

УДК 539.3

© 2001 г. И.Г. Горячева, Ю.Ю. Маховская

АДГЕЗИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГИХ ТЕЛ

Дается единая постановка и метод решения осесимметричной задачи о взаимодействии упругих тел при наличии адгезии различной природы, вызванной их поверхностной энергией или присутствием в зоне контакта менисков жидкости. Рассматриваются случаи как соприкосновения тел, так и отсутствия контакта. Показано, при каких значениях параметров зависимость нагрузки от изменения расстояния между телами является неоднозначной. Аналитически и численно изучается потеря энергии в цикле уменьшение – увеличение расстояния между телами в зависимости от основных параметров задачи.

В контактных задачах в классической постановке предполагается наличие сжимающих напряжений в области контакта и нулевых – на свободной поверхности взаимодействующих тел. При этом учитываются только силы отталкивания между поверхностями. Реальный потенциал взаимодействия твердых тел имеет как участок отталкивания, так и притяжения (адгезии), что связано с наличием поверхностной энергии. Учет сил притяжения приводит к появлению растягивающих напряжений на границе контактирующих тел.

Постановка и аналитическое решение контактных задач для сферических упругих тел с учетом их поверхностной энергии предлагались при использовании различных упрощенных форм потенциала взаимодействия [1–4]. Проведен численный анализ взаимодействия упругих тел с потенциалом Леннарда – Джонса в точной форме [5]. Была выявлена неоднозначная зависимость силы взаимодействия между телами от расстояния между ними, что говорит о необратимости процесса сближения тел и потере энергии в цикле уменьшение – увеличение расстояния между телами.

Поверхностной энергией обладают не только твердые тела, но и покрывающие их жидкие пленки. Это может приводить к образованию менисков в зазоре между контактирующими телами, которые вызывают притяжение поверхностей – капиллярную адгезию. Были рассмотрены задачи о контакте упругих тел с учетом капиллярной адгезии и рассчитаны распределение контактных давлений, размер области контакта и другие характеристики [6–8].

1. Постановка задачи. Рассмотрим взаимодействие двух упругих тел, обладающих поверхностной энергией. Полагаем, что тела осесимметричны и форма их поверхности описывается степенной функцией

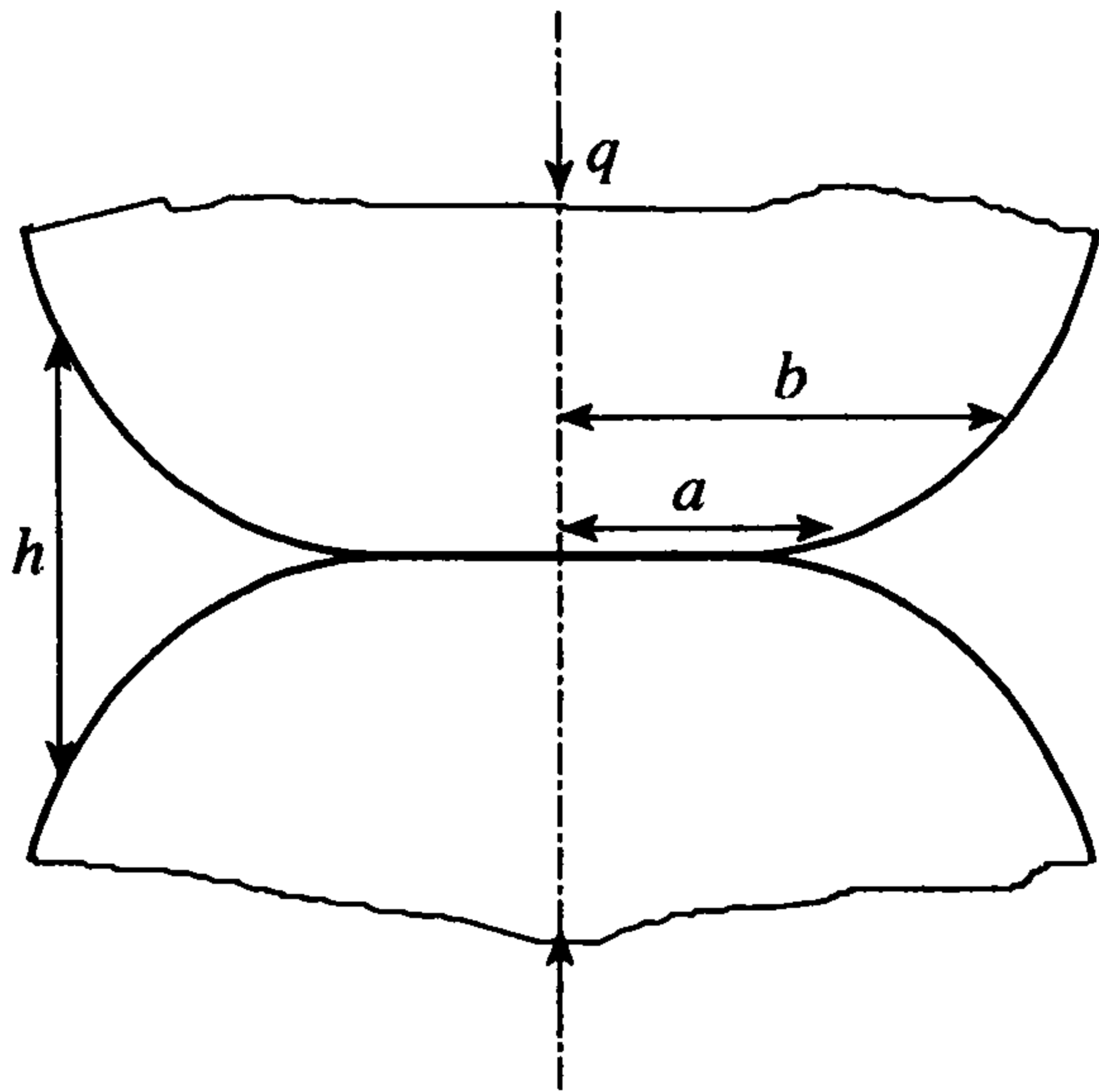
$$f(r) = f_1(r) + f_2(r) = Ar^{2n}$$

Тела прижаты друг к другу внешней силой q .

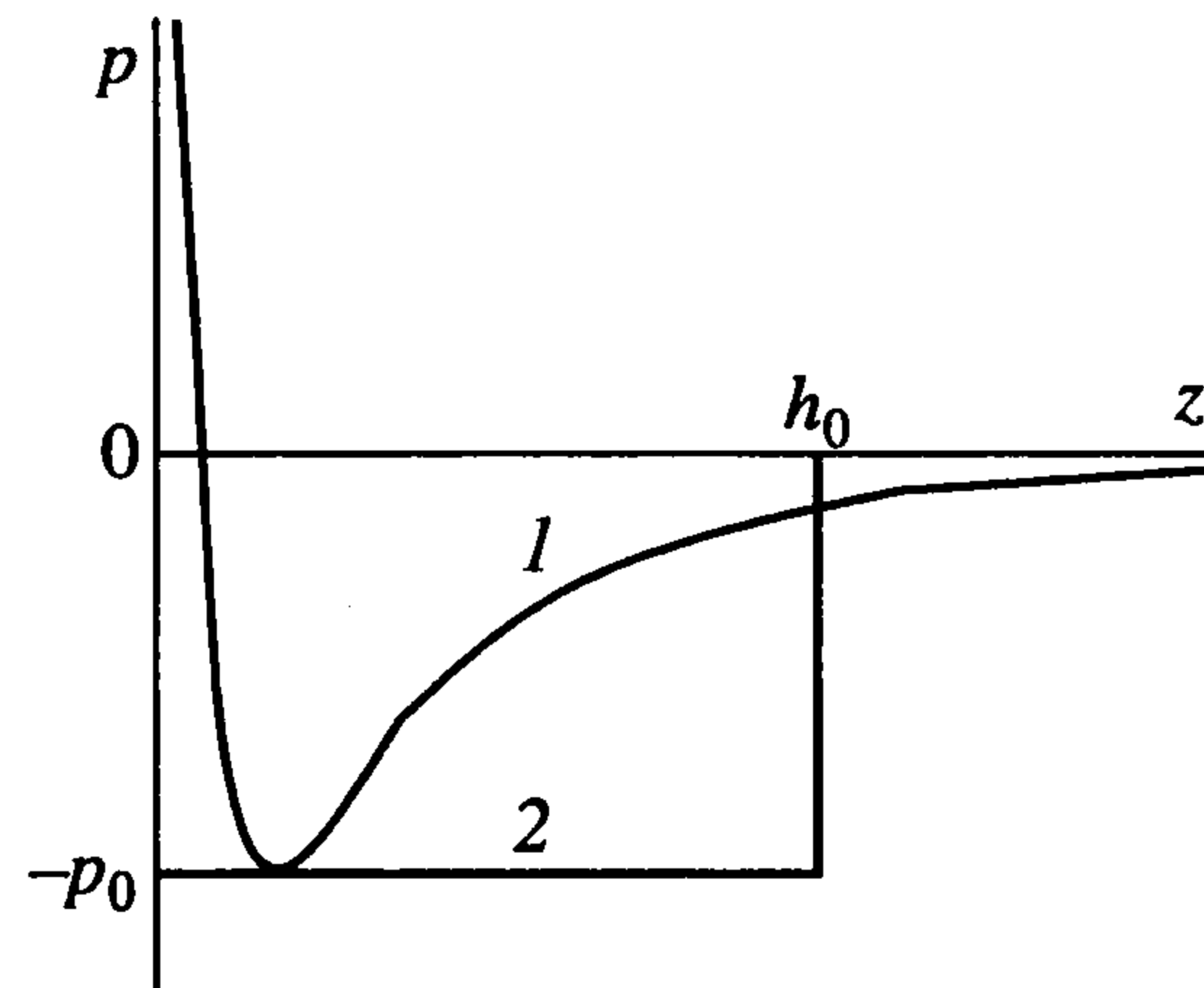
Величина зазора между поверхностями $h(r)$ определяется выражением

$$h(r) = f(r) + u(r) + d \tag{1.1}$$

где $u(r) = u_1(r) + u_2(r)$ – суммарное нормальное смещение поверхностей взаимодействующих тел за счет их деформирования, d – изменение расстояния между двумя фиксированными точками взаимодействующих тел, расположенными на оси симмет-



Фиг. 1



Фиг. 2

рии тел и удаленными от контактной поверхности, в результате деформирования тел. При $h(0) > 0$ тела не соприкасаются и величина d положительна. При $h(0) = 0$ имеет место контакт поверхностей внутри области $\Omega_c = \{r \leq a\}$ (фиг. 1), включая точечный контакт при $a = 0$, при этом величина d может быть как положительной, так и отрицательной.

Чтобы учесть поверхностную энергию взаимодействующих тел, рассмотрим область

$$\Omega_a = \begin{cases} 0 \leq r \leq b, & h(0) > 0 \\ a \leq r \leq b, & h(0) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

где b – некоторое расстояние, $b \geq a$. Будем считать, что внутри этой области к взаимодействующим поверхностям приложено постоянное отрицательное давление $-p_0$, обусловленное их поверхностной энергией.

Следовательно, имеем контактную задачу с граничными условиями

$$p(r) = -p_0, \quad r \in \Omega_a; \quad h(r) = 0, \quad r \in \Omega_c \quad (1.3)$$

Последнее условие представляет собой условие контактирования и имеет место только в случае контакта поверхностей ($h(0) = 0$). В отсутствие контакта поверхностей ($h(0) > 0$) второе условие (1.3) не входит в систему уравнений, описывающих задачу.

Кроме того, во всех случаях выполняется условие равновесия

$$q = 2\pi \int_0^b r p(r) dr \quad (1.4)$$

Необходимо также задать условия для определения величин p_0 и h , которые описывают адгезионное взаимодействие поверхностей. В рамках поставленной задачи могут быть рассмотрены два вида взаимодействия тел с учетом поверхностной энергии.

Адгезия сухих поверхностей. Пусть молекулярное взаимодействие поверхностей описывается потенциалом Леннарда – Джонса (см. фиг. 2, кривая 1). Следуя известному методу [1], аппроксимируем эту зависимость кусочно-постоянной функцией в форме ступеньки (кривая 2). Тогда величина $-p_0$ имеет смысл высоты этой ступеньки, а поверхностная энергия определяется соотношением

$$\gamma = \int_0^\infty p(z) dz = p_0 h_0$$

откуда получается условие для определения b

$$h(b) = \gamma/p_0 \quad (1.5)$$

Параметры потенциала взаимодействия γ и p_0 считаются заданными.

Капиллярная адгезия. Пусть в зазоре между телами находится жидкость, образующая мениск, который занимает область Ω_a . Тогда равномерное давление $-p_0$, действующее на поверхности в этой области, представляет собой капиллярное давление под искривленной поверхностью жидкости, определяемое формулой Лапласа. Если угол смачивания равен нулю и $b/l \ll 1$ ($l = (2A)^{-1/(2n-1)}$ – характерный размер взаимодействующих тел), то выражение для капиллярного давления сводится к виду [8]

$$p_0 = 2\sigma/h(b)$$

где σ – поверхностное натяжение жидкости. Вводя обозначение $\gamma = 2\sigma$, получим выражение, совпадающее по форме с (1.5). Величина p_0 в данном случае является неизвестной. Условием для ее определения служит задание объема жидкости ν в мениске, который связан с геометрией зазора соотношением

$$\nu = \int_{\Omega_a} rh(r) dr d\varphi \quad (1.6)$$

Таким образом, для описания адгезионного взаимодействия необходимо задать величины γ и p_0 для сухих поверхностей и величины γ и ν при наличии мениска.

Для описания упругих свойств взаимодействующих тел воспользуемся соотношением между нормальными смещениями $u(r)$ поверхностей и нормальными давлениями $p(r)$, которое справедливо для осесимметричного контакта упругих тел [9]

$$u(r) = \frac{4}{\pi E^*} \int_0^b p(r') \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r' dr'}{r+r'}, \quad 0 \leq r \leq b \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$$

E_i и ν_i ($i = 1, 2$) – соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона взаимодействующих тел, $\mathbf{K}(x)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Итак, задача об адгезии сухих поверхностей определяется системой уравнений (1.1)–(1.5) и (1.7), а задача о капиллярной адгезии – системой уравнений (1.1)–(1.6) и (1.7).

2. Вывод основных соотношений. Случай отсутствия контакта. Адгезионное взаимодействие сухих поверхностей при отсутствии контакта описывается уравнениями (1.1)–(1.5) и (1.7), исключая последнее условие (1.3). После подстановки первого условия (1.3) в соотношение (1.7) и взятия интеграла получим [10]

$$u(\rho) = -\frac{4p_0b}{\pi E^*} \begin{cases} \mathbf{E}(\rho), & \rho \leq 1 \\ \rho[\mathbf{E}(1/\rho) - (1 - 1/\rho^2)\mathbf{K}(1/\rho)], & \rho > 1; \rho = r/b \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{E}(x)$ – полный эллиптический интеграл второго рода.

Величина зазора $h(r)$ находится путем подстановки выражения (2.1) для упругих смещений в соотношение (1.1). В результате получим

$$h(r) = d - \frac{4p_0b}{\pi E^*} b \mathbf{E} \left(\frac{r}{b} \right) + Ar^{2n} \quad (2.2)$$

При учете соотношения (2.2) выражение (1.5) запишем в виде

$$p_0 \left(d - \frac{4p_0b}{\pi E^*} + Ab^{2n} \right) = \gamma \quad (2.3)$$

Кроме того, из уравнения равновесия (1.4) следует

$$q = -\pi b^2 p_0 \quad (2.4)$$

Соотношения (2.3) и (2.4) позволяют определить силу q , приложенную к телам, и величину d в зависимости от величины b , представляющей собой радиус области, в которой действует адгезионное давление $-p_0$. Полученное решение применимо при $b \leq b^*$. Величина b^* соответствует состоянию, при котором поверхности соприкасаются в одной точке ($h(0) = 0$). Из равенства (2.2) при условии $h(0) = 0$ и (2.3) получим уравнение для определения b^*

$$\frac{2(\pi - 2)p_0 b}{\pi E^*} + A b^{2n} = \frac{\gamma}{p_0} \quad (2.5)$$

В случае капиллярной адгезии к полученным соотношениям нужно добавить условие постоянства объема жидкости (1.6) и учесть, что величина p_0 , которая в данном случае описывает давление в жидкости, теперь не задана, а является одной из неизвестных величин. Подставляя выражение для зазора (2.2) в условие (1.6), после интегрирования получим

$$v = \pi d b^2 - \frac{16}{3E^*} p_0 b^3 + \frac{\pi}{n+1} A b^{2n+2} \quad (2.6)$$

Уравнения (2.3), (2.4) и (2.6) служат для определения силы q , величины d и давления в жидкости p_0 в зависимости от радиуса b области, занятой жидкостью, в отсутствие контакта ($b < b^*$). Для того, чтобы определить радиус b^* , соответствующий точечному контакту в случае капиллярной адгезии, необходимо решить систему уравнений (2.5) и (2.6) относительно p_0 и b .

Случай контакта поверхностей. Для решения системы уравнений (1.1)–(1.5) и (1.7) используем метод, изложенный ранее [8]. В результате получаем следующие соотношения:

для силы, приложенной к взаимодействующим телам

$$q = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} 4E^* A n a^{2n+1} - 2p_0 b^2 (\varphi + c\sqrt{1-c^2}), \quad c = \frac{a}{b} \quad (2.7)$$

для изменения расстояния между телами

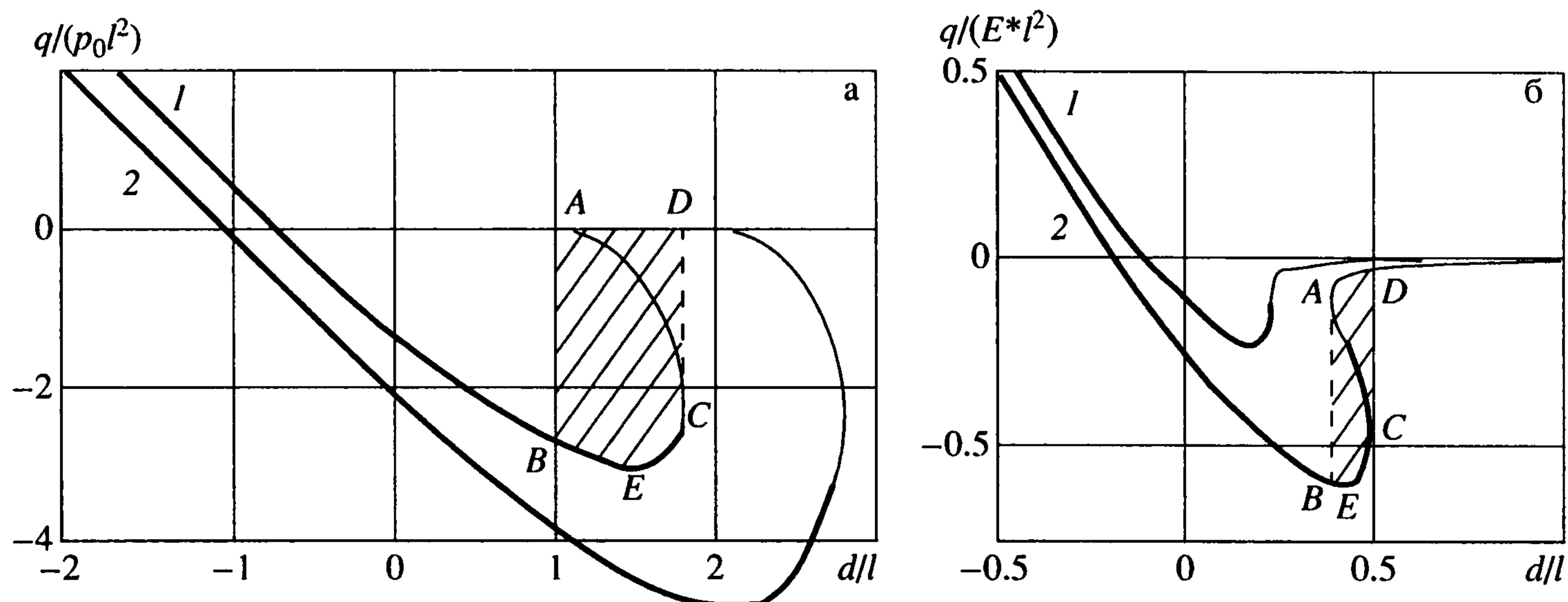
$$d = -\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} A a^{2n} + \frac{2p_0 b}{E^*} \sqrt{1-c^2} \quad (2.8)$$

а также уравнение, связывающее радиус a области контакта и внешний радиус b области, по которой действует адгезионное давление $-p_0$

$$\begin{aligned} & \frac{2Aa^{2n}}{\pi} \left\{ \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} - \frac{1}{c^{2n}} \right] \varphi + \sqrt{\frac{1}{c^2} - 1} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} c^{-2(n-k)} \right\} p_0 + \\ & + \frac{4b}{\pi E^*} \{1 - c - \sqrt{1-c^2} \varphi\} p_0^2 + \gamma = 0, \quad \varphi = \arccos c \end{aligned} \quad (2.9)$$

При заданной величине b это уравнение решается численно относительно a , после чего, согласно соотношениям (2.7) и (2.8), определяются сила q , действующая на тела, и величина d .

Решение задачи о капиллярной адгезии также определяется соотношениями (2.7)–(2.9) и, кроме того, условием постоянства объема жидкости (1.6), которое ме-



Фиг. 3

тодом, изложенным ранее [8], приводится к виду

$$v = 2Aa^{2n+2} \left\{ \sqrt{\frac{1}{c^2} - 1} \left[\frac{(2n)!!(2n-1)}{(2n+1)!!} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} c^{-2(n-k)} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{c^2} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} - \frac{1}{c^{2n}} \frac{1}{n+1} \right] \varphi \right\} - \frac{4p_0 b^3}{3E^*} [4 - 3c - c^3 - 3\sqrt{1-c^2} \varphi] \quad (2.10)$$

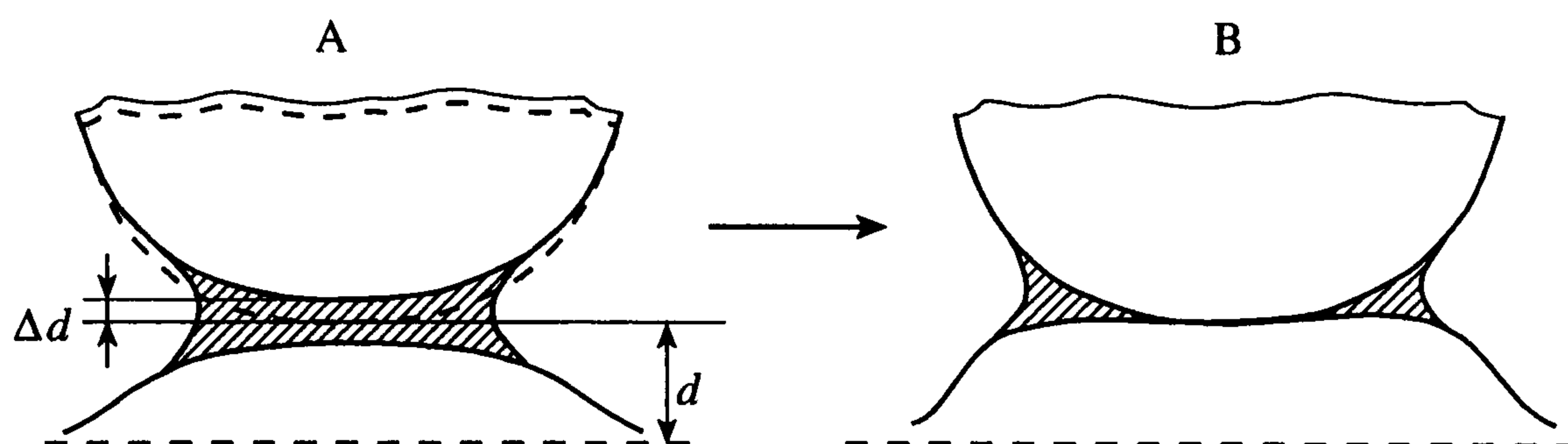
Уравнения (2.9) и (2.10) служат для определения радиуса области контакта a и величины давления в жидкости p_0 при заданном внешнем радиусе b области, занятой жидкостью. После этого, согласно соотношениям (2.7) и (2.8), определяются q и d .

Заметим, что уравнение (2.9) при $a = 0$ совпадает с уравнением (2.5) для определения величины b^* , соответствующей точечному контакту поверхностей.

Таким образом, решение задачи об адгезии сухих поверхностей определяется соотношениями (2.3) и (2.4) при отсутствии контакта ($b < b^*$) и соотношениями (2.7)–(2.9) при наличии контакта поверхностей ($b > b^*$), а величина b^* находится из уравнения (2.5). Решение задачи о капиллярной адгезии дается соотношениями (2.3), (2.4) и (2.6) при отсутствии контакта и соотношениями (2.7)–(2.10) при наличии контакта; величина b^* , соответствующая точечному контакту, находится из решения системы уравнений (2.5) и (2.6).

3. Анализ зависимости нагрузки от изменения расстояния между телами. Полученные соотношения используются для анализа зависимости силы q , приложенной к взаимодействующим телам, от величины d , характеризующей изменение расстояния между ними. При этом в задаче об адгезии сухих поверхностей заданными величинами считаются параметры A и n , определяющие форму поверхностей, приведенный модуль упругости E^* и характеристики потенциала адгезионного взаимодействия поверхностей p_0 и γ . В случае капиллярной адгезии заданными являются величины A , n , E^* и $\gamma = 2\sigma$, а также объем v жидкости в мениске.

На фиг. 3, а приведены графики безразмерной нагрузки $q/(p_0 l^2)$ ($l = (2A)^{-1/(2n-1)}$ – характерный размер взаимодействующих поверхностей) от безразмерной величины d/l для случая адгезии сухих поверхностей при $n = 2$, $E^*/p_0 = 1$. Толстые линии соответствуют контакту поверхностей, а тонкие – отсутствию контакта. Кривые 1 и 2 построены для $\gamma/(p_0 l) = 1$ и $\gamma/(p_0 l) = 2$ соответственно. Анализ решения показывает, что зависимость нагрузки от изменения расстояния между телами имеет неоднозначный характер при любых значениях параметров. Данные результаты аналогичны полученным ранее [1] для случая контакта параболического штампа с упругим полупространством ($n = 1$).



Фиг. 4

На фиг. 3,б представлены аналогичные зависимости безразмерной нагрузки $q/(E^*l^2)$ от величины d/l для случая капиллярной адгезии при $n = 2$, $\nu/l^3 = 0.05$. Кривая 1 соответствует значению $\gamma/(E^*l) = 0.05$, кривая 2 – значению $\gamma/(E^*l) = 0.1$. В данном случае кривые также имеют неоднозначный характер, однако, начиная лишь с некоторого значения безразмерного поверхностного натяжения $\gamma/(E^*l)$.

Зависимости, представленные на фиг. 3, позволяют изучить процесс уменьшения и последующего увеличения расстояния между телами при наличии адгезии. Рассмотрим кривую 1 на фиг. 3, а и кривую 2 на фиг. 3, б. Если контакт осуществляется при контролируемой (монотонно уменьшаемой) нагрузке q , то при достижении этой нагрузки минимального значения $q_{\min}$ (точка E) произойдет скачкообразный отрыв поверхностей в случае как сухих поверхностей, так и капиллярной адгезии при любых значениях параметров. При этом в момент отрыва имеет место контакт поверхностей по конечной области. Если взаимодействие происходит при контролируемой (монотонно увеличиваемой) величине d , то при достижении точки C происходит скачкообразный переход в точку D . И обратно, при уменьшении величины d происходит скачок из точки A в точку B . Заметим, что точки A и D всегда соответствуют отсутствию контакта между поверхностями, в то время как точки B и C могут соответствовать как случаю контакта, так и отсутствия контакта поверхностей. Следовательно, возможно скачкообразное разрушение контакта и вступление поверхностей в контакт. Последний процесс иллюстрируется на фиг. 4 для случая капиллярной адгезии при контакте штампа с упругим полупространством.

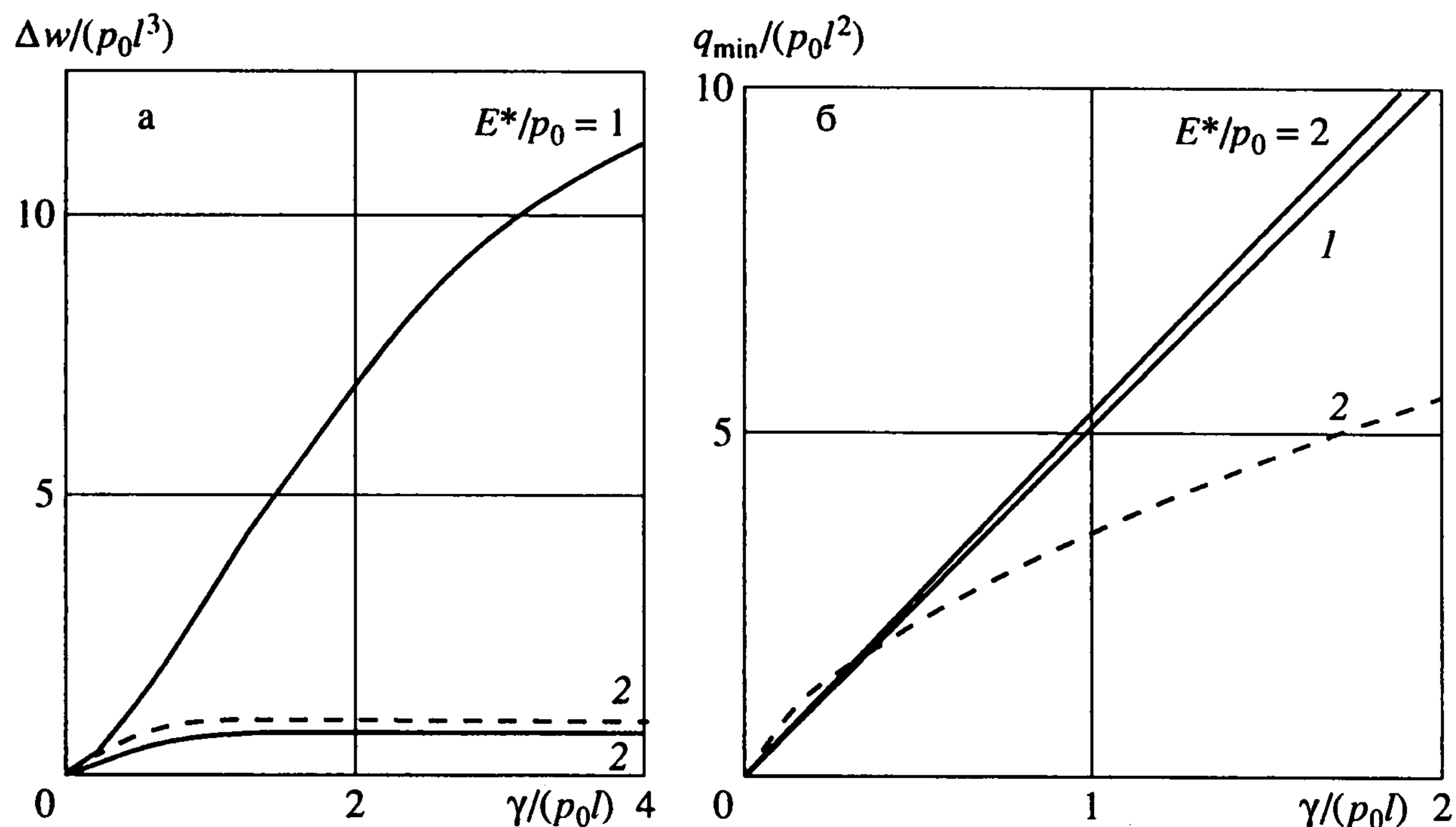
Таким образом, из рассмотрения цикла уменьшение – увеличение расстояния между телами следует, что работа, совершаемая внешней силой при сближении поверхностей, не равна работе, совершаемой телами при их удалении друг от друга. Соответствующая потеря энергии определяется площадью заштрихованных областей на фиг. 3

$$\Delta w = \int_{ABCD} q(d) dd \quad (3.1)$$

Полученные зависимости нагрузки от изменения расстояния между телами позволяют исследовать величины потери энергии Δw и силы отрыва поверхностей $q_{\min}$.

Зависимости безразмерной потери энергии $\Delta w/(p_0 l^3)$ и силы отрыва $q_{\min}/(p_0 l^2)$ от безразмерной поверхностной энергии $\gamma/(p_0 l)$ представлены на фиг. 5, а и б соответственно для случая адгезии сухих поверхностей ($n = 1$, сплошные кривые). Результаты показывают, что при увеличении поверхностной энергии потеря энергии увеличивается и при некотором значении $\gamma/(p_0 l)$ выходит на постоянную. Потеря энергии $\Delta w/(p_0 l^3)$ больше для меньших значений E^*/p_0 , т.е. для более мягких тел. Сила отрыва $q_{\min}/(p_0 l^2)$, напротив, увеличивается с увеличением E^*/p_0 . Для сравнения приведены также зависимости для другой формы взаимодействующих тел ($n = 2$) и $E^*/p_0 = 2$ (штриховые кривые).

На фиг. 6 приведены зависимости безразмерной потери энергии $\Delta w/(E^* l^3)$ от безразмерного поверхностного натяжения $\gamma/(E^* l)$ для случая капиллярной адгезии



Фиг. 5

($n = 1$, сплошные кривые). Потеря энергии отлична от нуля только начиная с некоторого значения безразмерного поверхностного натяжения и возрастает неограниченно при увеличении этого параметра. Кроме того, величина $\Delta w/(E^* l^3)$ тем больше, чем меньше объем жидкости в мениске. Приведена также зависимость для другой формы поверхностей ($n = 2$) и $\nu/l^3 = 0.05$ (штриховая кривая).

Случай параболических тел. Случай $n = 1$ соответствует взаимодействию поверхностей параболической формы, причем величина l имеет смысл их приведенного радиуса: $l \equiv R = (R_1^{-1} + R_2^{-1})^{-1}$.

Анализ полученного решения задачи об адгезионном взаимодействии сухих поверхностей показывает, что в этом случае зависимость между безразмерной нагрузкой Q и безразмерной величиной D , определяемыми соотношениями

$$Q = \frac{q}{\pi R \gamma}, \quad D = d \left(\frac{16 E^{*2}}{9 \pi^2 \gamma^2 R} \right)^{1/3} \quad (3.2)$$

описывается единственным параметром λ

$$\lambda = p_0 \left(\frac{9 R}{2 \pi \gamma E^{*2}} \right)^{1/3}$$

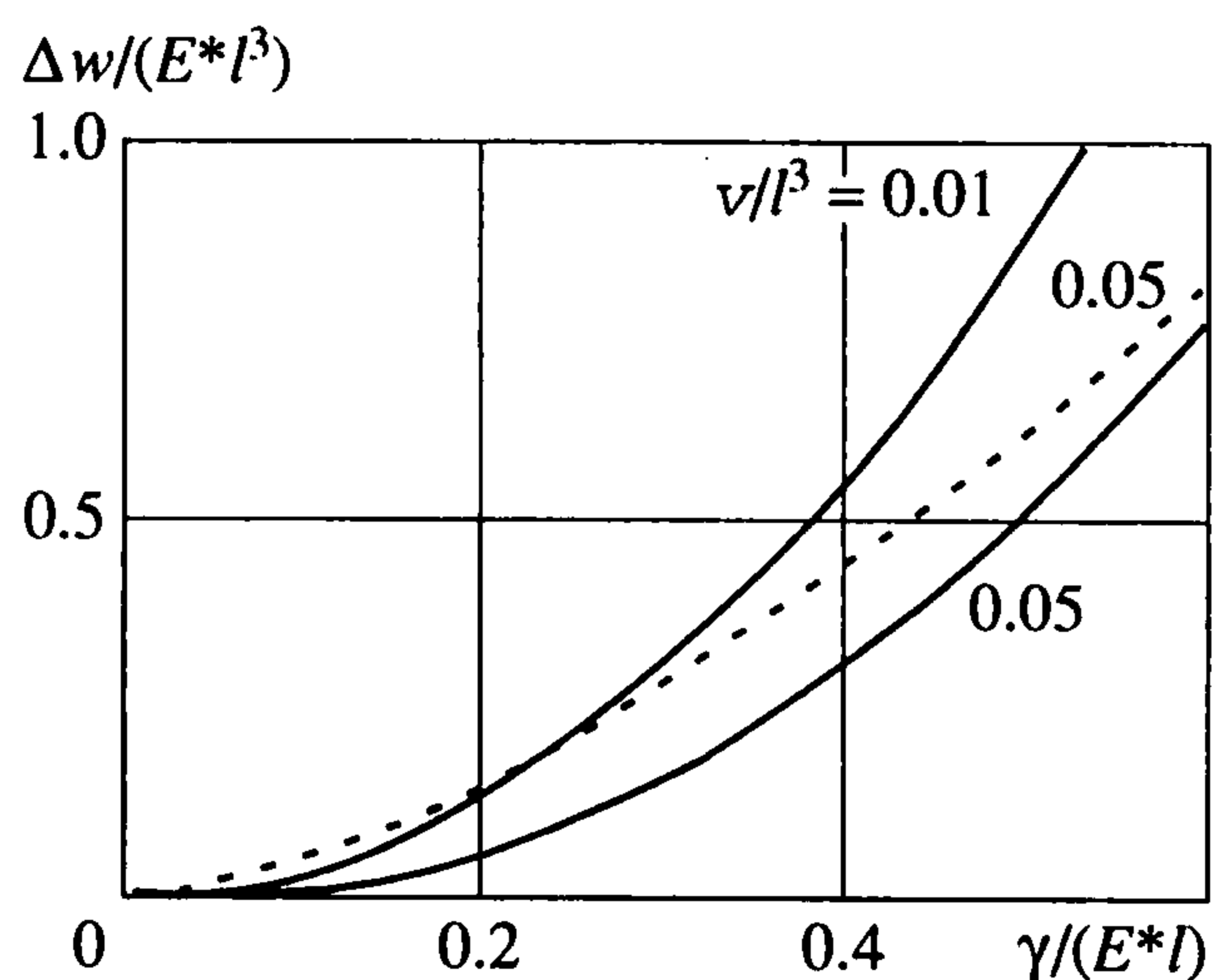
впервые введенным Тейбором [11]. Этот параметр использовался также [1] при анализе эффекта адгезии в контакте сухих поверхностей.

Работа в цикле уменьшение – увеличение расстояния между телами, представленная в безразмерном виде как

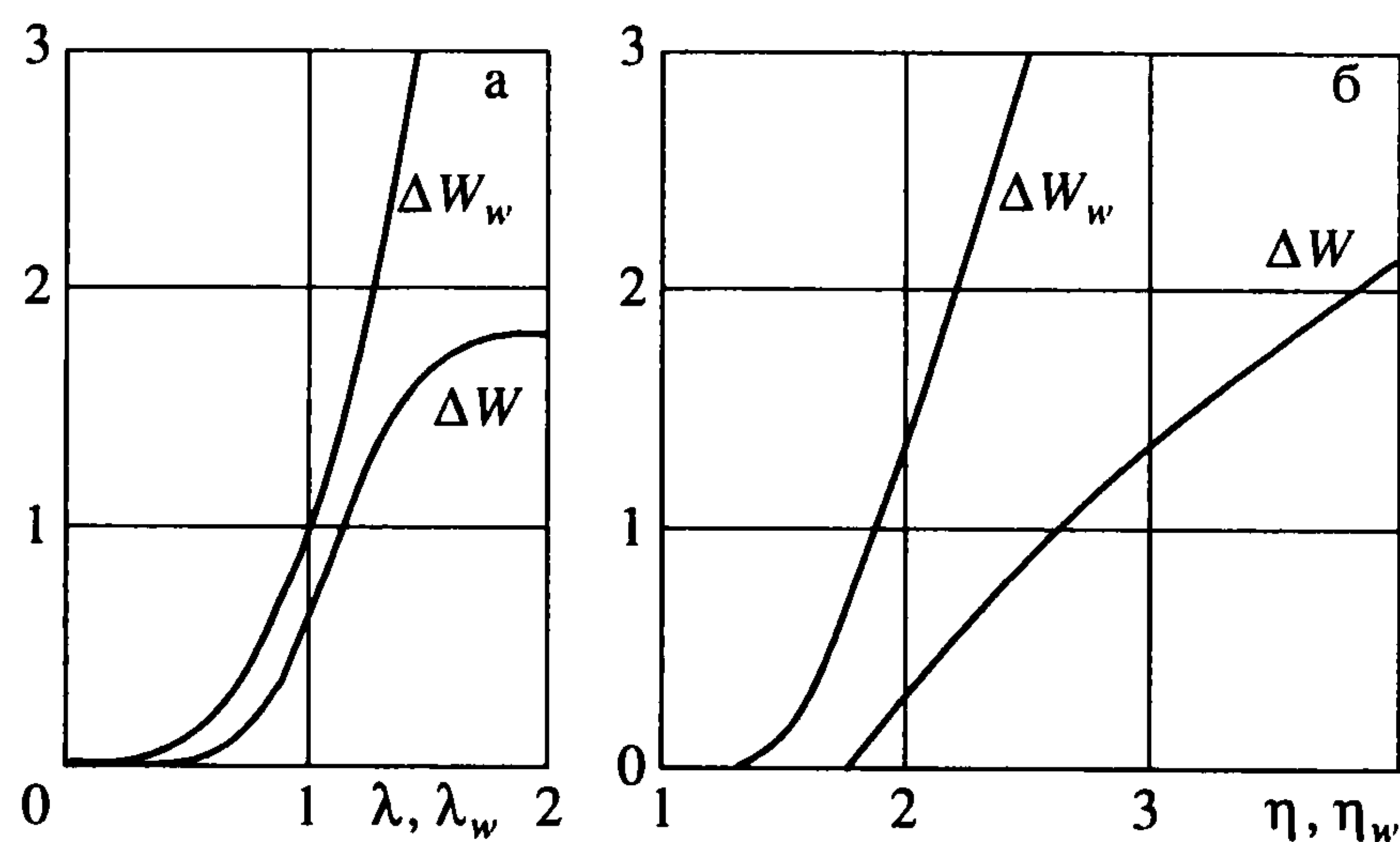
$$\Delta W = \Delta w \left(\frac{16 E^2}{9 \pi^5 \gamma^5 R^4} \right)^{1/3} \quad (3.3)$$

при $n = 1$ является функцией одной переменной λ . График функции $\Delta W(\lambda)$ показан на фиг. 7, а. Соотношения (2.3), (2.4) и (2.7), (2.9), определяющие решение задачи об адгезионном взаимодействии сухих поверхностей, при $n = 1$ упрощаются и позволяют найти точное аналитическое выражение для функции $\Delta W(\lambda)$:

$$\Delta W = \frac{8704}{243 \pi^3} \lambda^5 \quad \text{при} \quad 0 \leq \lambda < \lambda_0 = \left(\frac{9}{32} \right)^{1/3}$$



Фиг. 6



Фиг. 7

При $\lambda \rightarrow \infty$ функция ΔW стремится к постоянному значению, которое получено аналитически и приближенно равно $\Delta W_{\infty} \approx 1.80$. Было показано [1], что предельный случай $\lambda \rightarrow 0$ соответствует теории адгезии Дерягина – Мюллера – Торопова, а случай $\lambda \rightarrow \infty$ – теории Джонсона – Кендалла – Робертса.

Величина силы отрыва $q_{\min}$ также может быть представлена в виде зависимости от одного параметра λ , аналогичной полученной ранее [1].

Как и при адгезии сухих поверхностей, в случае капиллярной адгезии для тел параболической формы зависимость безразмерной нагрузки Q от безразмерной величины D (Q и D даны в (3.2)) определяется одним безразмерным параметром

$$\eta = \frac{\gamma^{4/3} R^{5/3}}{\nu E^{4/3}}$$

В этом случае безразмерная потеря энергии ΔW (3.3) зависит от одного параметра η . График функции $\Delta W(\eta)$ представлен на фиг. 7, б. Результаты показывают, что величина ΔW отлична от нуля только начиная с некоторого значения η и неограниченно возрастает при увеличении η .

Заметим, что для тел, форма поверхности которых описывается полиномом более высокой степени ($n \geq 2$), необходимо использовать два безразмерных параметра для описания зависимости нагрузки от изменения расстояния между телами (например, параметры E^*/p_0 , $\gamma/(p_0 l)$ для случая адгезии сухих поверхностей и ν/l^3 , $\gamma/(E^* l)$ для случая капиллярной адгезии, использованные на фиг. 3).

4. Использование модели Винклера. Решение задачи можно существенно упростить, если считать, что упругие свойства взаимодействующих тел описываются

моделью Винклера. В этом случае нормальное смещение поверхностей $u(r)$ связано с приложенным давлением $p(r)$ соотношением

$$u(r) = kp(r), \quad k = k_1 + k_2 \quad (4.1)$$

где k_1 и k_2 – постоянные, описывающие упругие свойства взаимодействующих тел. Соотношение (4.1) является приближенным аналогом соотношения (1.7).

Таким образом, соотношения (1.1)–(1.5) и (4.1) образуют полную систему уравнений в случае адгезии сухих поверхностей, а (1.1)–(1.6) и (4.1) – в случае капиллярной адгезии. Для простоты рассмотрим случай контакта параболических тел, т.е., $n = 1$.

Учитывая соотношение (4.1), из уравнений (1.1)–(1.5) получаем следующие выражения, справедливые для обоих случаев:

при контакте поверхностей ($h(0) = 0$)

$$p(r) = -\frac{1}{k} \left(\frac{r^2}{2R} + d \right), \quad r \leq a; \quad u(r) = -kp_0, \quad a < r \leq b$$

$$a^2 = 2R(kp_0 - d), \quad b^2 = a^2 + 2R\gamma / p_0$$

$$q = -2\pi R\gamma + \pi(R/k)(d^2 - k^2 p_0^2) \quad (4.2)$$

в отсутствие контакта ($h(0) > 0$)

$$u(r) = -kp_0, \quad 0 \leq r \leq b, \quad b^2 = -q / (\pi p_0)$$

$$q = -2\pi R\gamma + 2\pi R p_0 (d - kp_0) \quad (4.3)$$

При точечном контакте, полагая $a = 0$ в (4.2), получаем

$$q^* = -2\pi R\gamma, \quad d^* = kp_0. \quad (4.4)$$

Соотношения (4.2)–(4.4) определяют решение задачи в случае адгезии сухих поверхностей. Для того чтобы получить решение в случае капиллярной адгезии, эти соотношения нужно дополнить следующими выражениями для давления в жидкости p_0 , полученными из соотношения (1.6):

при контакте

$$p_0 = \gamma(\pi R / \nu)^{1/2} \quad (4.5)$$

в отсутствие контакта

$$p_0^2 = -(q / \nu) [\gamma + q / (4\pi R)] \quad (4.6)$$

Подставляя эти выражения в соотношения (4.2)–(4.4), получим решение в случае капиллярной адгезии.

Полученные решения определяют зависимость между нагрузкой q и величиной d . Если ввести безразмерные переменные Q (первое соотношение (3.2)) и $D_w = d(k\gamma)^{-1/2}$, то искомая зависимость будет содержать единственный безразмерный параметр.

Так, в задаче об адгезии сухих поверхностей, используя безразмерный параметр

$$\lambda_w = p_0(k / \gamma)^{1/2}$$

представим последние соотношения (4.2) и (4.3) в виде

$$Q = \begin{cases} D_w^2 - 2 - \lambda_w^2, & D_w \leq \lambda_w \\ 2(\lambda_w D_w - \lambda_w^2 - 1), & D_w > \lambda_w \end{cases} \quad (4.7)$$

При $D_w \leq \lambda_w$ имеет место контакт поверхностей, а при $D_w > \lambda_w$ – отсутствие контакта. Случай $D_w^* = \lambda_w$, $Q^* = -2$ соответствует точечному контакту.

В задаче о капиллярной адгезии, подставляя (4.5) и (4.6) в последние соотношения (4.2) и (4.3) соответственно и вводя безразмерный параметр

$$\eta_w = \pi R k \gamma / \nu$$

получим

$$D_w^2 = \begin{cases} Q + 2 + \eta_w, & D_w \leq \eta_w \\ -\frac{1}{\eta_w Q} \frac{(2 + Q - 2Q\eta - Q^2\eta/2)^2}{Q + 4}, & D_w > \eta_w \end{cases} \quad (4.8)$$

При $D_w \leq \eta_w$ поверхности находятся в контакте, а при $D_w > \eta_w$ контакт отсутствует. Случай $D_w^* = \eta_w$, $Q^* = -2$ соответствует точечному контакту поверхностей.

Из полученных соотношений (4.7) и (4.8) следует, что зависимость нагрузки Q , приложенной к телам, от величины D_w является немонотонной и однозначной в случае адгезии сухих поверхностей, а в случае капиллярной адгезии – немонотонной и неоднозначной. Сравнение полученных соотношений с решениями задачи в точной постановке показывает, что модель Винклера дает качественно верную зависимость для нагрузки лишь при капиллярной адгезии. При адгезии сухих поверхностей эта зависимость качественно соответствует точной только в случае контакта поверхностей.

На основании представленных соотношений между нагрузкой Q и величиной D_w получены зависимости безразмерной потери энергии в цикле уменьшение – увеличение расстояния между телами

$$\Delta W_w = \frac{\Delta w}{\pi R} \left(\frac{1}{k \gamma^3} \right)^{1/2}$$

от параметров λ_w и η_w для случаев адгезии сухих поверхностей и капиллярной адгезии соответственно. Они представлены на фиг. 7. В случае адгезии сухих поверхностей функция $\Delta W_w(\lambda_w)$ получена в аналитическом виде

$$\Delta W_w = \begin{cases} \lambda_w^3, & \lambda_w \leq 1 \\ \frac{1}{3} \frac{(\lambda_w^2 - 1)(2\lambda_w^4 + 5\lambda_w^2 - 1)}{\lambda_w^3} + \frac{1}{\lambda_w}, & \lambda_w > 1 \end{cases}$$

Эта функция близка к функции $\Delta W(\lambda)$ (фиг. 7, а), соответствующей точной постановке задачи, лишь при малых значениях λ_w .

В случае капиллярной адгезии зависимость $\Delta W_w(\eta_w)$ качественно напоминает кривую $\Delta W(\eta)$, полученную при решении точной задачи. При этом значение η_w , начиная с которого разность работ ΔW_w становится отличной от нуля, равно $\sqrt{3}/4$.

5. Выводы. На основе анализа взаимодействия упругих тел, проведенного как для случая контакта поверхностей, так и в отсутствие контакта, при учете поверхностной энергии взаимодействующих тел или поверхностной энергии покрывающих их пленок жидкости можно сделать следующие выводы.

1°. Зависимость нагрузки от изменения расстояния между телами является неоднозначной в случае адгезии сухих поверхностей при любых значениях параметров задачи, а в случае капиллярной адгезии – в определенном интервале их изменения.

2°. Потеря энергии в цикле уменьшение – увеличение расстояния между телами возрастает с увеличением поверхностной энергии и уменьшением объема жидкости в мениске. Для более мягких тел (с меньшим модулем упругости) потеря энергии за цикл больше.

3°. Для тел параболической формы зависимость нагрузки от изменения расстояния между телами можно описать одним безразмерным параметром. Соответственно безразмерная потеря энергии за цикл является функцией единственного параметра как при адгезии сухих поверхностей, так и при капиллярной адгезии. Если же форма тел описывается степенной функцией более высокой степени, то необходимо использовать два безразмерных параметра для описания этих зависимостей.

4°. Использование модели Винклера для описания упругих свойств взаимодействующих тел дает качественно верные результаты для капиллярной адгезии, а в случае адгезии сухих поверхностей – только при малых значениях параметра λ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00901), Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS-99-0671) и научно-технической программы "Университеты России" (015.04.01.57) и доложена на Международной конференции "Современная теория фильтрации", посвященной памяти П.Я. Кочкиной (сентябрь 1999 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Maugis D.* Adhesion of spheres: The JKR–DMT transition using a Dugdale model // *J. Colloid Interface Sci.* 1991. № 150. P. 243–269.
2. *Greenwood J.A., Johnson K.L.* An alternative to the Maugis model of adhesion between elastic spheres // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1998. V. 31. № 22. P. 3279–3290.
3. *Иванова Е.Б., Кравчук А.С.* Вариационный подход к решению контактных задач с учетом адгезии // *Расчеты на прочность*. М.: Машиностроение, 1989. Вып. 30. С. 156–165.
4. *Кравчук А.С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: МГАПИ, 1997. 339 с.
5. *Greenwood J.A.* Adhesion of elastic spheres // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1997. V. 453. № 1961. P. 1277–1297.
6. *Чижик С.А.* Капиллярный механизм адгезии и трения шероховатых поверхностей, разделенных тонким слоем жидкости // *Трение и износ*. 1994. Т. 15. № 1. С. 11–26.
7. *Maugis D., Gauthier-Manuel B.* JKR–DMT transition in the presence of a liquid meniscus // *J. Adhesion Sci. Technol.* 1994. V. 8. № 11. P. 1311–1322.
8. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Контактное взаимодействие упругих тел при наличии капиллярной адгезии // *ПММ*. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 128–137.
9. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
10. *Johnson K.L.* Contact Mechanics. N.Y., etc.; Cambridge: Univ. Press, 1985. = *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М: Мир, 1989. 509 с.
11. *Tabor D.* Surface forces and surface interactions // *J. Colloid Interface Sci.* 1977. V. 58. № 1. P. 2–13.