \lambda) \end{vmatrix}$$

(здесь учтены условия (2.6)).

Применяя теорему Лапласа для вычисления определителей и используя тригонометрические формулы и равенства (2.4), а также условие (2.3) теоремы, получаем

$$\Delta(\lambda) \equiv M_{12} \frac{\xi^-(\lambda)}{2\lambda^4} + M_{13} \frac{\eta^+(\lambda)}{2\lambda^3} + M_{24} \frac{\eta^-(\lambda)}{2\lambda} + M_{34} \frac{\xi^+(\lambda)}{2} \quad (2.7)$$

$$\xi^\pm(\lambda) = 1 \pm \cos \lambda \operatorname{ch} \lambda, \quad \eta^\pm(\lambda) = -\sin \lambda \operatorname{ch} \lambda \pm \cos \lambda \operatorname{sh} \lambda$$

Отличные от нуля собственные значения задач (1.2), (2.1) являются корнями целой функции $\Delta(\lambda)$ (см. [12]).

Характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ помимо корней, совпадающих с отличными от нуля собственными значениями задачи, может иметь также корень $\lambda = 0$ конечной кратности.

Так как $\Delta(\lambda) \neq 0$, то из факторизационной теоремы Адамара (см. [13]) следует, что характеристические определители $\Delta(\lambda)$ задачи (1.2) и $\tilde{\Delta}(\lambda)$ задачи (2.1) связаны соотношением

$$\Delta(\lambda) \equiv C \lambda^k e^{a\lambda} \tilde{\Delta}(\lambda)$$

где a – некоторое действительное число, k – некоторое целое неотрицательное число, а C – некоторая отличная от нуля постоянная. Отсюда следует, что правая часть соотношения (2.7) при замене M_{ij} на $M_{ij} - C \lambda^k e^{a\lambda} \tilde{M}_{ij}$ тождественно равна нулю (тождество А).

Заметим, что число a в этом тождестве равно нулю. Действительно, предположим противное: $a \neq 0$. Тогда функции $\xi^\pm(\lambda)$ и $\eta^\pm(\lambda)$, а также эти же функции, умноженные на $e^{a\lambda}$, являются полиномиально независимыми. (Функции $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_n(\lambda)$ называем полиномиально независимыми, если их комбинация

$$P_1(\lambda)f_1(\lambda) + P_2(\lambda)f_2(\lambda) + \dots + P_n(\lambda)f_n(\lambda)$$

с произвольными полиномами $P_1(\lambda), P_2(\lambda), \dots, P_n(\lambda)$ тождественно равна нулю только в том случае, когда $P_k(\lambda) \equiv 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$.) Полиномиальная независимость этих функций следует из полиномиальной независимости соответствующих экспонент. Отсюда и из тождества А получим тождества

$$M_{12} \equiv \tilde{M}_{12} \equiv M_{13} \equiv \tilde{M}_{13} \equiv M_{24} \equiv \tilde{M}_{24} \equiv M_{34} \equiv \tilde{M}_{34} \equiv 0$$

которые в совокупности с тождествами (2.3) противоречат условию (2.2) теоремы.

Таким образом, $a = 0$. Отсюда и из тождества А в силу полиномиальной независимости соответствующих функций получаем

$$(M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34})^T \equiv C \lambda^k (\tilde{M}_{12}, \tilde{M}_{13}, \tilde{M}_{14}, \tilde{M}_{23}, \tilde{M}_{24}, \tilde{M}_{34})^T$$

что равносильно пропорциональности бивекторов $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$ и $\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2$.

Известно [14], что между классами пропорциональных, отличных от нуля бивекторов и двумерными подпространствами векторного пространства имеется естест-

венное биективное соответствие. В этом соответствии каждому подпространству отвечает внешнее произведение $x_1 \wedge x_2$ векторов произвольного его базиса x_1, x_2 , а каждому бивектору $x_1 \wedge x_2$ – подпространство $\langle x_1, x_2 \rangle$. Поэтому из последнего тождества следует $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Условия (1.3), как было отмечено выше, не ограничивают физическую постановку задачи, но являются существенными для единственности восстановления краевых условий. Действительно, краевые условия $y(0) = 0$, $y'''(0) = 0$ ($M_{14} = 1 \neq 0$) и $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$ ($M_{23} = 1 \neq 0$) не эквивалентны, но характеристические определители соответствующих спектральных задач (1.2) и (2.1) совпадают. Отсюда следует, что абстрактные краевые условия восстанавливаются по отличным от нуля собственным значениям соответствующей спектральной задачи неоднозначно.

3. Алгоритм определения краевых условий по собственным частотам. Выше было показано, что задача отыскания неизвестных линейных форм $U_1(y, \lambda)$, $U_2(y, \lambda)$ по собственным частотам изгибных колебаний стержня имеет единственное решение (в том смысле, что линейные оболочки, составленные из коэффициентов этих линейных форм, определяются однозначно). Следующий вопрос – как построить это решение.

Далее, поскольку приборы измерения собственных частот (спектрометры) не могут зафиксировать бесконечный набор частот системы и, кроме того, при измерении собственных частот возможны небольшие погрешности, то возникает также задача нахождения алгоритма приближенного определения вида закрепления стержня по конечному набору первых собственных частот, найденных с некоторой погрешностью.

Решению этих задач, построению точного и приближенного решений, и посвящен настоящий раздел.

Алгоритм определения линейных форм краевых условий поясняется при естественных физических предположениях, что коэффициенты c_1 и c_2 матрицы A являются неотрицательными. (В этом случае решение упрощается ввиду того, что $\lambda = 0$ не является собственным значением.)

Поскольку линейная оболочка $\langle a_1, a_2 \rangle$ находится по всем минорам второго порядка матрицы A с помощью известных методов линейной алгебры [14], то остается пояснить как определяются неизвестные миноры

$$M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34} \quad (3.1)$$

Из представления (2.7) следует, что $\Delta(\lambda)$ – четная целая функция первого порядка, причем если значение $\lambda_j > 0$ – корень этой функции, то значения $-\lambda_j$, $-i\lambda_j$, $i\lambda_j$ – также корни этой функции.

Отсюда и из факторизационной теоремы Адамара [13] следует, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1.2) допускает представление

$$\Delta(\lambda) \equiv K \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^4}{\lambda_j^4} \right) \quad (3.2)$$

где K – произвольная отличная от нуля постоянная, а λ_j – положительные собственные значения задачи (1.2).

Таким образом, если известны все положительные собственные значения λ_j задачи (1.2), то из представлений (2.7), (3.2) следует тождество относительно λ .

Идея метода приближенного определения вида краевых условий задачи о колебаниях стержня по первым s собственным значениям μ_j состоит в замене бесконечного произведения в правой части этого тождества конечным произведением. При этом собственные значения μ_j могут совпадать с точными собственными значениями λ_j лишь приближенно.

Таким образом, вместо рассматриваемого тождества можно записать приближенное тождество

$$M_{12} \frac{\xi^-(\lambda)}{2\lambda^4} + M_{13} \frac{\eta^+(\lambda)}{2\lambda^3} + M_{24} \frac{\eta^-(\lambda)}{2\lambda} + M_{34} \frac{\xi^+(\lambda)}{2} \approx K \prod_{j=1}^s \left(1 - \frac{\lambda^4}{\mu_j^4} \right) \quad (3.3)$$

Из соотношения (3.3) (или из точного тождества (3.2), (2.7), если ищется точное решение) с точностью до коэффициента могут быть найдены миноры (3.1), причем разными способами. Например, они могут быть найдены с помощью сопряженно би-ортогональной системы функций к системе функций

$$\frac{\xi^-(\lambda)}{2\lambda^4}, \quad \frac{\eta^+(\lambda)}{2\lambda^3}, \quad \frac{\eta^-(\lambda)}{2\lambda}, \quad \frac{\xi^+(\lambda)}{2}$$

в пространстве L_2 .

Однако более простыми в реализации оказываются два метода, основанные на получении из соответствующего тождества системы линейных алгебраических уравнений.

Первый из них демонстрирует, как найти точное значение миноров (3.1) по всему бесконечному набору собственных частот. Он основан на получении из точного тождества (3.2), (2.7) системы линейных алгебраических уравнений с хорошо обусловленной матрицей (понятие плохо и хорошо обусловленной матрицы см. [15]). Вторым применялся для отыскания приближенного решения и основан на получении из (3.3) неопределенной системы трех линейных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных.

Первый метод. Придавая параметру λ четыре различных конкретных значения z_k ($k = 1, 2, 3, 4$), получим систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных (3.1). Эта система может оказаться неопределенной или же плохо обусловленной. Такая ситуация возникает, в частности, если в качестве значений z_k выбрать сами собственные значения λ_k (соответствующий пример рассмотрен ниже в замечании 2).

Однако числа z_k ($k = 1, 2, 3, 4$) могут быть подобраны так, что соответствующая матрица системы будет определенной и хорошо обусловленной.

Наилучший набор чисел z_k ($k = 1, 2, 3, 4$), найденный авторами, следующий:

$$z_1 = 7,854757438, \quad z_2 = 5,82239, \quad z_3 = 3,98955, \quad z_4 = 3,72621 \quad (3.4)$$

Придавая параметру λ значения (3.4), получим систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных (3.1)

$$M_{12} \frac{\xi^-(z_k)}{2z_k^4} + M_{13} \frac{\eta^+(z_k)}{2z_k^3} + M_{24} \frac{\eta^-(z_k)}{2z_k} + M_{34} \frac{\xi^+(z_k)}{2} = K \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_k^4}{\lambda_j^4} \right) \quad (3.5)$$

где K – произвольная отличная от нуля постоянная. (Для определенности можно выбрать постоянную K , равную какому-либо числу.)

Из этой системы известными методами и находим миноры (3.1).

Этот же метод может быть использован для приближенного определения неизвестных (3.1) по первым s значениям $\mu_j \approx \lambda_j$ заменой бесконечного произведения конечным.

Однако для численного решения этот метод оказывается неэффективным. Авторами с помощью пакета MAPLE просчитаны различные виды закреплений левого конца стержня. Обобщая полученные данные, можно сказать, что для всех видов закрепления стержня при выборе чисел z_k ($k = 1, 2, 3, 4$) в виде (3.4) если величина s из (3.3) равна 100, а точность выбранных значений μ_j составляет $\varepsilon = 10^{-7}$, то бивектор M находится с гораздо меньшей точностью (в некоторых случаях – с точностью 10^{-3});

если же $s = 50$, точность вычисления каждой компоненты бивектора может составлять 10^{-2} , т.е. ухудшиться на пять порядков. Таким образом, для нахождения приближенного решения с помощью первого метода требуется знать огромное число собственных значений задачи, найденных с достаточно большой степенью точности. Это неприемлемо для практического применения. Более эффективен другой метод.

Второй метод. Подставим значения μ_j ($j = 1, 2, 3$), приближенно совпадающие с первыми тремя положительными собственными значениями задачи (1.2), в (3.3). Получим систему трех однородных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных (3.1)

$$M_{12} \frac{\xi^-(\mu_j)}{2\mu_j^4} + M_{13} \frac{\eta^+(\mu_j)}{2\mu_j^3} + M_{24} \frac{\eta^-(\mu_j)}{2\mu_j} + M_{34} \frac{\xi^+(\mu_j)}{2} \approx 0 \quad (3.6)$$

Полученная система имеет бесчисленное множество решений. Из доказанной теоремы единственности и приближенного тождества (3.3) (где величина s выбрана равной трем) следует, что неизвестные миноры (3.1) могут быть найдены приближенно с точностью до коэффициента. Таким образом, если μ_j ($j = 1, 2, 3$) отличаются от первых трех собственных значений незначительно, то полученная система должна иметь ранг 3 и решение, определенное с точностью до постоянной. Вычисления, выполненные в пакете MAPLE, подтверждают это. Неизвестные миноры находятся с точностью до постоянной. При этом порядок погрешности вычисления часто практически не отличается от порядка погрешности близости значений μ_j и λ_j и, лишь в некоторых случаях, может ухудшаться на четыре порядка. Главное же преимущество этого метода в том, что для его применения требуется использование только первых трех собственных частот.

Пример. Если $\mu_1 = 4,7300407$, $\mu_2 = 7,8532046$, $\mu_3 = 10,9956078$ – значения $(\rho F \omega_i^2 / \alpha)^{1/2}$, соответствующие первым трем собственным частотам ω_i , определенных спектрометром, то решение системы (3.6), найденное с точностью до постоянной, имеет вид

$$M_{12} = 1, \quad M_{13} = 0.91 \cdot 10^{-8}, \quad M_{24} = -0.94 \cdot 10^{-10}, \quad M_{34} = -0.13 \cdot 10^{-7} \quad (3.7)$$

Кроме того, по условию задачи $M_{14} = 0$, $M_{23} = 0$.

Найдем линейную оболочку, соответствующую этим минорам. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ – произвольный вектор искомой линейной оболочки $\langle a_1, a_2 \rangle$. Тогда координаты вектора x удовлетворяют условию

$$\text{rank} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 2 \quad (3.8)$$

Поскольку

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

то условие (3.8) эквивалентно обращению в нуль обоих окаймляющих M_{12} миноров.

Разлагая соответствующие определители по третьей строке, получаем

$$x_1 M_{23} - x_2 M_{13} + x_3 M_{12} = 0, \quad x_1 M_{24} - x_2 M_{14} + x_4 M_{12} = 0$$

Подставим в эти равенства значения M_{ij} (3.7). Значения M_{13} и M_{24} можно считать равными нулю (степень точности равна 10^{-7} , т.е. довольно высока). Поэтому можно считать, что $x_3 = 0$ и $x_4 = 0$, а произвольный вектор искомой линейной оболочки имеет вид $x = (x_1, x_2, 0, 0)^T$.

В качестве базисных векторов этой линейной оболочки можно выбрать, например, векторы

$$a_1 = (1, 0, 0, 0)^T \quad \text{и} \quad a_2 = (0, 1, 0, 0)^T$$

Следовательно, искомые краевые условия имеют вид

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Это означает, что недоступный для непосредственного наблюдения левый конец стержня жестко зажат.

Заметим, что закрепление конца стержня определено верно. Числа μ_1, μ_2, μ_3 , приведенные выше, приближенно совпадают с первыми тремя корнями уравнения

$$1 - \cos \lambda \operatorname{ch} \lambda = 0$$

Точность приближения равна 10^{-7} .

Замечание 2. Насколько существенно для приближенного восстановления краевых условий использование именно первых отличных от нуля собственных значений? Быть может, для восстановления краевых условий достаточно использовать произвольный конечный набор собственных значений (собственных частот)? Приведем пример, который показывает, что даже использование в качестве данных восстановления бесконечного набора отличных от нуля собственных значений еще не гарантирует единственности восстановления краевых условий.

Собственные значения задачи

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0 \quad (3.9)$$

начиная с седьмого (см. [3, 16]), практически совпадают с числами $\lambda_k = (k + \frac{1}{2})\pi$, а собственные значения задачи

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0 \quad (3.10)$$

начиная с седьмого, практически совпадают с числами $\tilde{\lambda}_k = (k - \frac{1}{2})\pi$.

Следовательно, множества $\{\lambda_{k-1}\}$ и $\{\tilde{\lambda}_k\}$ практически совпадают на бесконечном множестве чисел $\{(k + \frac{1}{2})\pi\}$ ($k = 8, 9, \dots$). Однако соответствующие краевые условия существенно различны.

Вычисления, выполненные с помощью пакета MAPLE, приводят к тем же результатам. Если в систему (3.6) подставить вместо μ_j сотый, сто первый и сто второй корни уравнения

$$1 + \cos \mu \operatorname{ch} \mu = 0$$

найденные с точностью 10^{-7} , то искомые миноры, вычисленные компьютером, с точностью до постоянной имеют вид

$$M_{12} = 1, \quad M_{13} = -0.58 \cdot 10^{-8}, \quad M_{24} = 0.53 \cdot 10^{-13}, \quad M_{34} = -0.95 \cdot 10^{-10}$$

Эти миноры соответствуют не искомым краевым условиям задачи (3.10), а краевым условиям задачи (3.9).

Таким образом, для единственности восстановления краевых условий существенно использование именно первых отличных от нуля собственных значений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00068).

ЛИТЕРАТУРА

1. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 206 с.
2. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 295 с.
3. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
4. Кас М. Can one hear the shape of a drum? // Amer. Math. Monthly. 1966. V. 73. № 4. P. 1–23.
5. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertanfrage. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte // Acta Math. 1946. V. 78. № 1. S. 1–96.
6. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984. 240 с.
7. Садовничий В.А. Единственность решения обратной задачи для уравнения второго порядка

- с нераспадающимися краевыми условиями // Вест. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1974. № 1. С. 143–151.
8. Юрко В.А. Обратная задача для дифференциальных операторов. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1989. 174 с.
 9. Ахтямов А.М. Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1127–1128.
 10. Collatz L. Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft Geest and Porting K.-G, 1963. = Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 503 с.
 11. Strutt W. (Lord Rayleigh). The theory of sound. V. 1. L.: Macmillan, 1929. = Стрэтт Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1940. 499 с.
 12. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
 13. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
 14. Постников М.М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1979. 312 с.
 15. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 734 с.
 16. Timoshenko S. Vibration Problems in Engineering. Toronto, etc.: D. Van Nostrand Company, 1955. = Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.

Уфа

Поступила в редакцию
4.II.2000

e-mail: iskander@anrb.ru
akhtyamovam@ic.bashedu.ru